МИХАИЛ АЛЕКСЕЕВИЧ ЛАВРЕНТЬЕВ

(К 100-летию со дня рождения)

В этом году исполняется 100 лет со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева — крупнейшего математика и механика 20-го века, выдающегося организатора отечественной науки.

Родился Михаил Алексеевич 19 ноября 1900 г. в городе Казани. Его отец Алексей Михайлович Лаврентьев был преподавателем математики в Казанском техническом училище, а позднее профессором механики Казанского, а затем Московского университетов. В 1910 г. он был командирован для подготовки к профессорскому званию в Геттинген и Париж — крупнейшие математические центры того времени. В Геттингене Алексей Михайлович познакомился с Николаем Николаевичем Лузиным. Знакомство переросло в тесную дружбу, и после возвращения в Россию Н. Н. Лузин часто навещал семью Лаврентьевых в Казани. Впоследствии он сыграл очень большую роль в судьбе Михаила Алексеевича.

По возвращении на родину в 1911 г. Михаил Алексеевич поступил в Казанское коммерческое училище, после окончания которого в 1918 г. был зачислен на первый курс физико-математического факультета Казанского университета. Большое влияние на формирование его научных интересов в то время оказали профессора математики и механики Е. А. Болотов, Д. Н. Зейлигер и Н. Н. Парфентьев. Одновременно в 1920–1921 гг. Михаил Алексеевич работал сначала лаборантом кабинета механики, а затем и. о. преподавателя Казанского университета.

В 1921 г. при содействии Н. Н. Лузина семья Лаврентьевых переехала в Москву. В этом же году Михаил Алексеевич перешел на последний курс Московского университета. Еще будучи студентом, он начал преподавательскую деятельность в Московском высшем техническом училище, которая не прерывалась до 1929 г. В 1922 г. Михаил Алексеевич окончил Московский университет и был оставлен при Университете на кафедре математического анализа а в 1923 г. поступил в аспирантуру созданного незадолго до этого механико-математического факультета Московского университета.

В стенах Московского университета М. А. Лаврентьев начал научную деятельность под руководством Н. Н. Лузина, одного из крупнейших математиков 20-го века. Н. Н. Лузину принадлежат фундаментальные результаты в области дескриптивной теории множеств и теории функций. Выдающимся вкладом Н. Н. Лузина в развитие отечественной науки является создание крупной новой математической школы в Советском Союзе. Из «Лузитании» вышла целая плеяда блестящих математиков, среди которых П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Д. Е. Меньшов, П. С. Новиков, И. И. Привалов, В. В. Степанов, М. Я. Суслин и многие другие.

Незаурядные способности выдвинули М. А. Лаврентьева в число наиболее способных и деятельных членов «Лузитании».

Полученные им в это время результаты относятся к дескриптивной теории множеств — разделу теории множеств, который изучает внутренние свойства классов множеств в зависимости от операций, посредством которых эти классы получены из наборов некоторых простейших множеств. Наиболее известным результатом Михаила Алексеевича в этой области является следующая теорема о продолжении гомеоморфизмов. *Пусть X, Y — полные метрические пространства и $A \subset X$, $B \subset Y$ — произвольные множества. Тогда любой гомеоморфизм между множествами A и B продолжается до гомеоморфизма между некоторыми множествами типа G_δ, содержащими A и B.*

Эта теорема сразу же вошла в такие классические руководства по топологии, как книги «Теория множеств» Ф. Хаусдорфа и «Топология» К. Куратовского. Значение теоремы состоит в том, что с ее помощью легко устанавливается топологическая инвариантность основных классов дескриптивной теории множеств. В 1925 г. за работы по теории множеств Михаилу Алексеевичу была присуждена премия Главнауки. К этому же времени относится еще один яркий результат. В 1925 г. он опубликовал пример дифференциального уравнения $dy/dx = f(x, y)$ с непрерывной правой частью, обладающего тем свойством, что через каждую точку области определения правой части проходит не менее двух интегральных кривых этого уравнения. В 1926 г. М. А. Лаврентьев блестяще защитил аспирантскую диссертацию и навсегда расстался с теорией множеств.

Следующее десятилетие стало наиболее плодотворным математическим периодом в жизни Михаила Алексеевича. В 1927–1938 гг. он опубликовал ряд фундаментальных результатов по теории функций комплексного переменного и заложил основы новой математической теории — теории квазиконформных отображений.

Значительную роль сыграла поездка М. А. Лаврентьева во Францию осенью 1927 г. В Париже он вел научную работу под руководством профессора П. Монтеля, посещал лекции крупнейших французских математиков Э. Бореля, Г. Жюлиа, А. Лебега, общался со многими математиками на знаменитом семинаре Ж. Адамара. В это время им были развиты вариационные методы теории конформных отображений, которые впоследствии получили приложения в самых разных вопросах. К этому же периоду относится его первая крупная работа по теории приближений.

В 1929 г. в жизни Михаила Алексеевича произошли значительные изменения. Он поступил на работу в Центральный аэрогидродинамический институт, где под руководством С. А. Чаплыгина сложилась сильная группа математиков и механиков, главным направлением исследований которой было создание более полной теории крыла самолета. В этом же году он возглавил кафедру математики Московского химико-технологического института и ему было присвоено звание профессора. В институте Михаил Алексеевич в течение двух лет читал курсы высшей математики. В 1931 г. он вернулся в Московский университет, где вскоре стал заведующим кафедрой общего математического анализа механико-математического факультета.

В 1927–1930 гг. определился круг проблем комплексного анализа, над решением которых Михаил Алексеевич работал в последующее десятилетие. Он включал три направления: теорию приближений функций комплексного переменного, вариационные проблемы теории конформных отображений, поведение конформных отображений вблизи границы.

Основная проблема *теории приближений функций комплексного переменного*, которая привлекала внимание математиков того времени, состояла в следующем. Необходимо было выяснить, как велик запас функций, которые можно сколь угодно точно приблизить простейшими функциями — многочленами от комплексного переменного.

