Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.983.51+517.982.4

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР–ФУНКЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. В. Фалалеев

Аннотация: Известное в классической теории понятие фундаментального решения дифференциального оператора распространяется на вырожденные дифференциальные операторы с постоянными операторными коэффициентами в банаховых пространствах, а также на интегральные операторы с ядром типа свертки. Построенная конструкция позволяет для задач Коши строить обобщенные решения, анализируя вид которых можно выписать условия на начальные данные и правые части, обеспечивающие разрешимость таких задач в классе непрерывных функций. Выписан явный вид фундаментальных решений операторов

$$B\frac{d^N}{dt^N} - A, \quad B\frac{d^2}{dt^2} - A_1\frac{d}{dt} - A_0, \quad B - \int_0^t k(t-s)\,ds,$$

где B фредгольмов, при этом используется конструкция оператора Шмидта Γ и жордановы цепочки оператора B относительно операторов $A; A_1$ и $A_0; k(t)$ соответственно. Библиогр. 17.

Введение

Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной уже много лет вызывают к себе пристальный интерес. Это обусловлено, во-первых, тем, что целый ряд начально-краевых задач прикладного характера допускает редукцию к ним, а во-вторых, этот объект сам по себе очень интересен для исследования. Поэтому к настоящему времени сформировалось несколько подходов к изучению данной проблемы. Не ставя себе цели дать полный обзор всех имеющихся направлений, отметим глубокие результаты, связанные с построением *непрерывных* решений и полученные в разное время С. Г. Крейном [1], Н. А. Сидоровым [2], В. К. Ивановым, И. В. Мельниковой [3] и др. К последним наиболее глубоким в данном направлении работам относятся результаты Г. А. Свиридюка [4] по теории полугрупп с ядрами. Однако хорошо известно, что дифференциальные уравнения с нётеровым оператором при главной части имеют классические (непрерывные) решения лишь при жестких условиях согласования начальных данных и свободной функции [2]. Поэтому представляется интересным построение решений таких уравнений в классе распределений. По-видимому, первые строгие результаты в этом направлении были получены для интегродифференциальных уравнений в электротехнике [5]. В работах С. Т. Завалищина, например [6], дан способ построения обобщенных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной. Этот метод нашел широкое применение в теории и приложениях [7]. К сожалению, он не допускает прямого обобщения на дифференциальные уравнения с частными производными. Поэтому возникает потребность разработать метод построения обобщенных решений непосредственно для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В связи с этим в работе [2] строились псевдорешения дифференциальных уравнений при условии, что оператор B (при производной) не имеет A-присоединенных элементов [8]. В работах [9, 10] рассмотрен случай, когда оператор $B - \lambda A$ непрерывно обратим в некоторой окрестности $0 < |\lambda| < \epsilon$, построены решения задач Коши в классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем. Полное же решение вопроса о построении обобщенных решений дифференциальных уравнений с вырождением на основе [9] возможно с помощью построения фундаментального оператора дифференциального выражения. В данной работе построены фундаментальные операторы для сингулярных дифференциальных операторов 1-го, 2-го и N-го порядков, для интегрального оператора типа свертки, а также в замкнутой форме решения соответствующих дифференциальных уравнений в классе распределений.

Некоторые вспомогательные сведения об обобщенных функциях конечного порядка

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точки этого пространства. Отнесем к *множеству основных функций* $K^l(\mathbb{R}^n)$ [11] все финитные функции класса C^l. Эти функции будем обозначать через $\varphi(x)$. *Носителем* $\operatorname{supp}\varphi(x)$ функции $\varphi(x)$ называется замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества тех точек x, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Сходимость в $K^l(\mathbb{R}^n)$ определяют следующим образом.

Определение [11]. Последовательность функций $\varphi_n(x)$ из $K^l(\mathbb{R}^n)$ *сходится* к функции $\varphi(x) \in K^l(\mathbb{R}^n)$, если

а) существует $R > 0$ такое, что $\operatorname{supp}\varphi_n(x) \subset U_R$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где U_R — шар радиуса R с центром в нуле;

б) $D^\alpha\varphi_n(x) \Longrightarrow D^\alpha\varphi(x)$ при $n \longrightarrow \infty$ для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $0 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq l$.

Линейное множество $K^l(\mathbb{R}^n)$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством основных функций* $K^l(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что при $l \geq p$ справедливо включение $K^l(\mathbb{R}^n) \subset K^p(\mathbb{R}^n)$ и операция дифференцирования $D^\beta\varphi(x)$ при $|\beta| \leq l$ непрерывна из $K^l(\mathbb{R}^n)$ в $K^{l-|\beta|}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1. Множество пространств $K^l(\mathbb{R}^n)$ по параметру $l = 1, 2, \dots$ образуют шкалу вложенных пространств [12], которая в дальнейшем будет использована для построения соответствующей шкалы пространств обобщенных функций конечного порядка. Именно в этой естественной шкале и строятся обобщенные решения вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Обобщенной функцией конечного порядка l называется всякий линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве $K^l(\mathbb{R}^n)$. Совокупность таких обобщенных функций, представляющую собой линейное полное топологическое пространство со слабой сходимостью, обозначают через $(K^l)'(\mathbb{R}^n)$. Носитель обобщенной функции, равенство двух обобщенных функций, сингулярная и регулярная обобщенные функции, сумма обобщенных функций, произведение обобщенной функции на число определяются обычным образом [11; 13, с. 89, 92–98].

Пусть $a(x) \in C^l(\mathbb{R}^n)$ и $f(x) \in (K^l)'(\mathbb{R}^n)$. *Произведением* обобщенной функции $f(x)$ и функции $a(x)$ называется обобщенная функция, определяемая соотношением

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\varphi(x)) \quad \forall \varphi(x) \in K^l(\mathbb{R}^n).$$

Соответственно *производной* D^α от обобщенной функции $f(x) \in (K^l)'(\mathbb{R}^n)$ называется обобщенная функция $D^\alpha f(x) \in (K^{l+|\alpha|})'(\mathbb{R}^n)$, определяемая равенством

$$(D^\alpha f(x), \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|}(f(x), D^\alpha \varphi(x)) \quad \forall \varphi(x) \in K^{l+|\alpha|}(\mathbb{R}^n).$$

Если $f(x) \in (K^l)'(\mathbb{R}^n)$ и $g(x) \in (K^p)'(\mathbb{R}^n)$, где $p \le l$, то $f(x) + g(x) \in (K^l)'(\mathbb{R}^n)$.

