*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5*

*УДК 517.956+517.958*

# СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ. I

**Г. А. Рудых, Э. И. Семенов**

**Аннотация:** Для многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

предложена оригинальная форма решений

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)\right]_+^p + \lambda\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\right]_+^{1/\lambda},$$

с помощью которой исследование исходного уравнения сведено к изучению конечномерной переопределенной (число уравнений больше числа искомых функций) системе алгебро-дифференциальных уравнений. Здесь $A_k(t)$ — вещественные симметричные матрицы с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\mathbf{B}_k(t)$ — вектор-столбцы с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ и $C_k(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ — скалярные функции; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область; $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$; $\lambda, p \in \mathbb{R}$; $\lambda, p \neq 0; k = 1, 2$.

Получено явное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и изучены свойства алгебраических уравнений. Найдено многопараметрическое семейство новых точных неавтомодельных анизотропных по пространственным переменным явных неотрицательных решений исследуемого уравнения при $A_1(t) \equiv 0$, $\mathbf{B}_1(t) \equiv 0$, $C_1(t) \equiv 0$. Библиогр. 50.

**1. Введение.** Рассмотрим многомерное уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = \nabla \cdot (K(u)\nabla u) \equiv \Delta\Phi(u), \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область; $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$; $\overline{\mathbb{R}}^+ = \{t : 0 \leq t < +\infty\}$; $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$ — температура среды; $K(u)$ — функция, определенная при всех $u \in \mathbb{R}^+$; $K(u) > 0$ при $u > 0$; $K(0) \geq 0$; $K(u)$ — коэффициент нелинейной теплопроводности среды; $\Phi(u) = \int\limits_0^u K(\xi)\,d\xi$. Далее относительно функции $\Phi(u)$ будем предполагать, что $\Phi(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\Phi'(u) > 0$ для $u \neq 0$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) \geq 0$ или $\Phi(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \cap C(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(u) > 0$ для $u \neq 0$, $\Phi'(+0) = +\infty$. Уравнения вида (1.1) возникают во многих моделях математической физики, их исследование является актуальным для современной теории нелинейных уравнений с частными производными и ее приложений. Помимо этого, уравнение (1.1) принадлежит классу так называемых неявно вырождающихся параболических уравнений, строгая математическая теория которых

© 2000 Рудых Г. А., Семенов Э. И.

берет свое начало в сравнительно недавних исследованиях. Укажем, например, работы [1–7], в которых обсуждаются некоторые особые свойства решений уравнения (1.1), связанные с его вырождением. Таким образом, нелинейное уравнение (1.1) является параболическим при $u > 0$, а при $u = 0$ вырождается в нелинейное эволюционное уравнение первого порядка.

Построению точных неотрицательных решений уравнения (1.1) посвящено большое число публикаций [1, 5, 6, 8–26], в которых отмечается актуальность данного направления исследований. В настоящей работе, которая примыкает к [8–11, 14–16, 19, 20, 27–35], получены новые точные неавтомодельные анизотропные по пространственным переменным явные неотрицательные решения уравнения (1.1) при $K(u) = u^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. В зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ будут рассмотрены случаи, когда интеграл $\int\limits_0^1 K(u)u^{-1}\,du$ конечен или равен $+\infty$, т. е.

$$\int\limits_0^1 u^{\lambda-1}\,du \leq +\infty. \tag{1.2}$$

Ниже предлагается и исследуется оригинальная конструкция [33–35] решения многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр нелинейной среды, значения которого различны для различных процессов переноса тепла [3]. Показано, что при определенных предположениях предъявленная конструкция позволяет получить точные неотрицательные решения как для класса уравнений пористой среды (нестационарной фильтрации) $\lambda > 0$, так и для класса уравнений (1.3) с отрицательным показателем $\lambda$ в коэффициенте нелинейной теплопроводности. В частности, в этот класс укладываются так называемые уравнения быстрой ($-1 < \lambda < 0$) и предельной ($\lambda = -1$, $n = 2$) диффузии. В основном полученные в этой работе точные неотрицательные решения отмеченных выше уравнений не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли — Беклунда [36, 37].

Наиболее близкие результаты к изложенным в настоящей работе получены в [8–10, 12–16, 18–20]. В частности, в исследовании [19] предложен метод построения $n$-параметрического семейства точных неотрицательных решений $u(\mathbf{x}, t)$ задачи Коши для уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \Delta u^m, \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

с начальными данными в виде конечной либо бесконечной меры, где $m \in \mathbb{R}$; $m > 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$. Если $0 < m < 1$, то носитель меры есть гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, а при $m > 1$ начальная мера сосредоточена в области, ограниченной поверхностью второго порядка в $\mathbb{R}^k$, $k < n$. Помимо этого, в отмеченной работе получены новые точные неавтомодельные анизотропные по пространственным переменным явные неотрицательные решения уравнения $u_t = \Delta \ln u$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, являющегося предельным случаем уравнения быстрой диффузии. Рассмотрены случаи, когда $n = 2$ (уравнение предельной диффузии) и $n = 3$. Хорошо известным свойством уравнений типа нестационарной фильтрации является конечность скорости изменения носителей их решений. Первые общие результаты о конечности скорости изменения носителей решений уравнений типа нестационарной фильтрации установлены в работах [38–40]. Кроме того, в этих работах доказано, что сходимость интеграла (1.2) является необходимым и достаточным условием конечности скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1.3). Другими словами, если интеграл (1.2) расходится, то $u(\mathbf{x},t)>0$ в $\mathbb{R}^n$ при всех $t\in\mathbb{R}^+$.