Первый крупный результат М. А. Лаврентьева по теории приближений представил исчерпывающее решение проблемы, поставленной П. Монтелем. Михаил Алексеевич нашел топологические условия, необходимые и достаточные для того, чтобы заданное множество могло служить множеством сходимости некоторой последовательности многочленов, сходящейся всюду в данной области. Важнейшим результатом в этой области стала следующая теорема М. А. Лаврентьева, доказательство которой было опубликовано в 1934 г. *Пусть K — связный компакт комплексной плоскости. Для того чтобы каждая функция $f \in C(K)$ была пределом равномерно сходящейся последовательности полиномов, необходимо и достаточно, чтобы K было нигде не плотным и обладало связным дополнением.*

Эта теорема полностью характеризует континуумы, на которых возможно равномерное приближение многочленами произвольных непрерывных функций, и является одним из наиболее фундаментальных результатов в этой области. Впоследствии она была обобщена С. Н. Мергеляном, который показал, что ограниченность континуума и связность его дополнения необходимы и достаточны для возможности приближения многочленами любой функции, непрерывной на этом континууме и аналитической в его внутренних точках.

Михаил Алексеевич блестяще владел методами вариационного исчисления. Развивая свой вариационно-геометрический метод, он решил ряд *экстремальных задач теории конформных отображений*. Вот один из его самых красивых результатов в этом направлении

Если G_0, G_1 — произвольные непересекающиеся области, содержащие фиксированные точки $z_i \in G_i$, и $F_i : G_i \to \{|w| < 1\}$, $F_i(z_i) = 0$, — конформные отображения этих областей на единичный круг, то

$$|F'(z_0)F'(z_1)| \geq \frac{1}{|z_0 - z_1|^2},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда эти области являются полуплоскостями, разделенными прямой $|z - z_0| = |z - z_1|$.

Отсюда вытекает знаменитая теорема Кёбе в такой вариационной формулировке: *если f однолистна в единичном круге, не принимает там значения w_0 и $f(0) = 0$, то $|w_0| \geq |f'(0)|/4$, причем равенство достигается лишь для функции, отображающей круг на плоскость без луча* $\arg(w - w_0) = \arg w_0$.

Обобщая вариационную постановку теоремы Кёбе, Михаил Алексеевич поставил и решил задачу о максимальном значении растяжения $|f'(0)|$ в классе однолистных в круге аналитических функций, для которых $f(0) = 0$ и которые не принимают заданных значений $w_1, \dots, w_n$. В частности, если w_k лежат на вершинах правильного n-угольника с центром $w = 0$, то из полученных результатов вытекает известное неравенство П. Пойа $\sqrt[n]{4}|w_1| \geq |f'(0)|$.

В 1934 г. М. А. Лаврентьев опубликовал обширное исследование по экстремальным проблемам теории конформных отображений, возникающим в теории крыла аэроплана. Если профиль крыла представляет собой спрямляемую дугу γ с концами A, B, то задача обтекания теории крыла сводится к отысканию гармонической функции $\varphi(x, y)$, определенной вне γ и удовлетворяющей краевым условиям

$$\Gamma\colon \nabla\varphi \cdot \vec{n} = 0, \quad \nabla\varphi \to \vec{V}_\infty \quad \text{при } x^2 + y^2 \to \infty.$$

Решение определяется однозначно, если потребовать, чтобы концы дуги были точками ветвления линий уровня φ. При этом подъемная сила R крылового профиля выражается по формуле Н. Е. Жуковского

$$R = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re}\left\{ \oint_\gamma |\nabla\varphi|^2 d\bar{z} \right\}.$$

Михаил Алексеевич доказал следующую замечательную теорему о том, что при заданных геометрических параметрах максимальной подъемной силой обладают профили в форме дуг окружностей — дужки Жуковского.

Пусть дана простая спрямляемая дуга γ длиной не больше l, кривизна в каждой точке которой не превосходит K. Если $K < c/l$, где c можно взять равным $1/21$, то среди указанных дуг наибольшей подъемной силой обладает дуга окружности радиуса $1/K$ и длины l. При значениях c, близких к 2π, теорема неверна.

Эта теорема служит одним из первых результатов теории оптимизации формы — математической дисциплины, которая начала активно развиваться только в 80-е годы нашего века.

Приведенный результат относится как к математике, так и к механике. Единый подход к этим двум дисциплинам характерен для всего творчества М. А. Лаврентьева. Его достижения в области механики столь же значительны, как и вклад в математику. В настоящем обзоре упор сделан на математические достижения М. А. Лаврентьева.

Третий большой цикл исследований М. А. Лаврентьева относится к *теории соответствия границ при конформных отображениях*. Вопрос, который он поставил перед собой, состоял в следующем: «найти возможно точную структуру множества точек границы области, которое при конформном отображении области на круг перейдет в множество положительной меры, в множество меры нуль». В 1924 г. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов доказали, что при конформном отображении на круг области со спрямляемой границей множество линейной меры нуль на границе переходит в множество меры нуль на окружности. Ранее были построены примеры областей с неспрямляемыми границами, на которых есть множества нулевой меры, соответствующие множествам положительной меры.

Михаил Алексеевич связал этот вопрос с геометрическими свойствами. Точка границы области называется *недостижимой конечным путем* (*недостижимой отрезком*), если ее нельзя соединить ни с какой точкой области спрямляемым путем (отрезком), принадлежащим, кроме начала, этой области. Его ответ звучит так: любому множеству граничных точек, недостижимых конечными путями, при конформном отображении на круг соответствует множество точек окружности меры нуль. Для множества точек, недостижимых отрезками, имеет место другая ситуация. А именно, существует область с жордановой (неспрямляемой) границей, множеству граничных точек которой, недостижимых отрезками, соответствует на границе множество полной меры.