Если $a(x) \in C^{l+1}(\mathbb{R}^n)$ и $f(x) \in (K^l)'(\mathbb{R}^n)$, то для производной $\frac{\partial}{\partial x_\imath}(a(x)f(x)) \in (K^{l+1})'(\mathbb{R}^n)$ справедливо представление

$$\frac{\partial}{\partial x_\imath}(a(x)f(x)) = \frac{\partial a(x)}{\partial x_\imath} \cdot f(x) + a(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\imath},$$

проверяемое обычными выкладками [13, с. 106].

Пусть $f(x) \in (K^l)'(\mathbb{R}^n)$ и $g(y) \in (K^p)'(\mathbb{R}^m)$. *Прямым произведением* этих обобщенных функций называется функция $f(x) \cdot g(y) \in (K^{l+p})'(\mathbb{R}^{n+m})$, определяемая равенством

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))) \quad \forall \varphi(x,y) \in K^{l+p}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Корректность этого определения вытекает из следующей леммы, которая доказывается точно так же, как соответствующее утверждение в [13, с. 126–129].

Лемма 1. *Для любых $g(y) \in (K^p)'(\mathbb{R}^m)$ и $\varphi(x,y) \in K^{l+p}(\mathbb{R}^{n+m})$ справедливы следующие утверждения:*

а) $\psi(x) = (g(y), \varphi(x,y)) \in K^l(\mathbb{R}^n)$;

б) $D^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x,y))$ *для всех* α *таких, что* $|\alpha| \le l$;

в) *если* $\varphi_k(x,y) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *в* $K^{l+p}(\mathbb{R}^{n+m})$, *то* $\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x,y)) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *в* $K^l(\mathbb{R}^n)$.

Введенная операция прямого произведения обладает свойствами линейности и непрерывности по каждому множителю, ассоциативности, коммутативности, которые доказываются так же, как в [13, с. 130–131]. Аналогично [13, с. 131–132] можно доказать формулы дифференцирования и умножения прямого произведения.

Пусть обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$ из $(K^l)'(\mathbb{R}^n)$ таковы, что их прямое произведение $f(x) \cdot g(y)$ допускает продолжение на множество функций вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi(x) \in K^{2l}(\mathbb{R}^n)$, в следующем смысле: какова бы ни была последовательность функций $\eta_k(x,y) \in K^{2l}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$ [13, с. 133], существует предел числовой последовательности:

$$\lim_{k \to \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)),$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k(x,y)\}$.

Сверткой $f(x) * g(x)$ таких обобщенных функций называется функционал

$$(f(x) * g(x), \varphi(x)) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) \quad \forall \varphi(x) \in K^{2l}(\mathbb{R}^n).$$

Свертка существует, если одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ финитна или если $f(t), g(t) \in (K_+^p)'(\mathbb{R}^1)$, т. е. $f(t)$ и $g(t)$ обращаются в нуль при $t < 0$. В последнем случае свертка обладает свойством ассоциативности [13, с. 141].

Обобщенные функции конечного порядка в банаховых пространствах

Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное банахово пространство. Отнесем к множеству *основных функций* $K^l(E^*)$ все финитные функции класса C^l со значениями в E^*. Обозначать эти функции будем через $s(t)$. *Носителем* $\operatorname{supp} s(t)$ основной функции $s(t)$ назовем замыкание в $\mathbb{R}^1$ множества тех точек t, для которых $s(t) \neq 0$. Основное множество $K^l(E^*)$ является векторным пространством. Чтобы это пространство было топологическим, определим в нем сходимость следующим образом.

Определение. Последовательность функций $s_n(t)$ из $K^l(E^*)$ *сходится* к функции $s(t) \in K^l(E^*)$, если

а) существует $R > 0$ такое, что $\operatorname{supp} s_n(t) \subset [-R; R]$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

б) для любого $\alpha = 0, 1, \dots, l$ имеет место сходимость $\left\| s_n^{(\alpha)}(t) - s^{(\alpha)}(t) \right\| \Longrightarrow 0$ равномерно по $t \in [-R; R]$ при $n \to \infty$.

Множество $K^l(E^*)$ с введенной в нем сходимостью назовем *основным пространством.* Отметим, что $K^l(E^*) \subset K^p(E^*)$ при $l \geq p$, операция дифференцирования $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ при $\alpha = 1, \dots, l$ непрерывна из $K^l(E^*)$ в $K^{l-\alpha}(E^*)$. *Обобщенной функцией конечного порядка* l называется всякий линейный непрерывный функционал на $K^l(E^*)$. Сходимость в множестве обобщенных функций определим как слабую. Носитель, равенство двух обобщенных функций, сложение и умножение на число обобщенных функций определим обычным образом. Локально интегрируемая по Бохнеру функция $u(t)$ со значениями в E порождает *регулярную* обобщенную функцию по правилу

$$(u(t), s(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u(t), s(t) \rangle \, dt \quad \forall s(t) \in K^l(E^*).$$

Все остальные обобщенные функции назовем *сингулярными.*

Из всего множества обобщенных функций $\left(K^l\right)'(E)$ выделим специальный класс $\left(K^l_+\right)'(E)$ обобщенных функций, носители которых ограничены слева нулем. Таковыми будут, например, функции вида $u(t)g(t)$, где $u(t) \in C^l(E)$, $g(t) \in \left(K^l_+\right)'(\mathbb{R}^1)$ или $u(t) \in C^l_+(E)$, $g(t) \in (K^l)'(\mathbb{R}^1)$, действующие по правилу

$$(u(t)g(t), s(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (g(t), \langle u(t), s(t) \rangle) \quad \forall s(t) \in K^l(E^*).$$

Очевидно, справедливо включение $\left(K^l_+\right)'(E) \supset \left(K^p_+\right)'(E)$ при $l \geq p$.