**2. Вывод разрешающей системы для многомерного уравнения нелинейной диффузии.** Введем в рассмотрение функции

$$Z_k(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_k(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_k(t))+C_k(t), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$; $A_k(t)=[a_{kij}(t)]$ — $n\times n$-матрицы; $\mathbf{B}_k(t)=(b_{k1}(t),\dots,b_{kn}(t))'$ — вектор-столбцы; $C_k(t)$ — скалярные функции; $a_{kij}(t),b_{ki}(t),C_k(t)\in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ — вещественные функции; $k=1,2$; $i,j=1,2,\dots,n$; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Решения уравнения (1.3) будем искать в виде

$$u(\mathbf{x},t)=\big[\lambda[Z_1(\mathbf{x},t)]_+^p+\lambda[Z_2(\mathbf{x},t)]_+^q\big]_+^{1/\lambda}, \tag{2.2}$$

где $\lambda,p,q\in\mathbb{R}$; $\lambda\neq0$; $[\cdot]_+=\max\{[\cdot],0\}$. Подставляя функцию (2.2) в уравнение (1.3), после несложных преобразований приходим к соотношению

$$\begin{aligned}pZ_1^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_1+qZ_2^{q-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_2&=\big(\lambda pZ_1^{2p-1}\Delta Z_1+p[p(\lambda+1)-\lambda]Z_1^{2p-2}|\nabla Z_1|^2\big)\\&+\big\{\lambda qZ_2^{2q-1}\Delta Z_2+q[q(\lambda+1)-\lambda]Z_2^{2q-2}|\nabla Z_2|^2\big\}\\&+\big[\lambda pZ_1^{p-1}Z_2^q\Delta Z_1+\lambda p(p-1)Z_1^{p-2}Z_2^q|\nabla Z_1|^2+\lambda qZ_1^pZ_2^{q-1}\Delta Z_2\\&+\lambda q(q-1)Z_1^pZ_2^{q-2}|\nabla Z_2|^2+2pqZ_1^{p-1}Z_2^{q-1}(\nabla Z_1,\nabla Z_2)\big].\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для разделения выражения (2.3) относительно функций $Z_1$, $Z_2$, определяемых формулой (2.1), воспользуемся следующим рассуждением, основанным на порядке однородности [41, с. 178] каждого из слагаемых уравнения (2.3). Предварительно отметим, что $\Delta Z_k(\mathbf{x},t)=\operatorname{tr}A_k(t)$ и введем в рассмотрение скалярные функции $Z_3=|\nabla Z_1|^2$, $Z_4=|\nabla Z_2|^2$, $Z_5=(\nabla Z_1,\nabla Z_2)$. Тогда нетрудно убедиться, что функции $Z_k(\mathbf{x},t)$, $k=1,2,\dots,5$, входящие в соотношение (2.3), имеют одинаковую структуру. Действительно, каждая из них состоит из трех слагаемых: квадратичной $\sum\limits_{i,j=1}^n r_{ij}(t)x_ix_j$, линейной $\sum\limits_{i}^n s_i(t)x_i$ форм и скалярной функции $h(t)$. Рассмотрим порядок однородности каждого из слагаемых уравнения (2.3). Первое слагаемое в левой части уравнения (2.3) имеет порядок однородности $p$, второе — $q$, каждое из слагаемых, стоящих в круглых скобках — $(2p-1)$, в фигурных скобках — $(2q-1)$ и, наконец, в квадратных скобках — $(p+q-1)$. Исследуя полученные порядки однородностей, легко видеть, что функции $Z_1$, $Z_2$, входящие в уравнение (2.3), разделяются, например, при $q=1$. В этом случае формула (2.2) принимает вид

$$u(\mathbf{x},t)=\big[\lambda[Z_1(\mathbf{x},t)]_+^p+\lambda Z_2(\mathbf{x},t)\big]_+^{1/\lambda}, \tag{2.4}$$

а соотношение (2.3) запишется так:

$$\begin{aligned}pZ_1^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_1+\frac{\partial}{\partial t}Z_2&=\big(\lambda pZ_1^{2p-1}\Delta Z_1+p[p(\lambda+1)-\lambda]Z_1^{2p-2}|\nabla Z_1|^2\big)\\&+\big\{\lambda Z_2\Delta Z_2+|\nabla Z_2|^2\big\}+\big[\lambda pZ_1^{p-1}Z_2\Delta Z_1+\lambda p(p-1)Z_1^{p-2}Z_2|\nabla Z_1|^2\\&+\lambda Z_1^p\Delta Z_2+2pZ_1^{p-1}(\nabla Z_1,\nabla Z_2)\big].\end{aligned} \tag{2.5}$$

Тем самым, приравнивая в (2.5) слагаемые с одинаковыми порядками однородности, приходим к системе трех уравнений на функции $Z_1$, $Z_2$. Итак, имеет место

**Теорема 1.** *Многомерное уравнение нелинейной диффузии* (1.3) *имеет точное неотрицательное решение вида*

$$u(\mathbf{x},t) = \Big[\lambda\Big[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)\Big]_+^p + \lambda\Big[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\Big]\Big]_+^{1/\lambda}, \quad (2.6)$$

*если матрицы $A_k(t)$ с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ и скалярные функции $C_k(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2$, связаны соотношениями*

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2,$$
$$pZ_1 \frac{\partial}{\partial t} Z_1 = p\lambda Z_1 Z_2 \Delta Z_1 + \lambda Z_1^2 \Delta Z_2 + \lambda p(p-1) Z_2 |\nabla Z_1|^2 + 2pZ_1(\nabla Z_1, \nabla Z_2),$$
$$\lambda Z_1 \Delta Z_1 + [p(\lambda+1) - \lambda]|\nabla Z_1|^2 = 0, \quad (2.7)$$

*где $Z_1$, $Z_2$ — функции, определяемые согласно* (2.1); $\lambda, p \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$.