В 1934 г. М. А. Лаврентьеву была присуждена ученая степень доктора технических наук, а в 1935 г. — доктора физико-математических наук (обе без защиты диссертации). К этому времени Михаил Алексеевич стал признанным главой советской школы теории функций комплексного переменного. В 1934 г. во время первого Всесоюзного съезда математиков ему было поручено организовать отдел теории функций в Математическом институте им. В. А. Стеклова. В 1935 г. М. А. Лаврентьев оставил ЦАГИ и был принят на должность старшего научного сотрудника МИАН, а в 1937 г. возглавил созданный им в этом институте Отдел теории функций, которым он руководил вплоть до 1960 г.

В Математическом институте Михаил Алексеевич продолжил исследования в области теории приближений функций комплексного переменного. В 1937 г. в совместной работе М. А. Лаврентьева и М. В. Келдыша был построен замечательный пример области, ограниченной спрямляемой кривой, для которой система многочленов неполна в смысле сходимости в среднем на границе области. Пример основан на конструкции области сколь угодно малого диаметра со спрямляемой границей такой, что при конформном отображении на круг любой дуге ее границы соответствует длина окружности той же длины. В этом примере, следовательно, для функции $f(z)$, конформно отображающей единичный круг на построенную область, модуль производной $|f'(z)|$ равен 1 почти всюду и гармоническая в круге функция $\ln|f'(z)|$ не представляется интегралом Пуассона по своим граничным значениям. Пример оказался полезным и в ряде других вопросов комплексного анализа. В их же совместной работе 1939 г. была изучена возможность приближения непрерывных функций на неограниченных континуумах.

В исследованиях граничных свойств аналитических функций интересы Михаила Алексеевича смещаются в сторону более конкретных результатов. В 1936 г. ему удалось получить количественные характеристики конформных отображений произвольных ограниченных областей на единичный круг. М. А. Лаврентьев ввел понятие относительного расстояния $\rho_D(z_1, z_2)$ между точками области D как нижней грани: 1) длин дуг, соединяющих эти точки, и 2) длин дуг, разбивающих D и отделяющих z_1, z_2 от точки $0 \in D$. Граничной точкой он называет любую последовательность точек $z_n \in D$ без предельных точек в D такую, что $\rho_D(z_m, z_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Расстояние между граничными точками $\{z'_n\}$, $\{z''_n\}$ определяется как $\lim \rho_D(z'_n, z''_n)$. Точки, между которыми нулевое расстояние, отождествляются. Введенное определение является метризацией понятия простого конца в смысле Каратеодори. Михаил Алексеевич доказывает, что если область лежит в круге $|z| \le M$ и f — конформное отображение на единичный круг с нормировкой, то для любых точек замкнутой области, компактифицированной, как указано выше, справедлива оценка

$$\exp\left\{-\frac{K}{\rho_D(z_1, z_2)}\right\} < |f(z_1) - f(z_2)| < K_1\sqrt{\rho_D(z_1, z_2)},$$

в которой K зависит только от M, а K_1 — абсолютная постоянная. Из этой оценки вытекают теорема Каратеодори о соответствии границ и теорема Куранта о равномерной сходимости последовательности однолистных функций.

В 1937 г. Михаил Алексеевич получил количественное уточнение теоремы Лузина — Привалова: *если область D содержит единичный круг и имеет спрямляемую границу длины l, то при конформном отображении $w = f(z)$, $f(0) = 0$, этой области на единичный круг для любого множества $E \subset \partial D$ справедлива* *оценка*

$$\operatorname{meas} f(E) \le \frac{Kl}{|\ln \operatorname{meas} E| + 1},$$

где K — некоторая абсолютная постоянная. Многомерные аналоги этого неравенства были найдены только в середине девяностых годов при разработке теории интегрируемости якобианов.

На протяжении ряда лет Михаила Алексеевича интересовала следующая задача. Описать класс областей D, при конформном отображении $w = f(z)$ которых на единичный круг линейная мера образа любого множества $E \subset \partial D$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{meas} f(E) \le K \operatorname{meas} E^{\delta}$. Первая публикация М. А. Лаврентьева по этой проблеме относится к 1928 г. В 1935–1936 гг. он ввел класс областей с конечным вращением, для которых удалось получить нужную оценку.

Пусть γ — гладкая жорданова кривая в плоскости z, содержащая точку $z = 0$ внутри. Возьмем точку z_0 с наименьшим $|z_0|$ (а если их несколько, то с наименьшим $\arg z_0$) и обозначим через α_0 значение угла касательной к γ в z_0 с действительной осью, для которого $0 \le \alpha_0 \le \pi$. Пусть $\alpha(z)$, $z \in \gamma$, — непрерывная ветвь угла наклона касательной к кривой γ к горизонтали, которая определяется при обходе этой кривой в положительном направлении значением $\alpha(z_0) = \alpha_0$, а $m(\gamma) = \min \alpha(z)$, $M(\gamma) = \max \alpha(z)$, $z \in \gamma$.

Область D называется *областью с конечным вращением*, если существуют постоянные m_0, M_0 такие, что для любого компакта K из D найдется γ с описанными выше свойствами, которая отделяет этот компакт от границы D и для которой $m(\gamma) \ge m_0$ и $M(\gamma) \le M_0$. Этот класс содержит все выпуклые области.

М. А. Лаврентьев доказал, что если область D с ограниченным вращением содержит единичный круг, то при конформном отображении $w = f(z)$, $f(0) = 0$, меры множества $E \subset \partial D$ и его образа связаны степенным неравенством $\operatorname{meas} f(E) \le 2\pi \operatorname{meas} E^{\delta}$, где δ зависит лишь от постоянных m_0, M_0.