Обобщенные оператор-функции и их свертки с обобщенными функциями конечного порядка в банаховых пространствах

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $\mathscr{K}(t) \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса C^l, причем $\mathscr{K}^*(t) \in \mathscr{L}(E_2^*; E_1^*)$ существует при почти всех $t, f(t) \in (K^l_+)'(\mathbb{R}^1)$. Тогда формальный символ $\mathscr{K}(t)f(t)$ назовем *обобщенной оператор-функцией* порядка l. *Сверткой* обобщенной оператор-функции $\mathscr{K}(t)f(t)$ и обобщенной функции $v(t) \in (K^l_+)'(E_1)$ назовем обобщенную функцию $\mathscr{K}(t)f(t) * v(t) \in (K^{2l}_+)(E_2)$, действующую по формуле

$$(\mathscr{K}(t)f(t) * v(t), s(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (f(t), (v(\tau), \mathscr{K}^*(t)s(t+\tau))) \quad \forall s(t) \in K^{2l}(E_2^*).$$

В частности, если $v(t) = u(t)g(t)$, где $u(t) \in C^l(E_1)$, $g(t) \in \left(K_+^l\right)'(\mathbb{R}^1)$, $u(t) \in D(\mathscr{K}(\cdot))$, то

$$(\mathscr{K}(t)f(t) * u(t)g(t), s(t)) = (f(t), (u(\tau)g(\tau), \mathscr{K}^*(t)s(t+\tau))) \\ = (f(t), (g(\tau), \langle \mathscr{K}(t)u(\tau), s(t+\tau)\rangle)).$$

Отсюда получаем следующие равенства:

$$\mathscr{K}(t)\theta(t) * u(t)\theta(t) = \left(\int_0^t \mathscr{K}(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)\theta(t), \quad u(t) \in D(\mathscr{K}(\cdot));$$

$$\mathscr{K}(t)\theta(t) * a\delta^{(\imath)}(t) = \mathscr{K}^{(\imath)}(t)a\theta(t) + \mathscr{K}^{(\imath-1)}(0)a\delta(t) \\ + \mathscr{K}^{(\imath-2)}(0)a\delta'(t) + \dots + \mathscr{K}(0)a\delta^{(\imath-1)}(t), \quad \imath \le l;$$

$$A\delta^{(\imath)}(t) * u(t)\theta(t) = Au^{(\imath)}(t)\theta(t) + Au^{(\imath-1)}(0)\delta(t) \\ + Au^{(\imath-2)}(0)\delta'(t) + \dots + Au(0)\delta^{(\imath-1)}(t), \quad \imath \le l, \quad u(t) \in D(A);$$

$$Bf(t) * ag(t) = Ba(f(t) * g(t)), \quad a \in D(B);$$

$$(\mathscr{K}(t)f(t) * u(t)g(t))' = (\mathscr{K}'(t)f(t) + \mathscr{K}(t)f'(t)) * u(t)g(t) \\ = \mathscr{K}(t)f(t) * (u(t)g(t))' = \mathscr{K}(t)f(t) * (u'(t)g(t) + u(t)g'(t)),$$

если $l \ge 1$, $g(t), f(t) \in \left(K_+^l\right)'(\mathbb{R}^1)$, а $\mathscr{K}(t) \in C^{l+1}$, $u(t) \in C^l(E_1)$ или $\mathscr{K}(t) \in C^l$, $u(t) \in C^{l+1}(E_1)$ соответственно и $u(t) \in D(\mathscr{K}(\cdot))$;

$$\mathscr{H}(t)\theta(t) * \mathscr{K}(t)\theta(t) * u(t) = (\mathscr{H}(t) * \mathscr{K}(t))\theta(t) * u(t), \quad R(\mathscr{K}(\cdot)) \subset D(\mathscr{H})(\cdot);$$

$$A\delta^{(\imath)}(t) * \mathscr{K}(t)f(t) * u(t) = (A\mathscr{K}(t)f(t))^{(\imath)} * u(t), \quad R(\mathscr{K}(\cdot)) \subset D(A);$$

$$\mathscr{K}(t)f(t) * A\delta^{(\imath)}(t) * u(t) = (\mathscr{K}(t)Af(t))^{(\imath)} * u(t), \quad R(A) \subset D(\mathscr{K})(\cdot).$$

Замечание 2. Аналогичное определение свертки, когда $f(t) \equiv 1$ — регулярная обобщенная функция и в качестве основного пространства выбрано $K(E^*)$, введено в работе [14].

Фундаментальные оператор-функции дифференциальных операторов с постоянными операторными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathscr{L}\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + A_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + A_1\frac{d}{dt} + A_0,$$

где $A_\imath$ — замкнутые линейные операторы, $\overline{\bigcap_{\imath=1}^n D(A_\imath)} = E$. Если $u(t) \in C^n(E)$, то задачу Коши

$$\mathscr{L}\left(\frac{d}{dt}\right)u = f(t), \quad u^{(\imath)}(0) = u_\imath, \quad \imath = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $f(t) \in C(E)$, можно переписать в обобщенных функциях [13, с. 221] как сверточное уравнение относительно $u(t) \in \left(K_+^l\right)'(E)$:

$$\mathscr{L}(\delta(t)) * u(t) = (I\delta^{(n)}(t) + A_{n-1}\delta^{(n-1)}(t) + \dots + A_1\delta'(t) + A_0\delta(t)) * u(t) = g(t),$$

где $g(t) = f(t)\theta(t) \in \left(K_+^{n+l}\right)'(E)$, $l \geq 0$.

Аналогично интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода с ядром $k(t)$ типа свертки допускает сверточное представление относительно $u(t) \in (K_+^l)'(E)$:

$$(I\delta(t) - k(t)\theta(t)) * u(t) = h(t),$$

$h(t) \in \left(K_+^l\right)'(E)$, $l \geq 0$.

Фундаментальной оператор-функцией порядка p дифференциального оператора $\mathscr{L}\left(\frac{d}{dt}\right)$ n-го порядка на классе $\left(K_+^l\right)'(E)$ называется такая обобщенная оператор-функция $\mathscr{E}(t)$ порядка p, что для всех $u(t) \in \left(K_+^l\right)'(E)$ на основном пространстве $K^{l+p+n}(E^*)$ справедливо равенство

$$\mathscr{L}(\delta(t)) * \mathscr{E}(t) * u(t) = u(t).$$

Пример 1. Для оператора $(I\delta'(t) - A\delta(t))$ с ограниченным оператором A фундаментальной оператор-функцией на классе $(K_+^0)'(E)$ является обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathscr{E}(t) = e^{At}\theta(t)$.