Соотношения (2.7) будем называть *разрешающей системой* для уравнения нелинейной диффузии (1.3). При этом с учетом введенных выше функций $Z_3$, $Z_4$, $Z_5$ первое и третье уравнения разрешающей системы (2.7) имеют порядок однородности один, а второе — два.

Наконец, отметим, что уравнения, подобные (2.3), все слагаемые которых имеют одинаковый порядок однородности, возникают и расщепляются методом Хироты [42], являющимся эффективным инструментом построения точных решений одномерных нелинейных эволюционных уравнений. В частности, этим методом (с незначительными модификациями и с использованием Паде-аппроксимации) в работе [41, с. 177–209] строятся точные одно- и двухфазные решения широкого класса одномерных полулинейных параболических уравнений.

Решение (2.6) уравнения (1.3) можно назвать решением в виде «конечных сумм». Отметим, что в [12] предложен метод обобщенного разделения переменных, позволяющий строить частные точные решения

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) f_i(x) \quad \text{(S)}$$

широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$T^p(v) = X^q(v), \quad \text{(E)}$$

где $T^p(v)$ — многочлен степени $p$ от функции $v(x,t)$ и ее производных по $t \in \mathbb{R}^1$; $X^q(v)$ — многочлен степени $q$ от функции $v(x,t)$ и ее производных по $x \in \mathbb{R}^1$; $a_i(t)$, $f_i(x)$ — некоторые достаточно гладкие функции, подлежащие определению. В конечном итоге конструкции (S), (E) приводят к необходимости исследования совместности двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), одна из которых содержит только функции от $t$, а вторая — только функции от $x$. Другими словами, системы ОДУ, получаемые после подстановки конструкции (S) в исследуемое уравнение (E), являются переопределенными [43] (число уравнений превосходит число искомых функций, подлежащих определению). Представление частных точных решений в виде «конечных сумм» использовалось рядом авторов [1, 8–12, 14, 22, 25, 44–46] для анализа различных классов нелинейных уравнений.

**3. Исследование разрешающей системы уравнений.** В общем случае исследование разрешающей системы уравнений (2.7) связано с большими трудностями. Поэтому рассмотрим частный случай, когда (2.7) сводится к переопределенной (число уравнений больше числа искомых функций) системе алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ), разрешимой при определенных предположениях.

Итак, пусть $\xi = p(\lambda+1)-\lambda$, $\xi \neq 0$. Тогда разрешающая система уравнений (2.7) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_1 = \sigma Z_2 \Delta Z_1 + \tau Z_1 \Delta Z_2 + 2(\nabla Z_1, \nabla Z_2), \tag{3.2}$$

$$\lambda Z_1 \Delta Z_1 + \xi |\nabla Z_1|^2 = 0, \tag{3.3}$$

где $\sigma = p\lambda/\xi$; $\tau = \lambda/p$; $p, \lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$; $p \neq 0$.

**Теорема 2.** *Пусть $A_k(t)$ — симметричные матрицы с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\mathbf{B}_k(t)$ — вектор-столбцы с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ и $C_k(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ — скалярные функции. Тогда для того чтобы функции $Z_1$, $Z_2$, определяемые соотношением* (2.1), *удовлетворяли разрешающей системе* (3.1)–(3.3), *необходимо и достаточно, чтобы $A_k(t)$, $\mathbf{B}_k(t)$, $C_k(t)$ удовлетворяли системе* АДУ

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)A_2, \tag{3.4.1}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)\mathbf{B}_2, \tag{3.4.2}$$

$$\dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)C_2, \tag{3.4.3}$$

$$\dot{A}_1 = 4A_1A_2 + \tau(\operatorname{tr} A_2)A_1 + \sigma(\operatorname{tr} A_1)A_2, \tag{3.4.4}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = 2(A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + \tau(\operatorname{tr} A_2)\mathbf{B}_1 + \sigma(\operatorname{tr} A_1)\mathbf{B}_2, \tag{3.4.5}$$

$$\dot{C}_1 = 2(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) + \tau(\operatorname{tr} A_2)C_1 + \sigma(\operatorname{tr} A_1)C_2, \tag{3.4.6}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A_1)A_1 + 2\xi A_1^2 = 0, \tag{3.4.7}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A_1)\mathbf{B}_1 + 2\xi A_1\mathbf{B}_1 = 0, \tag{3.4.8}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A_1)C_1 + \xi|\mathbf{B}_1|^2 = 0, \tag{3.4.9}$$

*где $\sigma = p\lambda/\xi$; $\tau = \lambda/p$; $p, \lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$; $p \neq 0$; $\xi = p(\lambda+1)-\lambda$; $\xi \neq 0; \operatorname{tr} A_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{kii}(t)$ — след матрицы $A_k(t)$; $k = 1, 2$.*

Доказательство. Пусть функции $Z_1$, $Z_2$, определяемые согласно (2.1), удовлетворяют разрешающей системе (3.1)–(3.3). Тогда в силу симметричности матриц $A_k(t)$ имеем

$$|\nabla Z_k|^2 = (\mathbf{x}, A_k^2\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A_k\mathbf{B}_k) + |\mathbf{B}_k|^2, \tag{3.5}$$

$$(\nabla Z_1, \nabla Z_2) = (\mathbf{x}, A_1A_2\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2),$$

причем

$$\nabla Z_k = A_k\mathbf{x} + \mathbf{B}_k, \Delta Z_k = \nabla \cdot (\nabla Z_k) = \operatorname{tr} A_k, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_k = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \dot{A}_k\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{B}}_k) + \dot{C}_k; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad k = 1, 2. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что с учетом соотношений (3.5)–(3.7) из (3.1)–(3.3) следует система АДУ (3.4).