В эти годы Михаил Алексеевич работал над вариационными задачами теории аналитических функций. В 1938 г. он опубликовал работу по математической теории течений со свободными границами, которая оказала существенное влияние на дальнейшее развитие исследований в этой области. В простейшей формулировке изучаемая задача состоит в следующем. Пусть в плоскости комплексного переменного задана дуга $y = F_1(x) \le 0$, $x \le 0$. При заданных положительных числах ξ, h требуется доопределить F_1 для значений $x \le \xi$ так, чтобы полученная функция $F(x)$ была непрерывна и обладала следующим свойством: если аналитическая функция $f(z)$, $f'(\infty) = 1$, реализует конформное отображение области, ограниченной дугой $y = F(x)$, вертикальным отрезком $z = \xi + iy$, $y \in [F(\xi), -h]$, и горизонтальным лучом $z = x - ih$, $x \ge \xi$, на нижнюю полуплоскость, то

$$|f'(x + iF(x))| = \text{const} \quad \text{при} \quad 0 \le x \le \xi.$$

М. А. Лаврентьев свел эту задачу к экстремальной задаче теории конформных отображений. С помощью развитого им вариационно-геометрического метода он установил существование и единственность ее решения. Вариационный принцип М. А. Лаврентьева оказался чрезвычайно полезным при исследовании широкого класса задач со свободными границами. Для случая полуплоскости он формулируется следующим образом.

Пусть C — замкнутая жорданова кривая на сфере Римана, проходящая через бесконечно удаленную точку, а $D(C)$ — одна из двух областей, ограни-

ченных C. Предположим, что производная конформного отображения $f(z, C)$, $|f'(\infty, C)| = 1$, области $D(C)$ на верхнюю полуплоскость существует во всех точках C. Пусть также $\widetilde{C}$ — такая же кривая, касающаяся C в бесконечности, и $D(C) \subset D(\widetilde{C})$. Тогда

1) *если C и $\widetilde{C}$ имеют общую точку z_1, то $|f'(z_1, C)| \geq |f'(z_1, \widetilde{C})|$, причем равенство возможно лишь при совпадении C, $\widetilde{C}$;*

2) *если C и $\widetilde{C}$ задаются уравнениями $y = y(x)$, $y = \tilde{y}(x)$, а z_2 и $\tilde{z}_2$ — точки с одной абсциссой x_2, в которой достигается максимум $\tilde{y}(x) - y(x)$, то $|f'(z_2, C)| \leq |f'(z_2, \widetilde{C})|$, причем равенство возможно, только если $\widetilde{C}$ получается из C сдвигом, параллельным оси x.*

Широкий диапазон научных интересов М. А. Лаврентьева нашел отражение в созданной им теории *квазиконформных отображений*, которой он занимался с 1928 г. Им руководило желание разобраться в основных фактах комплексного анализа, выяснить, какие законы ими управляют, отбросить все несущественное и распространить классическую теорию на более широкий класс объектов. С идейной точки зрения Михаил Алексеевич пришел к этим отображениям следующим образом. Если на некоторой поверхности задана метрика

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dxdy + G\,dy^2, \quad EG - F^2 > 0, \quad E > 0,$$

где коэффициенты квадратичной формы являются непрерывными функциями, определенными в некоторой плоской области, то эта метрика снабжает поверхность структурой действительного двумерного риманова многообразия. Однако можно добиться большего и ввести на этом многообразии комплексную аналитическую (конформную) структуру. Для этого нужно определить новые координаты u, v так, чтобы основная квадратичная форма приняла вид $ds^2 = K(du^2 + dv^2)$. Если ввести комплексные переменные $z = x + iy$, $w = u + iv$, то исходная задача сведется к отысканию решения уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} - \mu w_z = 0$, осуществляющего гомеоморфизм между двумя заданными областями, при этом коэффициент μ выражается через E, F, G, а неравенства на E, F, G дают $|\mu| < 1$. Ранее решение этой задачи было известно только для для гёльдеровых μ. (Впервые данная задача изучалась К. Ф. Гауссом еще в 1825 г.; вопрос о том, при каких условиях регулярности его рассуждения приводят к цели, Гауссом не рассматривался.)

Михаил Алексеевич рассмотрел эту проблему для непрерывных коэффициентов E, F, G и ввел в рассмотрение новый класс обобщенных решений уравнений Бельтрами, которые он назвал квазиконформными отображениями. В ранних работах под квазиконформным отображением он понимал любой гомеоморфизм $w = w(z)$ плоской области D в плоскость, который в каждой точке z преобразует бесконечно малые эллипсы из заданного семейства эллипсов (с центром z, отношением полуосей $p(z) \geq 1$ и углом наклона $\vartheta(z)$ большей полуоси к оси x) в окружности с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Величины p и ϑ он назвал характеристиками. Если ввести комплексную характеристику

$$\mu(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} e^{2i\vartheta(z)},$$

то условие квазиконформности отображения $w(z)$ в точках, где оно дифференцируемо, запишется в виде системы Бельтрами. В дальнейшем понятие квазиконформного отображения было уточнено. Было введено понятие обобщенного решения, которое удовлетворяет уравнению Бельтрами лишь почти всюду, но зато гомеоморфно и абсолютно непрерывно на почти всех отрезках прямых в D.