Действительно, для всех $u(t) \in \left(K_+^0\right)'(E)$ в соответствии со свойствами тройной свертки имеем

$$\begin{aligned}(I\delta'(t) - A\delta(t)) * e^{At}\theta(t) * u(t) &= I\delta'(t) * e^{At}\theta(t) * u(t) - A\delta(t) * e^{At}\theta(t) * u(t)\\ &= (Ae^{At}\theta(t) + I\delta(t)) * u(t) - Ae^{At}\theta(t) * u(t) = I\delta(t) * u(t) = u(t).\end{aligned}$$

Пример 2. Для оператора $(I\delta''(t) - A\delta(t))$, если A ограничен, фундаментальной оператор-функцией на классе $(K_+^0)'(E)$ будет обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathscr{E}(t) = \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}\theta(t)$.

Пример 3. Для оператора $(I\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ с ограниченным оператором A фундаментальной оператор-функцией на классе $\left(K_+^0\right)'(E)$ является обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathscr{E}(t) = \mathscr{U}(At)\theta(t)$, где $\mathscr{U}(t) \equiv \sum\limits_{i=1}^{\infty} A^{i-1}\frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}$.

Пример 4. Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathscr{L}_2 \equiv I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)$ где A_1, A_0 — ограниченные операторы, $D(A_0) = D(A_1) = E$. Пусть $P(t) = \exp\left(\frac{A_1}{2}t\right)$, $K = \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 + A_0$, $\mathscr{R}(t)$ — резольвента ядра $tP(t)K$. Тогда оператор-функция $\mathscr{E}(t) = (I\delta(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t)) * tP(t)\theta(t)$ является фундаментальной на классе $\left(K_+^0\right)'(E)$ для дифференциального оператора $\mathscr{L}_2$.

Действительно, поскольку $\mathscr{R}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathscr{R}''(t) = A_1\mathscr{R}'(t) + A_0\mathscr{R}(t)$$

с начальными условиями

$$\mathscr{R}(0) = 0, \quad \mathscr{R}'(0) = K,$$

то для всех $u(t) \in \left(K_+^0\right)'(E)$ имеем

$$(I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)) * \mathscr{E}(t) * u(t)$$

$$= (I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)) * (I\delta(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t)) * tP(t)\theta(t) * u(t)$$
$$= (I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) + \mathscr{R}''(t)\theta(t) + \mathscr{R}'(0)\delta(t) + \mathscr{R}(0)\delta'(t)$$
$$- A_1\mathscr{R}'(t)\theta(t) - A_1\mathscr{R}(0)\delta(t) - A_0\mathscr{R}(t)\theta(t)) * tP(t)\theta(t) * u(t)$$
$$= (I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) + (\mathscr{R}''(t) - A_1\mathscr{R}'(t) - A_0\mathscr{R}(t))\theta(t)$$
$$+ K\delta(t)) * tP(t)\theta(t) * u(t) = \left(I\delta''(t) - A_1\delta'(t) + \left(\frac{A_1}{2}\right)^2\delta(t)\right) * tP(t)\theta(t) * u(t)$$
$$= \left(\left(A_1P(t) + \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 tP(t)\right)\theta(t) + I\delta(t) - \left(A_1P(t) + \frac{A_1^2}{2}tP(t)\right)\theta(t)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 tP(t)\theta(t)\right) * u(t) = I\delta(t) * u(t) = u(t).$$

Пример 5. Для сверточного интегрального оператора $(I\delta(t) - k(t)\theta(t))$ фундаментальной оператор-функцией является обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathscr{E}(t) = I\delta(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t)$, здесь $\mathscr{R}(t)$ — резольвента ядра $k(t)$,

$$\mathscr{R}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{k(t) * k(t) * \dots * k(t)}_{n \text{ раз}}.$$

Действительно для всех $u(t) \in \left(K_+^0\right)'(E)$ имеем

$$(I\delta(t) - k(t)\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t)) * u(t) = u(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t) * u(t)$$
$$- k(t)\theta(t) * u(t) - (k(t) * \mathscr{R}(t))\theta(t) * u(t) = u(t).$$

Утверждение 1. *Если $\mathscr{E}(t)$ — фундаментальная оператор-функция порядка p дифференциального оператора $\mathscr{L}\left(\frac{d}{dt}\right)$ на классе $\left(K_+^l\right)'(E)$ и существует свертка $\mathscr{E}(t)$ с обобщенной функцией $g(t) \in \left(K_+^l\right)'(E)$, то обобщенная функция $u(t) = \mathscr{E}(t) * g(t) \in \left(K_+^{l+p}\right)'(E)$ на основном пространстве $K^{l+p+n}(E^*)$ удовлетворяет сверточному уравнению $\mathscr{L}(\delta(t)) * u(t) = g(t)$.*

Замечание 3. Аналогичное утверждение справедливо и для сверточного интегрального оператора.

Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов

Теорема 1. *Если A, B — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, B фредгольмов, $\overline{R(B)} = R(B)$, B имеет полный A-жорданов набор $\left\{\varphi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\right\}$ [8, с. 424–426], то дифференциальный оператор первого порядка $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на классе $\left(K_+^l\right)'(E_2)$ $\forall l \in \mathbb{N}$ имеет фундаментальную оператор-функцию порядка $p-1$ вида*

$$\mathscr{E}_1(t) = \Gamma e^{A\Gamma t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right],$$

где $p = \max(p_i, i = \overline{1,n})$, $\{\psi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\}$, A^* *— жорданов набор оператора* B^*, Γ *— оператор Шмидта* [8, с. 340].