Покажем, что из уравнений (3.4.1)–(3.4.3) системы АДУ (3.4) следует справедливость соотношения (3.1). В самом деле, пусть $k = 2$. Тогда, исходя из (3.7) и принимая во внимание формулы (3.5), (3.6), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \frac{1}{2}\big(\mathbf{x}, \big[2A_2^2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)A_2\big]\mathbf{x}\big) + (\mathbf{x}, 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)\mathbf{B}_2) \\ + |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)C_2 = \lambda(\operatorname{tr} A_2)\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2) + C_2\right] \\ + [(\mathbf{x}, A_2^2\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A_2\mathbf{B}_2) + |\mathbf{B}_2|^2] = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2.$$

Аналогично доказывается, что из уравнений (3.4.4)–(3.4.6) системы АДУ (3.4) следует соотношение (3.2), а из (3.4.7)–(3.4.9) — соотношение (3.3). Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 приводят к следующему результату

**Утверждение 1.** *Если симметричные матрицы $A_k(t)$ с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ и скалярные функции $C_k(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений* (3.4), *то функция* (2.6) *является точным неотрицательным решением многомерного уравнения нелинейной диффузии* (1.3).

Рассмотрим решение $u(\mathbf{x}, t)$ уравнения (1.3) вида (2.4) при $Z_1(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, т. е.

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\right]_+^{1/\lambda}. \tag{3.8}$$

В этом случае в системе АДУ (3.4) $A_1(t) \equiv 0, \mathbf{B}_1(t) \equiv 0, C_1(t) \equiv 0$ и она сводится к системе ОДУ

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)A_2,\ \dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)\mathbf{B}_2,\ \dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(\operatorname{tr} A_2)C_2, \tag{3.9}$$

полученной и частично исследованной в работе [30]. Предположим, что при $t = 0$ заданы вещественная симметричная матрица $A_2(0) \in M_n(\mathbb{R})$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ и скаляр $C_2(0) \in \mathbb{R}$, где $M_n(\mathbb{R})$ — множество $n \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{R}$; $M_{n,k}(\mathbb{R})$ — множество $n \times k$-матриц с элементами из $\mathbb{R}$ [47]. Представим матрицу $A_2(0)$ в виде $A_2(0) = SD(0)S'$, где $S \in M_n(\mathbb{R})$ — ортогональная матрица, т. е. $SS' = S'S = I$; $I$ — единичная матрица; $D(0) = \operatorname{diag}[d_1(0), \dots, d_n(0)]$ — диагональная матрица; $d_l(0) \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2, \dots n$, — собственные значения матрицы $A_2(0)$. Представимость любой вещественной симметричной матрицы в таком виде хорошо известна [47]. Покажем, что если функции $A_2(0)$, $\mathbf{B}_2(0)$, $C_2(0)$ определены, то решение задачи Коши для системы ОДУ (3.9) сводится к решению задачи Коши для некоторого скалярного нелинейного ОДУ. Более точно, справедлив один из основополагающих результатов этой работы.

**Теорема 3.** *Пусть заданы вещественные симметричные матрицы $A_2(0)$, $S \in M_n(\mathbb{R})$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ и скаляр $C_2(0) \in \mathbb{R}$. Пусть, помимо этого, $z(t)$ — вещественное решение задачи Коши*

$$\dot{z}(t) = \prod_{l=1}^{n}[1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t). \tag{3.10}$$

*Тогда решение задачи Коши*

$$\dot{A}_2(t) = 2A_2^2(t) + \lambda[\operatorname{tr} A_2(t)]A_2(t), \quad A_2(t)|_{t=0} = A_2(0), \tag{3.11}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t) = 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t) + \lambda[\operatorname{tr} A_2(t)]\mathbf{B}_2(t), \quad \mathbf{B}_2(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_2(0), \tag{3.12}$$

$$\dot{C}_2(t) = |\mathbf{B}_2(t)|^2 + \lambda[\operatorname{tr} A_2(t)]C_2(t), \quad C_2(t)|_{t=0} = C_2(0), \tag{3.13}$$

*имеет вид*

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0), \tag{3.14}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{3.15}$$

$$C_2(t) = \dot{z}(t)[C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))]. \tag{3.16}$$

*При этом $A_2(t)$ — симметричная матрица для всех $t$ из области ее определения, где*

$$Q(t) = \operatorname{diag}[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \dots, [1 - 2d_n(0)z(t)]^{-1}]; \tag{3.17}$$

$$A_2(0) = SD(0)S'; \quad \lambda, d_l(0) \in \mathbb{R}; \quad \lambda \neq 0, \quad d_l(0) \neq 0; \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Пусть $A_2(t)$, $\mathbf{B}_2(t)$, $C_2(t)$ определяются формулами (3.14)–(3.17). Покажем, что эти функции являются решением задачи Коши (3.11)–(3.13). Для удобства записи введем обозначение $v(t) = \operatorname{tr} A_2(t)$ и вычислим след матрицы $A_2(t)$. Исходя из (3.14), легко видеть, что справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} v(t) = \operatorname{tr} A_2(t) = \operatorname{tr}(\dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0)) = \operatorname{tr}(\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S') \\ = \dot{z}(t)\operatorname{tr}(Q(t)D(0)) = \dot{z}(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $Q(t)$ — диагональная матрица вида (3.17). С другой стороны, так как $1 - 2d_l(0)z(t) \neq 0$ для $l = 1, 2, \dots, n$ в силу условия $z(0) = 0$, дифференцируя (3.10) по $t$, получим

$$\ddot{z}(t) = \lambda\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)}\right]\dot{z}^2(t) = \lambda v(t)\dot{z}(t), \tag{3.19}$$