Конформные подстановки сводят задачу изучения квазиконформных отображений одной односвязной области на другую к случаю квазиконформных отображений единичного круга U на себя. В 1935 г. Михаил Алексеевич установил ряд основных свойств этих отображений. Он доказал равностепенную непрерывность семейства таких отображений при условии ограниченности характеристики $p(z) \leq Q$, их устойчивость относительно изменения характеристик. Последний результат доказывается в двух формах:

1) *если* $p(z) \leq 1 + \varepsilon$ *в* U *и* $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, *то существует функция* $\lambda(\varepsilon)$, *стремящаяся к нулю при* $\varepsilon \to 0$ *и такая, что*

$$|w(z) - z| \leq \lambda(\varepsilon)$$

для всех $z \in U$ *(впоследствии П. П. Белинский установил, что можно взять* $\lambda(\varepsilon) = 18\varepsilon$*);*

2) *если* $p(z) \leq 1+\varepsilon$ *и* $w(0) = 0$, *то существует функция* $\mu(\varepsilon, \eta)$, *стремящаяся к нулю при* $\varepsilon, \eta \to 0$ *и такая, что для любой точки* $z_0 \in U$ *и точек* z_1 *и* z_2 *кольца* $(1 - \eta)\rho < |z - z_0| < \rho$, *где* $0 < \rho < 1 - |z_0|$, *выполняются неравенства*

$$1 - \mu(\varepsilon, \eta) < \left| \frac{w(z_2) - w(z_0)}{w(z_1) - w(z_0)} \right| < 1 + \mu(\varepsilon, \eta),$$

$$\left| \arg \frac{w(z_2) - w(z_0)}{w(z_1) - w(z_0)} \right| < \mu(\varepsilon, \eta).$$

При помощи этих результатов М. А. Лаврентьев распространил на квазиконформные отображения теорему Римана: для любого непрерывного в круге распределения характеристик с ограниченной характеристикой p существует квазиконформное отображение с этими характеристиками. Искомое отображение он получил как предел последовательности кусочно-аффинных отображений. При этом оказался полезным предложенный Михаилом Алексеевичем следующий принцип склеивания.

Пусть φ *— диффеоморфизм отрезка* $I = [0, 1]$ *на себя с положительной производной, а* $Q_1 = I \times [-h, 0]$, $Q_2 = I \times [0, h]$ *— прямоугольники. Тогда существуют конформные отображения* f_1, f_2 *этих прямоугольников на непересекающиеся области* D_1, D_2, *причем* $f_1(x) = f_2(\varphi(x))$ *для всех точек* I.

В 1938 г. Михаил Алексеевич публикует небольшую заметку, в которой впервые рассматриваются квазиконформные отображения пространственных областей. Согласно его определению гладкое отображение $u = f(x)$ области $D \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$ называется *квазиконформным*, если $\det f'(x) > 0$ и отношение наибольшего к наименьшему собственных чисел положительной матрицы $f'(x)f'(x)^*$ равномерно ограничено. Последнее равносильно существованию постоянной k такой, что $\|f'(x)\| \leq k \det f'(x)$. М. А. Лаврентьев сформулировал следующую теорему, которая указывает на существенные различия между плоскими и пространственными квазиконформными отображениями: *всякое гладкое локально гомеоморфное квазиконформное отображение пространства* $\mathbb{R}^3$ *на себя является взаимно однозначным.* Михаил Алексеевич не опубликовал доказательства этой теоремы. Полное решение проблемы было получено в 1967 г. В. А. Зоричем, который доказал, что любое квазиконформное локально гомеоморфное отображение пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в себя является гомеоморфизмом.

В 1927–1940 гг. Михаилом Алексеевичем опубликовано всего более 60 статей по различным вопросам теории функций и ее приложений к механике, которые оказали значительное влияние на развитие исследований по анализу и математической физике.

В 1939 г. Михаил Алексеевич был назначен директором Института математики АН УССР и переехал в Киев. В том же году он был избран действительным членом АН УССР и стал профессором физико-математического факультета Киевского университета. Одновременно он продолжал руководить отделом теории функций МИАН и до 1941 г. оставался профессором Московского университета.

Великая Отечественная война стала переломным периодом в творчестве Михаила Алексеевича. Он переключился на задачи оборонного характера. В начале войны АН УССР была эвакуирована в Уфу. Здесь М. А. Лаврентьев начал исследования в области теории взрыва, решил ряд задач, относящихся к артиллерии и военно-инженерному делу. Одним из наиболее ярких достижений М. А. Лаврентьева в прикладных областях явилось создание гидродинамической теории кумуляции. Кроме того, он вел большую организационную работу, возглавляя Математическое отделение АН УССР и активно участвуя в работе МИАН. За работы, связанные с военной техникой, в 1944 г. М. А. Лаврентьев был награжден орденом Отечественной войны II степени, а в 1945 г. — орденом Трудового Красного знамени. В 1946 г. он был избран вице-президентом АН УССР. Этот пост он занимал до 1948 г.

Несмотря на огромную загруженность, Михаил Алексеевич находил время для занятий математикой. В 1943 г. он анонсировал весьма важный результат о разрешимости задачи об уединенных волнах на поверхности идеальной жидкости, полное доказательство которого опубликовано в 1947 г. Одиночные волны на воде были открыты Дж. Расселом в 1844 г., а приближенная теория разработана независимо Дж. Буссинеском и Дж. Рэлеем. М. А. Лаврентьев, комбинируя вариационные методы теории конформных отображений и разработанный им метод «узких полос», показал существование точных решений уравнений гидродинамики для целого семейства периодических волн со сколь угодно большим периодом T. В предельном случае $T \to \infty$ получается искомая уединенная волна. В рамках развитого подхода приближение Дж. Буссинеска и Дж. Рэлея оказалось эквивалентным аппроксимации граничного значения скорости $|v|$ формулой Лаврентьева

$$|v|^2 = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{2}{3} f f''\right),$$

где $y = f(x)$ — уравнение свободной поверхности. Вместе с интегралом Бернулли это дает обыкновенное дифференциальное уравнение, которое является простейшей математической моделью уединенной волны.

После окончания войны Михаил Алексеевич вернулся к проблемам теории квазиконформных отображений. В 1946 г. он ввел понятие нелинейного класса квазиконформных отображений. Согласно данному им определению гомеоморфное отображение $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ области D на область Δ называется *квазиконформным отображением, соответствующим нелинейной системе уравнений*

$$\Phi_1\left(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y\right) = 0, \quad \Phi_2\left(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y\right) = 0,$$

если функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, осуществляющие это отображение, служат решениями этой системы.

Исходя из гидродинамических соображений, он записал такие системы в виде двух уравнений в характеристиках — величинах, которые вводятся следующим образом.

Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$ и рассмотрим в плоскости w произвольный единичный квадрат с вершиной w_0 и сторонами $\overline{w_0w_1}$, $\overline{w_0w_2}$, т. е. пару точек w_1, w_2, удовлетворяющих условиям

$$|w_1 - w_0| = |w_2 - w_0| = 1, \quad w_2 - w_0 = (w_1 - w_0)e^{i\pi/2}.$$

Пусть ν — угол, образованный стороной $\overline{w_0w_1}$ с осью u. При линейном отображении

$$u - u_0 = u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0), \quad v - v_0 = v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0)$$

вершинам w_1, w_2 будут соответствовать некоторые точки z_1, z_2. Положим

$$z_1 - z_0 = V_\nu e^{i\alpha_\nu}, \quad \vartheta_\nu = \arg\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_2}, \quad W_\nu V_\nu J = 1,$$

где J — определитель упомянутого линейного преобразования. Введенные величины элементарно выражаются через частные производные, и исходные уравнения могут быть заменены двумя функциональными соотношениями между характеристиками V_ν, $\alpha_n u$, ϑ_ν, W_ν отображения $w = w(z)$:

$$W_\nu = F_1(V_\nu, \alpha_\nu, x, y, u, v), \quad \vartheta_\nu = F_2(V_\nu, \alpha_\nu, x, y, u, v).$$

М. А. Лаврентьев назвал систему *сильно эллиптической*, если функции F_i гладкие и существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\delta < \vartheta_\nu < \pi - \delta, \quad \frac{\partial F_1}{\partial V_\nu} > \delta$$

для всех $\nu \in [0, 2\pi)$.

Обобщая известные уравнения годографа, полученные С. А. Чаплыгиным для уравнений газовой динамики, М. А. Лаврентьев доказал, что характеристики $P = \ln V$, α как функции переменных u, v служат решением линейной производной системы

$$P_v = a_1P_u + a_2\alpha_u + a_3, \quad \alpha_v = b_1P_u + b_2\alpha_u + b_3.$$

Он установил, что сильная эллиптичность исходной системы эквивалентна эллиптичности производной системы. Это дает новый метод линеаризации нелинейных задач, возможности которого далеко не исчерпаны.

В 1946–1948 гг. Михаил Алексеевич провел обширные исследования нелинейных классов квазиконформных отображений. Из полученных им результатов вытекает следующее обобщение теоремы Римана.

Пусть даны области D и Δ, ограниченные гладкими кривыми, и упорядоченные тройки точек границы D: z_1, z_2, z_3 и Δ: w_1, w_2, w_3. Какова бы ни была сильно эллиптическая система, однородная относительно производных, $\Phi_i(x, y, u, v, 0, 0, 0, 0) = 0$, всегда существует единственное соответствующее квазиконформное отображение области D на Δ, переводящее тройку z_1, z_2, z_3 в w_1, w_2, w_3.

Исследования М. А. Лаврентьева по нелинейным классам квазиконформных отображений опирались на метод узких полос, разработанный им для решения задач теории волн. В процессе работы над этими проблемами встретились значительные математические трудности, связанные с тем, что применяемые методы теории конформных отображений оказались неадекватными рассматриваемым задачам. С этого времени Михаил Алексеевич ограничивался только формулировкой результатов.

В 1946 г. М. А. Лаврентьев был избран действительным членом АН СССР. В этом же году ему присуждена Государственная премия первой степени за работы по теории струй и квазиконформным отображениям. В 1949 г. он вторично удостоен Государственной премии первой степени за прикладные исследования в области гидродинамики. В 1948 г. Михаил Алексеевич возвратился в Московский университет. Он активно участвовал в создании физико-технического факультета Московского университета, сыгравшего исключительно важную роль при подготовке высококвалифицированных специалистов для новых отраслей науки и техники. Впоследствии на базе этого факультета был создан Московский физико-технический институт.

Михаил Алексеевич сыграл также огромную роль в процессе создания и развития в нашей стране электронно-вычислительной техники. Он был одним из инициаторов организации Института точной механики и вычислительной техники АН СССР. В 1949 г. он был избран директором этого института и привлек на должность главного конструктора С. А. Лебедева. Здесь были созданы первые образцы электронных счетных машин серии БЭСМ и заложены основы машинной математики. Институтом он руководил до 1953 г. 50-е гг. были также годами интенсивной научно-организационной работы М. А. Лаврентьева в Москве. Он дважды (в 1950–1953 и 1955–1957 гг.) избирался на должность Академика-секретаря Отделения физико-математических наук АН СССР, а в 1951–1953 гг. возглавлял кафедру теории функций Московского университета. В 1953–1956 гг. он вместе с И. В. Курчатовым принимал активное участие в прикладных исследованиях в области газовой динамики. За эти работы в 1958 г. он одним из первых получил Ленинскую премию. В эти же годы он организовал экспедицию АН СССР на Камчатку и Курильские острова для выявления перспектив использования геотермальных вод. Большая загруженность оставляла мало времени для занятий математикой. Тем не менее в начале 50-х гг. им было опубликовано две статьи, касающиеся чисто математических проблем.

Первая из них, написанная совместно с его учеником А. В. Бицадзе, посвящена теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Михаил Алексеевич предложил исследовать вместо известного уравнения смешанного типа Ф. Трикоми $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ модельное уравнение $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$, названное впоследствии уравнением Лаврентьева — Бицадзе. Его решения обладают теми же принципиальными свойствами, что и решения уравнения Трикоми, но аппарат при этом существенно упрощается: становится возможным использовать методы теории аналитических функций в эллиптической части области и простое представление решения в гиперболической части.