Доказательство. В соответствии с определением необходимо проверить справедливость равенства

$$(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) = u(t)$$

на основном пространстве $K^{l+p}(E_2^*)$. Подставим в левую часть этого равенства выражение для $\mathscr{E}_1(t)$:

$$\begin{aligned}
(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) &= B\delta'(t) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) - A\delta(t) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) \\
&= \Bigg(B\Gamma A\Gamma e^{A\Gamma t}\Bigg[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Bigg]\theta(t) \\
&\quad + B\Gamma\Bigg[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Bigg]\delta(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Bigg\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Bigg\}\delta^{(k+1)}(t)\Bigg] \\
&\quad - A\Gamma e^{A\Gamma t}\Bigg[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Bigg]\theta(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Bigg\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Bigg\}\delta^{(k)}(t)\Bigg]\Bigg) * u(t).
\end{aligned}$$

Поскольку $B\varphi_i^{(1)} = 0$, $B\Gamma = I - \sum\limits_{i=1}^{n}\langle\cdot,\psi_i^{(1)}\rangle z_i$, $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}$, а элементы $\varphi_i^{(j)}$ удовлетворяют равенствам $B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}$ [8, с. 424], то

$$\begin{aligned}
(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) &= \Bigg(-\sum_{i=1}^{n}\big\langle A\Gamma e^{A\Gamma t}\cdot,\psi_i^{(1)}\big\rangle z_i\theta(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\big\rangle\big\langle A\Gamma e^{A\Gamma t}A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_i\big\rangle z_i\theta(t) + I\delta(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\big\langle\cdot,\psi_i^{(1)}\big\rangle z_i\delta(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\big\rangle\big\langle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_i\big\rangle z_i\delta(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{k=0}^{p_i-2}\Bigg\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\big\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\big\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Bigg\}\delta^{(k+1)}(t)\Bigg] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{k=1}^{p_i-1}\Bigg\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Bigg\}\delta^{(k)}(t)\Bigg]\Bigg) * u(t)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) \\
&= \Bigg(\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\big\rangle\big\langle A\Gamma e^{A\Gamma t}A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_i\big\rangle - \langle A\Gamma e^{A\Gamma t}\cdot,\psi_i\rangle\Bigg\} z_i\theta(t)
\end{aligned}$$

$$+ I\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\big(B\varphi_i^{(p_i-k-j+2)} - A\varphi_i^{(p_i-k-j+1)}\big)\right\}\delta^{(k)}(t)\right]\Bigg) * u(t)$$
$$= I\delta(t) * u(t) = u(t).$$

Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то дифференциальный оператор* $(B\delta''(t) - A\delta(t))$ *на классе* $\big(K_+^l\big)'(E_2)$ *имеет фундаментальную оператор-функцию порядка* $2(p-1)$ *вида*

$$\mathscr{E}_2(t) = \Gamma\frac{\sin(\sqrt{A\Gamma}t)}{\sqrt{A\Gamma}}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(2k)}(t)\right].$$

Как следствие этих двух теорем и утверждения 1 получаем

Утверждение 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, $f(t) \in C(t \geq 0)$ *принимает значения в* E_2, *то задача Коши*

$$B\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0$$

имеет обобщенное решение класса $\big(K_+^{p-2}\big)'(E_1)$ *вида*

$$x_1 = \mathscr{E}_1(t) * (f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t)),$$

а задача Коши

$$B\ddot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$$

имеет обобщенное решение класса $(K_+^{2p-1})'(E_1)$ *вида*

$$x_2 = \mathscr{E}_2(t) * (f(t)\theta(t) + Bx_1\delta(t) + Bx_0\delta'(t)).$$

Замечание 4. Выполнив все тождественные преобразования, можно убедиться, что обобщенные решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совпадают с построенными в [9, 10] другим способом, причем обобщенные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, как легко убедиться, проанализировав доказательство теорем 1 и 2, являются обобщенными решениями своих задач Коши в классе $\big(K_+^\infty\big)'(E_1)$. Если дополнительно потребовать, чтобы сингулярные составляющие обобщенных решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ обратились в нуль, то, во-первых, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совпадут с непрерывными (классическими) решениями, а во-вторых, эти дополнительные условия опишут совокупность начальных условий и правых частей $f(t)$, при которых такие задачи разрешимы в классе функций $C^1(t \geq 0)$ и $C^2(t \geq 0)$ соответственно.

Естественным обобщением теорем 1 и 2 является

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то дифференциальный оператор* $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ *на классе* $\big(K_+^l\big)'(E_2)$ *имеет фундаментальную оператор-функцию порядка* $N(p-1)$ *вида*

$$\mathscr{E}_N(t) = \Gamma\mathscr{U}(A\Gamma t)\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(Nk)}(t)\right].$$

Замечание 5. Если $\overline{R(B)}\neq R(B)$, но при этом A — ограниченный оператор, то теоремы остаются справедливыми, необходимо только заменить в теореме 1 оператор-функцию $\Gamma e^{A\Gamma t}$ на $e^{\Gamma At}\Gamma$, в теореме 2 $\Gamma\frac{\sin(\sqrt{A\Gamma}t)}{\sqrt{A\Gamma}}$ на $\frac{\sin(\sqrt{\Gamma A}t)}{\sqrt{\Gamma A}}\Gamma$, а в теореме 3 $\Gamma\mathscr{U}(A\Gamma t)$ на $\mathscr{U}(\Gamma At)\Gamma$.

Пример 6. Пусть

$$E_1=\{u(x)|u(x)\in C^2[0;1],\ u(0)=u(1)=0\},$$

$$E_2=C[0;1],\quad B=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(n\pi)^2,\quad A=b\frac{\partial}{\partial x},\quad n\in\mathbb{N},\quad b\neq 0.$$

Тогда $\dim N(B)=\dim N(B^*)=1$,

$$\varphi^{(1)}=\sin n\pi x,\quad \varphi^{(2)}=\frac{b}{2}x\sin n\pi x,\quad \psi^{(1)}=\frac{8}{b^2}\sin n\pi x,$$

$$\psi^{(2)}=-\frac{4}{b}x\sin n\pi x,\quad z=A\varphi^{(2)},\quad p=2,$$

$$\Gamma\bullet=\frac{1}{n\pi}\int_0^x\sin n\pi(x-t)\bullet dt+\sin n\pi x\cdot\int_0^1\left(\frac{8}{b^2}-t^2-x^2\frac{1}{2(n\pi)^2}\right)\sin n\pi t\bullet\, dt$$

$$+\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\cdot\int_0^1(t-1)\cos n\pi t\bullet dt+\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\cdot\int_0^1\sin n\pi t\bullet\, dt.$$