причем $\dot{z}(0) = 1$, $z(0) = 0$. Кроме того, непосредственным дифференцированием (3.17) нетрудно показать, что матрица $Q(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\dot{Q}(t) = 2\dot{z}(t)D(0)Q^2(t) = 2\dot{z}(t)Q^2(t)D(0), \quad Q(t)|_{t=0} = I. \tag{3.20}$$

Покажем, что матрица $A_2(t)$ вида (3.14) удовлетворяет уравнению (3.11). Действительно, дифференцируя (3.14) и учитывая формулы (3.18)–(3.20), имеем

$$\begin{aligned} \dot{A}_2(t) &= \ddot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0) + \dot{z}(t)S\dot{Q}(t)S'A_2(0) \\ &= \lambda v(t)\dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0) + 2\dot{z}^2(t)SQ^2(t)D(0)S'A_2(0) \\ &= \lambda v(t)A_2(t) + 2\dot{z}^2(t)SQ(t)D(0)S'SQ(t)S'A_2(0) \\ &= \lambda v(t)A_2(t) + 2\dot{z}^2(t)\,(SQ(t)D(0)S')\,(SQ(t)D(0)S') = \lambda(\operatorname{tr} A_2(t))A_2(t) + 2A_2^2(t). \end{aligned}$$

Убедимся, что вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ вида (3.15) является решением уравнения (3.12). Дифференцируя (3.15) и используя (3.18)–(3.20), получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_2(t) &= \ddot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) + \dot{z}(t)S\dot{Q}(t)S'\mathbf{B}_2(0) \\ &= \lambda v(t)\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) + 2\dot{z}^2(t)SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0) \\ &= \lambda v(t)\mathbf{B}_2(t) + 2(\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S')(\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)) \\ &= \lambda(\operatorname{tr} A_2(t))\mathbf{B}_2(t) + 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t). \end{aligned}$$

К тому же согласно (3.17) $Q(t) = (I-2z(t)D(0))^{-1}$, т. е. $(I-2z(t)D(0))Q(t) = I$, или, что то же самое,

$$Q(t) = I + 2z(t)Q(t)D(0). \tag{3.21}$$

Наконец, с учетом формул (3.18)–(3.21) нетрудно убедиться, что скалярная функция $C_2(t)$, определяемая согласно (3.16), удовлетворяет уравнению (3.13). В самом деле, дифференцируя (3.16) и принимая во внимание соотношения (3.18)–(3.21), приходим к справедливости цепочки равенств

$$\begin{aligned}
\dot{C}_2(t) &= \ddot{z}(t)C_2(0) + \dot{z}(t)(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)) + z(t)(\mathbf{B}_2(0), \dot{\mathbf{B}}_2(t)) \\
&= \lambda v(t)\dot{z}(t)C_2(0) + \dot{z}(t)(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)) + z(t)(\mathbf{B}_2(0), 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t) + \lambda v(t)\mathbf{B}_2(t)) \\
&= \lambda v(t)[\dot{z}(t)C_2(0) + z(t)(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t))] + (\mathbf{B}_2(0), [\dot{z}(t)I + 2z(t)A_2(t)]\mathbf{B}_2(t)) \\
&= \lambda v(t)C_2(t) + (\mathbf{B}_2(0), \dot{z}(t)S[I + 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_2(t)) \\
&= \lambda v(t)C_2(t) + (\mathbf{B}_2(0), \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(t)) \\
&= \lambda v(t)C_2(t) + (\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)) = \lambda(\operatorname{tr} A_2(t))C_2(t) + |\mathbf{B}_2(t)|^2.
\end{aligned}$$

Покажем, что $A_2(t)$ — симметричная матрица для всех $t$ из области ее определения. Пусть $G(t) = SQ(t)S'$, где $Q(t)$ определяется согласно (3.17). Ясно, что $G(t)$ — невырожденная симметричная матрица. Тогда $A_2(t) = \dot{z}(t)G(t)A_2(0)$, где $A_2(0)$ — вещественная симметричная матрица. В первую очередь убедимся, что матрицы $A_2(0)$ и $G(t)$ коммутируют. Действительно, так как справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
A_2(0)G^{-1}(t) &= A_2(0)[SQ(t)S']^{-1} = A_2(0)SQ^{-1}(t)S' \\
&= A_2(0)S[I - 2z(t)D(0)]S' = A_2(0)[SS' - 2z(t)SD(0)S']
\end{aligned}$$

$$=A_2(0)[I-2z(t)A_2(0)]=A_2(0)-2z(t)A_2^2(0) = [I-2z(t)A_2(0)]A_2(0) = G^{-1}(t)A_2(0),$$

то $G(t)A_2(0) = A_2(0)G(t)$. Кроме того, $[G(t)A_2(0)]' = A_2'(0)G'(t) = A_2(0)G(t)$, т. е. $G(t)A_2(0)$ — симметричная матрица. Поэтому таковой является и матрица $A_2(t)$. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $d_l = d_l(0) \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2, 3$. Тогда при $\lambda = -1$ решение задачи Коши (3.10) выражается в эллиптических функциях Якоби [48]. Рассмотрим случай, когда $d_1 d_2 d_3 < 0$. Если $z(t) > \frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} > \frac{1}{2d_3}$, то решение задачи Коши (3.10) имеет вид

$$z(t) = \frac{d_2 - d_1 \operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1 - d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/d_1}, k), k)}{2d_1 d_2 \operatorname{cn}^2(\sqrt{d_2(d_1 - d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/d_1}, k), k)}, \tag{1}$$