В 1954 г. Михаил Алексеевич опубликовал небольшую заметку, которая оказала значительное влияние на развитие теории пространственных квазиконформных отображений. Хорошо известно, что в пространстве класс конформных отображений очень узок. Согласно теореме Лиувилля он сводится лишь к композициям сдвигов, поворотов, растяжений и инверсий. М. А. Лаврентьев сформулировал замечательное утверждение об устойчивости теоремы Лиувилля: *если характеристика p гладкого квазиконформного отображения единич-*

ного шара D в область $\Delta \subset D$ удовлетворяет неравенству $0 \leq p - 1 \leq \varepsilon$, то существует конформное отображение $L(A)$ такое, что

$$|F(A) - L(A)| \leq \mu(\varepsilon, \|F\|_{1,\alpha}, r) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

в любом шаре радиуса $r < 1$, концентрическом D. Эта работа послужила началом большого цикла исследований, выполненных П. П. Белинским, Ю. Г. Решетняком и другими авторами.

Кульминационным моментом в жизни Михаила Алексеевича стала организация Сибирского отделения Академии наук СССР. Начавшееся в середине 50-х гг. освоение Сибири, развитие в восточных районах промышленности и сельского хозяйства, строительство новых городов поставили перед наукой широкий диапазон задач, требовавших быстрого решения. Наиболее революционной идеей М. А. Лаврентьева как организатора науки была идея создания на востоке страны крупного научного центра. Он выдвинул ее вместе с С. Л. Соболевым и С. А. Христиановичем в 1957 г. Руководство страны одобрило замысел ученых и 18 мая 1957 г. было принято постановление об организации Сибирского отделения Академии наук СССР, М. А. Лаврентьев стал председателем СО АН СССР и вице-президентом АН СССР. Этот пост он занимал до 1975 г.

Сибирское отделение стало первым в СССР крупным комплексным центром, объединяющим и организационно, и территориально институты, работающие по различным направлениям фундаментальной науки. Отличительная черта созданных в Сибири научных школ во всех областях науки — математизация — сформировалась, несомненно, под влиянием Михаила Алексеевича. Несмотря на чрезвычайную нагрузку государственного деятеля, организатора науки Михаил Алексеевич продолжал ставить задачи и выдвигать гипотезы, относящиеся к широкому кругу научных дисциплин. В конце 50-х — начале 60-х гг. М. А. Лаврентьев формировал основные направления научных исследований созданного им Института гидродинамики, ныне носящего его имя. Среди них математические проблемы занимали далеко не последнее место.

В 1962 г. он рассматривает вопрос об устойчивости отображений трехмерных областей, близких к конформным на каждой поверхности из некоторого семейства концентрических сфер. Его результат состоит в следующем: *если достаточно гладкое отображение единичной сферы переводит любую сферическую поверхность S радиуса r с центром в начале координат почти конформно в гладкую поверхность Γ (т. е. бесконечно малый круг на S переходит в бесконечно малый эллипс с отношением осей p, $0 \leq p - 1 \leq \varepsilon$) и прямые лучи, выходящие из начала координат, — в кривые, которые пересекают поверхности Γ под углом ϑ, близким к прямому: $|\pi/2 - \vartheta| < \varepsilon$, то отклонение Γ от S не превосходит $\mathrm{const}\, r\sqrt{\varepsilon}$.*

Согласно теореме Дарбу поверхность, все точки которой являются омбилическими, является либо куском сферы, либо куском плоскости. Поэтому сформулированное утверждение тесно связано с вопросом об устойчивости в теореме Дарбу. Эта задача служила предметом исследований многих математиков.

В 1962–1967 гг. Михаилом Алексеевичем заложены основы теории отображений пространственных областей, соответствующих системам уравнений с частными производными. Следует отметить, что между квазиконформными отображениями многомерных евклидовых пространств и теорией дифференциальных уравнений нет той тесной связи, которая характерна для плоского случая. М. А. Лаврентьев выделил три класса отображений трехмерных областей $D \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, которые он называл гармоническими.

К первому классу относятся отображения $u(x)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ с «минимальным искажением в среднем», которые определяются как экстремали интегрального функционала

$$J = \int\limits_D \Big\{ \sum_{1 \le i \le 3} |\nabla u_i|^3 \Big\}\, dx.$$

Они служат решениями некоторой эллиптической системы дифференциальных уравнений, которая может рассматриваться как трехмерный аналог p-лапласиана. В 1962 г. Михаил Алексеевич сформулировал ряд гипотез об отображениях этого класса, которые, как нам известно, до сих пор не доказаны. Сформулируем одну из них. Пусть область D содержит начало координат и обладает гладкой границей Γ, причем объем D равен $4\pi/3$, а площадь Γ равна $4\pi + \alpha$, $\alpha \ge 0$. Пусть также $u = u(x)$ — отображение с минимальным искажением области D на единичный шар, которое переводит отмеченную точку $M \in D$ в центр шара, а $J_0(M)$ — соответствующее экстремальное значение J. При этих обозначениях требуется найти область D_0, для которой $\sup\limits_M J_0(M)$ достигал бы наименьшего значения. Гипотеза состоит в том, что граница экстремальной области D_0 представляет собой эллипсоид вращения, а экстремальное отображение есть аффинное преобразование.

Ко второму классу гармонических отображений относятся отображения $u = u(x)$, удовлетворяющие системе из четырех дифференциальных уравнений

$$\mathrm{rot} u = 0, \quad \mathrm{div}\, u = 0.$$

Для них справедливы многие теоремы теории функций комплексного переменного. Вопрос о существовании гармонических отображений заданных областей был впервые поставлен М. А. Лаврентьевым в 1967 г. Им сформулирован ряд гипотез о существовании гармонических отображений односвязных областей.