Рассмотрим две начально-краевые задачи

$$B\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=Au(x,t)+f(x,t),\quad t\geq 0,\quad x\in[0;1],$$

$$u|_{t=0}=\alpha(x),\quad \alpha(0)=\alpha(1)=0,\quad u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,$$

$$u(x,t)\in C^2\{x\in[0;1]\}\cap C^1\{t\geq 0\},\quad f(x,t)\in C\{x\in[0;1]\}\cap C\{t\geq 0\}$$

и

$$B\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=Au(x,t)+f(x,t),\quad t\geq 0,\quad x\in[0;1],$$

$$u|_{t=0}=\alpha(x),\quad \alpha(0)=\alpha(1)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\beta(x),\qquad u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,$$

$$u(x,t)\in C^2\{x\in[0;1]\}\cap C^2\{t\geq 0\},\quad f(x,t)\in C\{x\in[0;1]\}\cap C\{t\geq 0\}.$$

Эти две задачи допускают редукцию к задачам Коши из утверждения 2, поэтому в соответствии с полученными формулами можно получить обобщенные или непрерывные (при дополнительных условиях) решения сформулированных задач.

Эти результаты были представлены на Всероссийской конференции в Екатеринбурге в 1998 г. [15] и на Международной конференции в Новосибирске в 1999 г. [16].

Фундаментальные оператор-функции вырожденных интегральных и полных дифференциальных операторов 2-го порядка

В этом пункте нам потребуются некоторые сведения об обобщенных жордановых наборах.

Пусть выполнено условие

1) $D, k(t)$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(k)} = E_1$, $D(k)$ не зависит от t, $D(B) \subset D(k)$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $k(t)$ — сильно непрерывная на $D(k)$ достаточно гладкая функция, B фредгольмов.

Определение. Элемент $\varphi \in N(B)$ имеет обобщенную жорданову цепочку длины p относительно оператор-функции $k(t)$, если существуют p элементов $\varphi^{(i)} \in E_1$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi^{(1)} = \varphi, \quad B\varphi^{(i)} = l_{i-1}(\varphi), \quad i = \overline{2, p},$$

где

$$l_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{i} k^{(i-j)}(0)\varphi^{(j)}, \quad i = \overline{1, p-1},$$

причем при $i = \overline{1, p-1}$, $j = \overline{1, n}$

$$\varphi^{(i+1)} = \Gamma l_i(\varphi), \quad \langle l_i(\varphi), \phi_j \rangle = 0$$

и хотя бы одно из чисел $\langle l_p(\varphi), \phi_j \rangle$, $j = \overline{1, n}$, отлично от нуля.

Пусть $\{\gamma_i,\ i = \overline{1, n}\} \in E_2$ — система биортогональных элементов к базису $\{\phi_i,\ i = \overline{1, n}\}$, ядра $N(B^*)$ [8]. В предположении, что пара $\{\varphi_i, \gamma_i\}$, $i = \overline{1, n}$, является биканонической [17], построим для элементов базиса ядра $N(B)$ обобщенные жордановы цепочки:

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i, \quad \varphi_i^{(k)} \in E_1, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p_i}, \quad p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n.$$

Справедливы соотношения

$$B\varphi_i^{(1)} = 0, \quad B\varphi_i^{(k)} = l_{k-1}(\varphi_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p_i};$$

$$\varphi_i^{(k)} = \Gamma l_{k-1}(\varphi_i), \quad i = \overline{1, n},\ k = \overline{2, p_i};$$

$$\langle l_k(\varphi_i), \phi_j \rangle = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p_i - 1};$$

$$\langle l_{p_i}(\varphi_i), \phi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad \langle l_{p_i+k}(\varphi_i), \phi_j \rangle = 0, \quad j \ne i,\ j > i.$$

Совокупность элементов $\varphi_i^{(k)} \in E_1$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p_i}$, называется *полным обобщенным жордановым набором* оператора B относительно оператор-функции $k(t)$.

Замечание 6. В этом случае [17] оператор B^* имеет полный обобщенный жорданов набор $\{\phi_i^{(k)}\}$ относительно оператор-функции $k^*(t)$ и

$$\phi_i^{(1)} = \phi_i, \quad \phi_i^{(k)} \in E_2^*, \quad i = \overline{1, n},\ k = \overline{1, p_i};$$

$$B^*\phi_i^{(1)} = 0, \quad B^*\phi_i^{(k)} = l_{k-1}^*(\phi_i), \quad i = \overline{1, n},\ k = \overline{2, p_i};$$

$$\phi_i^{(k)} = \Gamma^* l_{k-1}^*(\phi_i), \quad i = \overline{1, n},\ k = \overline{2, p_i},$$

здесь $l_i^*(\phi_i) = \sum\limits_{j=1}^{i} k^{*(i-j)}(0)\phi^{(j)}$.

Элементы φ_i и ϕ_j при $i = j$ имеют цепочки одинаковой длины, причем

$$z_i = l_{p_i}(\varphi_i), \quad \gamma_i = l_{p_i}^*(\phi_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть $\mathscr{R}(t)$ — резольвента ядра $k(t)\Gamma$. Введем проекторы $\mathscr{Q}_i = \langle\bullet, \phi_i\rangle z_i$, $i = \overline{1,n}$, $\mathscr{Q} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathscr{Q}_i$.