причем в этом случае $k = \sqrt{\frac{d_1(d_3-d_2)}{d_2(d_3-d_1)}}$. При выполнении цепочки неравенств $z(t) \geq \frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} > \frac{1}{2d_3}$ получим

$$z(t) = \frac{d_3 - d_1 \operatorname{cn}^2(\sqrt{d_2(d_1 - d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_1 - d_3)/d_1}, k), k)}{2d_1 d_3 \operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1 - d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_1 - d_3)/d_1}, k), k)}. \tag{2}$$

Если $\frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} \geq z(t) > \frac{1}{2d_3}$, то

$$z(t) = \frac{1}{2d_3} + \frac{d_3 - d_2}{2d_2 d_3}\operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1 - d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/(d_2 - d_3)}, k), k). \tag{3}$$

Окончательно при $\frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} > z(t) \geq \frac{1}{2d_3}$ находим

$$z(t) = \frac{1}{2}(d_1 - d_3 + (d_3 - d_2)\operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1 - d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_3 - d_1)/(d_3 - d_2)}, k), k))$$

$$\times \frac{1}{d_2(d_1-d_3)+d_1(d_3-d_2)\operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t+\operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_3-d_1)/(d_3-d_2)},k),k)}.$$

Исследуем случаи вырождения эллиптических функций. Так, при $d_2 = d_3$ из формул (1), (2) получим решения с тригонометрическими функциями

$$z(t) = \frac{d_2 - d_1\sin^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t + \arcsin(\sqrt{d_2/d_1}))}{2d_1d_2\cos^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t+\arcsin(\sqrt{d_2/d_1}))},$$

$$z(t) = \frac{d_2 - d_1\cos^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t + \arcsin(\sqrt{(d_1-d_2)/d_1}))}{2d_1d_2\sin^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t+\arcsin(\sqrt{(d_1-d_2)/d_1}))}.$$

Если $d_1 = d_2$, то двумерная задача имеет решения в гиперболических функциях, вытекающие из выражений (2), (3):

$$z(t) = \frac{d_3 - d_1\operatorname{sech}^2(\sqrt{d_1(d_1-d_3)}t + \operatorname{arth}(\sqrt{(d_1-d_3)/d_1}))}{2d_1d_3\operatorname{th}^2(\sqrt{d_1(d_1-d_3)}t+\operatorname{arth}(\sqrt{(d_1-d_3)/d_1}))},$$

$$z(t) = \frac{1}{2d_3} + \frac{d_3-d_1}{2d_1d_3}\operatorname{th}^2(\sqrt{d_1(d_1-d_3)}t + \operatorname{arth}(\sqrt{d_1/(d_1-d_3)})).$$

Итак, суммируя результаты теоремы 3 и примера 1, нетрудно получить точные неавтомодельные анизотропные по пространственным переменным явные неотрицательные решения уравнения

$$u_t = \Delta \ln u, \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x},t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

для $n = 2$ и $n = 3$.

Замечание 1. Если ввести в рассмотрение матрицу

$$D(t) = \operatorname{diag}[d_1(t),\dots,d_n(t)], \quad d_l(t) = \frac{d_l(0)}{1-2d_l(0)z(t)}\dot z(t), \tag{3.22}$$

связанную с матрицей $Q(t)$, определяемой согласно (3.17) соотношением

$$D(t) = \dot z(t)Q(t)D(0), \quad D(0) = S'A_2(0)S, \tag{3.23}$$

то решение (3.14)–(3.16) задачи Коши (3.11)–(3.13) запишется в виде

$$A_2(t) = SD(t)S', \tag{3.24}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = SD^{-1}(0)D(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{3.25}$$

$$C_2(t) = \dot z(t)C_2(0) + z(t)(\mathbf{B}_2(0), SD^{-1}(0)D(t)S'\mathbf{B}_2(0)), \tag{3.26}$$

где $d_l(t)$ — вещественные собственные значения матрицы $A_2(t); l = 1,2,\dots,n$.

Замечание 2. Из теоремы 3 и теоремы об единственности решения [49] следует, что формулами (3.14)–(3.16) определяются все решения задачи Коши (3.11)–(3.13) с вещественной симметричной начальной матрицей $A_2(0)$. В самом деле, в исследуемой задаче Коши (3.11)–(3.13) нелинейным является лишь уравнение (3.11). Единственность решения матричного уравнения (3.11) вытекает из того факта, что в любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^{n\times n}$ правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица и, значит, применима классическая теорема единственности решения для нормальной системы ОДУ.

Из утверждения 1 и теоремы 3 выводим, что справедливо

**Утверждение 2.** *Если симметричная матрица $A_2(t)$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ и скалярная функция $C_2(t)$ имеют соответственно вид* (3.14), (3.15), (3.16), *то уравнение нелинейной диффузии* (1.3) *обладает точным, неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением* (3.8).

Так как функции $A_2(t)$, $\mathbf{B}_2(t)$, $C_2(t)$ нами определены (см. формулы (3.14)–(3.16) или (3.24)–(3.26)), перейдем к исследованию системы ОДУ (3.4.4)–(3.4.6).