Третий класс отображений трехмерных областей, рассмотренный М. А. Лаврентьевым, связан с системами дифференциальных уравнений вида

$$\nabla u_1 = \lambda(|\nabla u_1|)\nabla u_2 \times \nabla u_3,$$

допускающих простую гидродинамическую интерпретацию. Функция u_1 служит потенциалом течения баротропной жидкости и удовлетворяет эллиптическому уравнению $\mathrm{div}(\lambda^{-1}(|\nabla u_1|)\nabla u_1) = 0$. Компоненты u_2, u_3 постоянны на траекториях динамической системы $\dot{x} = \nabla u_1(x)$ и, следовательно, служат функциями тока. Отображения такого типа оказались полезными при исследовании пространственных течений со свободными границами.

Работы М. А. Лаврентьева по теории пространственных квазиконформных отображений во многом опережали свое время. Решение некоторых из поставленных им задач было получено с помощью математической техники, разработанной в основном в более позднее время. Теория пространственных квазиконформных отображений в настоящее время представляет собой обширное направление теории функций, являющееся предметом большого числа исследований. Идеи Михаила Алексеевича имеют фундаментальное значение для данного направления математики.

С начала 60-х гг. М. А. Лаврентьев уделял большое внимание изучению динамики вихрей, имея в виду проблемы описания движения облака ядерного взрыва и захоронения радиоактивных отходов в глубоководных впадинах. Им была предложена интересная математическая модель для описания циркуляции жидкости в придонных слоях. Если профиль дна задается уравнением $y = F(x)$, то поле скоростей $\vec{v}(x, y)$ определяется как решение уравнений

$$\vec{v} = (u_y, -u_x), \quad \Delta u + \frac{\omega}{2}(\operatorname{sgn} u - 1) = 0 \quad \text{при} \quad y > F(x),$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = F(x), \quad \vec{v}(x, y) \to (1, 0) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \to \infty,$$

в которых завихренность ω является положительной постоянной.

Следует отметить, что эта задача всегда допускает «тривиальное» решение с гармонической функцией $u \geq 0$. Михаил Алексеевич выдвинул гипотезу о том, что при подходящем выборе ω она имеет нетривиальное решение. При этом зоны завихренности, в которых $u < 0$, локализованы в окрестности границы. Для ограниченных областей существование решений подобной задачи было установлено другими авторами. В первоначальной постановке М. А. Лаврентьева она остается нерешенной до сих пор.

Михаил Алексеевич живо интересовался вопросами построения математических моделей природных явлений. Целый ряд интересных гипотез был высказан им об особенностях распространения волн цунами, о новороссийской боре, о способах движения ужей и рыб, о механизме образования ветровых волн, о гашении этих волн дождем и т. д. Особое его внимание привлекали физические процессы, сопровождающиеся концентрацией энергии.

Обзор научных работ Михаила Алексеевича был бы неполон без упоминания о написанных им монографиях и учебниках.

М. А. Лаврентьевым в соавторстве с Л. А. Люстерником написаны два курса вариационного исчисления. Первый из них «Основы вариационного исчисления» был задуман как как фундаментальное руководство, отражающее тогдашнее состояние предмета. К сожалению, этому замыслу не суждено было осуществиться: в 1935 г. вышел первый том книги в двух частях, а второй том так и не был написан. Зато двумя изданиями (в 1938 и 1950 гг.) вышел более элементарный «Курс вариационного исчисления».

В 1946 г. вышла в свет небольшая монография М. А. Лаврентьева «Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики». Живо и ясно написанная, она до сих пор служит хорошим введением в геометрическую теорию функций комплексного переменного. В 1962 г. Издательство АН СССР выпустило в свет монографию «Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа».

Несколько поколений студентов училось по книге М. А. Лаврентьева (соавтор Б. В. Шабат) «Методы теории функций комплексного переменного», которая начиная с 1951 г. выдержала рад переизданий и была переведена на немецкий, французский, китайский и вьетнамский языки. Была хорошо встречена читателями и его книга «Проблемы гидродинамики и их математические модели» (также в соавторстве с Б. В. Шабатом), выдержавшая два издания и переведенная на французский язык.

Михаил Алексеевич написал ряд обзоров по различным вопросам комплексного анализа. Несколько его работ посвящено истории науки, например, статьи, посвященные Л. Эйлеру и А. Н. Крылову.

Важной частью жизни Михаила Алексеевича была государственная и общественная деятельность. Более двадцати лет он был депутатом Верховного Совета СССР, около четверти века — бессменным членом Президиума АН СССР, в последние годы жизни возглавлял Советский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, а с 1975 г. был почетным председателем Сибирского отделения АН СССР.

Много сделал М. А. Лаврентьев для расширения международного сотрудничества. На протяжении восьми лет он состоял в руководстве Международного математического союза, а в 1966–1970 гг. был его вице-президентом. Свидетельством его авторитета в мировом научном сообществе служит избрание его членом восьми зарубежных академий.

Научные достижения М. А. Лаврентьева отмечены Государственными и Ленинской премиями, золотой медалью АН ССР им. М. В. Ломоносова (1978 г.). В 1967 г. за выдающиеся заслуги в развитии науки и организацию Сибирского отделения АН СССР ему присвоено звание Героя Социалистического труда.

15 октября 1980 г. Михаила Алексеевича Лаврентьева не стало. Люди такого масштаба, отдавшие себя служению отечеству, надолго остаются в памяти поколений. Имя М. А. Лаврентьева носят улицы в Москве и Казани, проспект в Новосибирском академгородке, Институт гидродинамики СО РАН, физико-математическая школа при Новосибирском госуниверситете, научно-исследовательское судно. Учреждена премия РАН им. М. А. Лаврентьева, которая присуждается за лучшие работы в области математики и механики. Проводятся международные конференции «Лаврентьевские чтения».

Самая же лучшая память о Михаиле Алексеевиче Лаврентьеве — продолжающее жить и развиваться его дело: созданные им академические центры, научные школы в разных концах страны, идущая в науку молодежь.

М. М. Лаврентьев, В. Л. Береснев, А. А. Боровков,
С. К. Годунов, С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, С. С. Кутателадзе,
П. И. Плотников, Ю. Г. Решетняк, В. Г. Романов