Лемма 2. *Если существует полный обобщенный жорданов набор оператора B относительно оператор-функции $k(t)$, то*

$$\mathscr{R}^{(k)}(0)z_i = l_{k+1}(\varphi_i), \quad i = \overline{1,n},\ k \geq 0;$$

$$\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(k)}(0)\mathscr{Q}_i = \mathscr{Q}_i\mathscr{R}^{(k)}(0)\mathscr{Q} = 0, \quad k < p_i - 1,$$

но

$$\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p_i-1)}(0)\mathscr{Q}_i = \mathscr{Q}_i\mathscr{R}^{(p_i-1)}(0)\mathscr{Q} = \mathscr{Q}_i.$$

Доказательство. При $k = 0$

$$\mathscr{R}(0)z_i = k(0)\Gamma z_i = k(0)\varphi_i^{(1)} = l_1(\varphi_i).$$

Индукцией по k получаем, что если $k > 0$, то

$$\mathscr{R}^{(k)}(0)z_i = \left(k^{(k)}(0)\Gamma + \sum_{j=0}^{k-1} k^{(k-1-j)}(0)\Gamma\mathscr{R}^{(j)}(0)\right)z_i$$
$$= k^{(k)}(0)\varphi_i^{(1)} + \sum_{j=0}^{k-1} k^{(k-1-j)}(0)\varphi_i^{(j+2)} = l_{k+1}(\varphi_i).$$

Отсюда

$$\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(k)}(0)\mathscr{Q}_i = \left(\sum_{j=1}^{n}\langle\bullet, \phi_j\rangle z_j\right) l_{k+1}(\varphi_i)\langle\bullet, \phi_i\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle l_{k+1}(\varphi_i), \phi_j\rangle z_j\langle\bullet, \phi_i\rangle$$

и в силу биканоничности пары $\{\varphi_i, \gamma_i\}$ получаем требуемое равенство. Аналогично доказывается другое равенство.

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Если операторы B и $k(t)$ удовлетворяют условию 1 и оператор B имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции $k(t)$, то сверточный интегральный оператор $(B\delta(t) - k(t)\theta(t))$ имеет на классе $\left(K_+^l\right)'(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию порядка p вида*

$$\mathscr{E}(t) = (\Gamma\delta(t) + \Gamma\mathscr{R}(t)\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathscr{N}(t)\theta(t))$$
$$* \left\{(I - \mathscr{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\bullet, \phi_i^{(j)}\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)\right\},$$

здесь $p = \max(p_i,\, i = \overline{1,n})$, $\mathscr{N}(t)$ — резольвента ядра $\sum\limits_{i=1}^{n}(-\mathscr{Q}_i\mathscr{R}^{(p_i)}(t)\theta(t))$.

Доказательство. Введем обозначение

$$F(t) = (I\delta(t) + \mathscr{N}(t)\theta(t)) * \left\{(I - \mathscr{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\bullet, \phi_i^{(j)}\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)\right\}.$$

Тогда для любой $u(t) \in \left(K_+^l\right)'(E_2)$

$$
\begin{aligned}
&(B\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \mathscr{E}(t) * u(t)\\
&\qquad = (B\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \Gamma\delta(t) * (I\delta(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t)\\
&\qquad = ((I - \mathscr{Q})\delta(t) - k(t)\Gamma\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t)\\
&\qquad = ((I\delta(t) - k(t)\Gamma\theta(t)) - \mathscr{Q}\delta(t)) * (I\delta(t) + \mathscr{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t)\\
&\qquad = (I\delta(t) - \mathscr{Q}\delta(t) - \mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t)\\
&\qquad = ((I - \mathscr{Q})\delta(t) - \mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t).
\end{aligned}
$$

Поскольку

$$(I - \mathscr{Q})\delta(t) * F(t) * u(t) = (I - \mathscr{Q})\delta(t) * u(t),$$

докажем равенство

$$-\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t) * F(t) * u(t) = \mathscr{Q}\delta(t) * u(t).$$

Предварительно, используя равенство $\mathscr{Q}_i\mathscr{R}^{(p_i-1)}(0)(I - \mathscr{Q}) = 0$, получим для $F(t)$ иное представление. Имеем

$$
\begin{aligned}
F(t) &= (I\delta(t) + \mathscr{N}(t)\theta(t)) * \left\{(I - \mathscr{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle \bullet, \phi_i^{(j)}\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t)\right\}\\
&= (I\delta(t) + \mathscr{N}(t)\theta(t)) * \left\{(I - \mathscr{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\left(\mathscr{Q}_i\delta^{(p_i)}(t)\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + \sum_{j=1}^{p_i}\mathscr{Q}_i\mathscr{R}^{(j-1)}(0)(I - \mathscr{Q})\delta^{(p_i-j)}(t)\right)\right\}\\
&= (I - \mathscr{Q})\delta(t) - (I\delta(t) + \mathscr{N}(t)\theta(t)) * \sum_{i=1}^{n}\mathscr{Q}_i\mathscr{R}^{(p_i)}(t)\theta(t) * (I - \mathscr{Q})\delta(t)\\
&\quad - (I\delta(t) + \mathscr{N}(t)\theta(t)) * \sum_{i=1}^{n}\left(\mathscr{Q}_i\delta^{(p_i)}(t) + \sum_{j=1}^{p_i}\mathscr{Q}_i\mathscr{R}^{(j-1)}(0)(I - \mathscr{Q})\delta^{(p_i-j)}(t)\right)\\
&= (I - \mathscr{Q})\delta(t) - (I\delta(t) + \mathscr{N}(t)\theta(t)) * \sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}_i\delta(t) + \mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I - \mathscr{Q})\theta(t))^{(p_i)}.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&-\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t) * F(t) * u(t)\\
&\quad = -\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t) * \left\{(I - \mathscr{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}_i\delta(t) + \mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I - \mathscr{Q})\theta(t))^{(p_i)}\right.\\
&\qquad \left. - \mathscr{N}(t)\theta(t) * \sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}_i\delta(t) + \mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I - \mathscr{Q})\theta(t))^{(p_i)}\right\} * u(t)\\
&= \left\{-\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)(I - \mathscr{Q})\theta(t) + \sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\mathscr{Q}_i\theta(t))^{(p_i)} * (I\delta(t) + \mathscr{R}(t)(I - \mathscr{Q})\theta(t))\right.\\
&\qquad \left. + \mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t) * \mathscr{N}(t)\theta(t) * \sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}_i\delta(t) + \mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I - \mathscr{Q})\theta(t))^{(p_i)}\right\} * u(t).
\end{aligned}
$$