**4. Существование решений задачи Коши для системы ОДУ (3.4.4)–(3.4.6).**

**Утверждение 3.** *Пусть матрица $A_2(t)$ имеет вид*

$$A_2(t) = \dot{z}(t) S Q(t) S' A_2(0), \tag{4.1}$$

$u(t) = \operatorname{tr} A_1(t)$, $v(t) = \operatorname{tr} A_2(t)$; $A_1(0), A_2(0) \in M_n(\mathbb{R})$ *— вещественные симметричные матрицы. Тогда задача Коши*

$$\dot{A}_1(t) = 4A_1(t)A_2(t) + \tau v(t) A_1(t) + \sigma u(t) A_2(t), \quad A_1(t)|_{t=0} = A_1(0), \tag{4.2}$$

*имеет следующее решение*

$$A_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\tau/\lambda} \left[ \sigma \int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{\tau}{\lambda}} u(\eta) G^{-1}(\eta) A_2(0)\, d\eta + A_1(0) \right] G^2(t), \tag{4.3}$$

*где $G(t) = SQ(t)S'$; $u(t)$ — функция, удовлетворяющая линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода*

$$u(t) = \sigma \int_0^t K(t,\eta) u(\eta)\, d\eta + f(t) \tag{4.4}$$

*с ядром*

$$K(t,\eta) = \left[ \frac{\dot{z}(t)}{\dot{z}(\eta)} \right]^{\tau/\lambda} \dot{z}(\eta) \operatorname{tr}[Q^2(t) Q^{-1}(\eta) D(0)] \tag{4.5}$$

*и свободным членом*

$$f(t) = [\dot{z}(t)]^{\tau/\lambda} \operatorname{tr}[A_1(0) G^2(t)], \tag{4.6}$$

$\tau = \lambda/p$; $\sigma = \lambda p/\xi$; $\xi = p(\lambda+1) - \lambda$. *Кроме того, для симметричности $A_1(t)$ при всех $t$ из области ее определения необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_1(0), A_2(0)$ коммутировали:*

$$A_1(0) A_2(0) = A_2(0) A_1(0). \tag{4.7}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из уравнения (3.20) в силу (3.17) и соотношения $A_2(0) = SD(0)S'$ следует справедливость задачи Коши

$$\dot{G}(t) = 2\dot{z}(t) G^2(t) A_2(0), \quad G(t)|_{t=0} = I. \tag{4.8}$$

Легко видеть, что $G(t)A_2(0) = A_2(0)G(t)$ и $G(t)\dot{G}(t) = \dot{G}(t)G(t)$. Наконец, напомним, что функция $z(t)$ удовлетворяет помимо (3.10) ОДУ (3.19). С учетом этого покажем, что матрица $A_1(t)$ является решением задачи Коши (4.2). В самом деле, дифференцируя (4.3), принимая во внимание формулы (4.1), (4.2), (4.8) и учитывая, что $\tau/\lambda = 1/p$, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, имеем

$$\begin{gathered}
\dot{A}_1(t) = \frac{1}{p} [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}-1} \ddot{z}(t) \left[ \sigma \int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) G^{-1}(\eta) A_2(0)\, d\eta + A_1(0) \right] G^2(t) \\
+ \sigma \dot{z}(t) u(t) G^{-1}(t) A_2(0) G^2(t) \\
+ 2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}} \left[ \sigma \int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) G^{-1}(\eta) A_2(0)\, d\eta + A_1(0) \right] G(t) \dot{G}(t)
\end{gathered}$$

$$= \tau v(t)[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma\int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)\,d\eta + A_1(0)\right]G^2(t) + \sigma u(t)\dot z(t)G(t)A_2(0)$$

$$+ 4[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma\int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)\,d\eta + A_1(0)\right]G^2(t)\dot z(t)G(t)A_2(0)$$
$$= \tau v(t)A_1(t) + \sigma u(t)A_2(t) + 4A_1(t)A_2(t).$$

Теперь, исходя из (4.3), вычислим след $u(t)$ матрицы $A_1(t)$. Итак, справедлива цепочка равенств

$$u(t) = \operatorname{tr} A_1(t) = \operatorname{tr}\left[\sigma\int\limits_0^t [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)G^2(t)\,d\eta + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}A_1(0)G^2(t)\right]$$

$$= \sigma\int\limits_0^t \left[\frac{\dot z(t)}{\dot z(\eta)}\right]^{\frac{1}{p}}\dot z(\eta)\operatorname{tr}[G^{-1}(\eta)A_2(0)G^2(t)]u(\eta)\,d\eta + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\operatorname{tr}[A_1(0)G^2(t)]$$

$$= \sigma\int\limits_0^t \left[\frac{\dot z(t)}{\dot z(\eta)}\right]^{\frac{1}{p}}\dot z(\eta)\operatorname{tr}[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)]u(\eta)\,d\eta + f(t) = \sigma\int\limits_0^t K(t,\eta)u(\eta)\,d\eta + f(t).$$

Отсюда следует, что функция $u(t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом (4.6). Тем самым мы показали, что матрица $A_1(t)$ является решением задачи Коши (4.2). Для завершения доказательства осталось установить тот факт, что соотношение (4.7) является необходимым и достаточным условием симметричности матрицы $A_1(t)$ для всех $t$ из области ее определения.