В силу леммы 2

$$-\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t)*F(t)*u(t)=\Big\{-\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p_i)}(t)\mathscr{Q}_i\theta(t)+\mathscr{Q}_i\delta(t))*(I\delta(t)+\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t))$$

$$+\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t)*\mathscr{N}(t)\theta(t)*\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}_i\delta(t)+\mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t))^{(p_i)}\Big\}*u(t)$$

$$=\Big\{-\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t)+\sum_{i=1}^{n}\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p_i)}(t)\theta(t)*(\mathscr{Q}_i\delta(t)+\mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t))$$

$$+\mathscr{Q}\delta(t)+\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t)+\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t)*\mathscr{N}(t)\theta(t)$$

$$*\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}_i\delta(t)+\mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t))^{(p_i)}\Big\}*u(t)$$

$$=\Big\{\mathscr{Q}\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p_i)}(t)\theta(t)+(\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t))^{(p_i)}*\mathscr{N}(t)\theta(t))$$

$$*(\mathscr{Q}_i\delta(t)+\mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t))\Big\}*u(t).$$

Дальнейшее доказательство проведем для случая $p_1=p_2=\dots=p_n=p$, более общий случай отличается от этого существенным «техническим» усложнением выкладок без каких-либо идейных новшеств:

$$\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p_i)}(t)\theta(t)+(\mathscr{Q}\mathscr{R}(t)\theta(t))^{(p_i)}*\mathscr{N}(t)\theta(t))$$

$$*[\mathscr{Q}_i\delta(t)+\mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t)]\Big\}*u(t)$$

$$=\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p)}(t)\theta(t)+\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p)}(t)\theta(t)*\mathscr{N}(t)\theta(t)$$

$$-(\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p-1)}(0)\delta(t)+\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p-2)}(0)\delta'(t)+\dots+\mathscr{Q}\mathscr{R}(0)\delta^{(p-1)}(t))$$

$$*\sum_{j=1}^{n}\mathscr{Q}_j\mathscr{R}^{(p)}(t)\theta(t)*(I\delta(t)+\mathscr{N}(t)\theta(t)))*[\mathscr{Q}_i\delta(t)+\mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t)]\Big\}*u(t)$$

$$=\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p)}(t)\theta(t)-\mathscr{Q}\mathscr{R}^{(p)}(t)\theta(t))*(I\delta(t)+\mathscr{N}(t)\theta(t))$$

$$*[\mathscr{Q}_i\delta(t)+\mathscr{Q}_i\mathscr{R}(t)(I-\mathscr{Q})\theta(t)]\Big\}*u(t)=0.$$

Теорема 4 доказана.

Пусть выполнено условие

2) B, A_1, A_0 — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(B)}=\overline{D(A_1)}=\overline{D(A_0)}=E_1$, $D(B)\subset D(A_0)\cap D(A_1)$, $\overline{R(B)}=R(B)$, B фредгольмов.

Введем обозначение

$$P_1(t) = \exp\left(\frac{A_1\Gamma}{2}t\right), \quad K_1 = \left(\frac{A_1\Gamma}{2}\right)^2 + A_0\Gamma,$$

$\mathscr{R}_1(t)$ — резольвента ядра $tP_1(t)K_1$,

$$\mathscr{M}(t) = (tP_1(t))'' + K_1tP_1(t) + \int_0^t \mathscr{R}_1''(t-s)sP_1(s)\,ds.$$

Методом математической индукции доказывается следующая (аналогичная лемме 2).

Лемма 3. *Если существует полный обобщенный жорданов набор оператора B относительно оператор-функции $k(t) = A_1t + A_0$, то*

$$\mathscr{M}^{(k)}(0)z_i = l_{k+1}(\varphi_i), \quad i = \overline{1,n},\ k \geq 0;$$

$$\mathscr{Q}\mathscr{M}^{(k)}(0)\mathscr{Q}_i = \mathscr{Q}_i\mathscr{M}^{(k)}(0)\mathscr{Q} = 0, \quad k < p_i - 1,$$

но

$$\mathscr{Q}\mathscr{M}^{(p_i-1)}(0)\mathscr{Q}_i = \mathscr{Q}_i\mathscr{M}^{(p_i-1)}(0)\mathscr{Q} = \mathscr{Q}_i.$$

Дублированием всех рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4, доказывается

Теорема 5. *Если выполнено условие 2, оператор B имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции $k(t) = A_1t + A_0$, то дифференциальный оператор $B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)$ имеет на классе $\left(K_+^l\right)'(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию порядка p вида*

$$\mathscr{E}(t) = (\Gamma\delta(t) + \Gamma\mathscr{R}_1(t)\theta(t)) * tP_1(t)\theta(t) * (I\delta(t) + \mathscr{N}_1(t)\theta(t)) \\ * \left\{(I - \mathscr{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \bullet, \phi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t)\right\},$$

где $p = \max(p_i,\ i = \overline{1,n})$, $\mathscr{N}_1(t)$ — резольвента ядра $\sum\limits_{i=1}^n (-\mathscr{Q}_i\mathscr{M}^{(p_i)}(t)\theta(t))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
2. *Сидоров Н. А., Романова О. А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1526.
3. *Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
4. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
5. *Dolezal V.* Dynamics of linear systems. Prague, 1967.
6. *Завалищин С. Т.* Формула Коши для линейного уравнения общего вида в обобщенных функциях // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 6. С. 1138–1140.
7. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
8. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
9. *Сидоров Н. А., Фалалеев М. В.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.

10. *Фалалеев М. В.* Непрерывные и обобщенные решения одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением в банаховых пространствах // Краевые задачи: Сб. науч. тр. Иркутск: Иркут. ун-т, 1990. С. 54–62.

11. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978.

12. *Дубинский Ю. А.* Задача Коши в комплексной области. М.: Изд-во МЭИ, 1996.

13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

14. *Сидоров Н. А., Благодатская Е. Б.* Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшем дифференциальном выражении. Иркутск, 1991. 36 с. (Препринт / ИрВЦ СО АН СССР; № 1).

15. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Алгоритмический анализ некорректных задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 2–6 февраля 1998 г. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1998. С. 258–259.

16. *Falaleev M. V.* Fundamental an operator-function of singular differential operator N of the order in Banach spaces // Mathematics in Applications: Abstracts. Intern. Conf. honoring academician S. K. Godunov. Novosibirsk, 25–29 Aug. 1999. , . P. 52.

17. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения. Ташкент: ФАН, 1978. С. 133–148.

Статья поступила 27 декабря 1998 г.

г. Иркутск
mihail@is.isu.ru