Пусть равенство (4.7) выполняется. Отметим, что $A_2(0) = SD(0)S'$ и $G(t) = SQ(t)S'$ — невырожденная симметричная матрица. Учитывая сказанное, нетрудно убедиться, что матрицы $A_1(0)$ и $G^{-1}(t)$ коммутируют. Действительно, в этом случае имеет место цепочка равенств

$$A_1(0)G^{-1}(t) = A_1(0)[SQ(t)S']^{-1} = A_1(0)SQ^{-1}(t)S'$$
$$= A_1(0)S[I - 2z(t)D(0)]S' = A_1(0)[SS' - 2z(t)SD(0)S']$$
$$= A_1(0)[I - 2z(t)A_2(0)] = A_1(0) - 2z(t)A_1(0)A_2(0)$$
$$= A_1(0) - 2z(t)A_2(0)A_1(0) = [I - 2z(t)A_2(0)]A_1(0) = G^{-1}(t)A_1(0).$$

Следовательно, $A_1(0)G(t) = G(t)A_1(0)$, $A_1(0)G^2(t) = G^2(t)A_1(0)$. Заметим, что поскольку

$$[A_1(0)G^2(t)]' = [G^2(t)]'[A_1(0)]' = [G'(t)]^2[A_1(0)]' = G^2(t)A_1(0) = A_1(0)G^2(t),$$

матрица $A_1(0)G^2(t)$ является симметричной. Выше мы показали справедливость соотношения $A_2(0)G(t) = G(t)A_2(0)$. Тем самым $A_2(0)G^2(t) = G^2(t)A_2(0)$. Отсюда сразу следует симметричность матрицы $A_2(0)G^2(t)$. В самом деле, имеем

$$[A_2(0)G^2(t)]' = [G^2(t)]'[A_2(0)]' = [G'(t)]^2[A_2(0)]' = G^2(t)A_2(0) = A_2(0)G^2(t).$$

Учитывая полученные результаты и переписывая матрицу $A_1(t)$ в виде

$$A_1(t) = \sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} \left[\int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta)\, d\eta\right] A_2(0) G^2(t) + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} A_1(0) G^2(t), \tag{4.9}$$

легко видеть, что она симметричная для всех $t$ из области ее определения.

Докажем обратное. Пусть матрица $A_1(t)$, определяемая формулой (4.9), симметрична. Поскольку $A_2(0)G^2(t)$ — симметричная матрица, то и матрица $A_1(0)G^2(t)$ должна быть симметричной, что эквивалентно в силу симметричности $A_1(0)$, $G^2(t)$ их коммутации $A_1(0)G^2(t) = G^2(t)A_1(0)$. Значит имеет место соотношение $G^{-2}(t)A_1(0) = A_1(0)G^{-2}(t)$, т. е. матрицы $G^{-2}(t)$ и $A_1(0)$ коммутируют. Напомним, что $G^{-1}(t) = SQ^{-1}(t)S' = I - 2z(t)A_2(0)$. Отсюда следует, что $G^{-2}(t) = I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)$. В итоге имеет место соотношение

$$\big[I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)\big]A_1(0) = A_1(0)\big[I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)\big].$$

Расписывая это равенство и учитывая, что $z(t) \neq 0$, получим

$$A_2(0)A_1(0) - z(t)A_2^2(0)A_1(0) = A_1(0)A_2(0) - z(t)A_1(0)A_2^2(0).$$

Поскольку $z(0) = 0$, полагая $t = 0$, из последнего соотношения выводим формулу (4.7). Утверждение доказано.

Покажем, что из теоремы 3 и утверждения 3 следует

**Теорема 4.** *Пусть $A_2(t)$, $A_1(t)$ — вещественные симметричные матрицы вида* (4.1), (4.3), *удовлетворяющие уравнениям* (3.4.1), (3.4.4) *и определенные при $t = 0$, т. е. $A_2(t)|_{t=0} = A_2(0) \in M_n(\mathbb{R}), A_1(t)|_{t=0} = A_1(0) \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда существуют вещественные диагональные $D(0) = \operatorname{diag}[d_1(0), \dots, d_n(0)], \Lambda(0) = \operatorname{diag}[\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0)]$ и ортогональная $S \in M_n(\mathbb{R})$ матрицы такие, что*

$$A_2(t) = \dot z(t) S Q(t) D(0) S', \tag{4.10}$$

$$A_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{p}} S \left[\sigma \int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) D(0)\, d\eta + \Lambda(0)\right] Q^2(t) S', \tag{4.11}$$

*где $u(t)$ — решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода* (4.4) *с ядром* (4.5) *и свободным членом*

$$f(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} \operatorname{tr}[\Lambda(0)Q^2(t)]; \tag{4.12}$$

*$Q(t)$ — диагональная матрица, определяемая согласно* (3.17).

Доказательство. Ясно, что вещественные симметричные матрицы $A_2(t)$, $A_1(t)$, определяемые посредством формул (4.1), (4.3), удовлетворяют задачам Коши (3.11), (4.2). При этом матрицы $A_2(0), A_1(0)$ коммутируют, т. е. выполняется соотношение (4.7). С другой стороны, при определенных предположениях две вещественные симметричные коммутирующие матрицы $A_2(0)$, $A_1(0)$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду. В самом деле [47], необходимым и достаточным условием существования вещественной ортогональной матрицы $S$ такой, что $S'A_1(0)S = \Lambda(0)$, $S'A_2(0)S = D(0)$, является коммутация матриц $A_1(0)$, $A_2(0)$. Отсюда имеем $A_1(0) = S\Lambda(0)S'$, $A_2(0) = SD(0)S'$. Подставляя эти выражения в (4.1), (4.3), приходим к формулам (4.10), (4.11). Помимо этого, из (4.6) следует справедливость соотношения (4.12). Теорема доказана.

Теперь, поскольку функции $\mathbf{B}_2(t), A_2(t), A_1(t), v(t) = \operatorname{tr} A_2(t), u(t) = \operatorname{tr} A_1(t)$ нами определены, покажем, что имеет место

**Утверждение 4.** *Пусть вектор-столбец* $\mathbf{B}_2(t)$ *и матрицы* $A_2(t)$, $A_1(t)$ *определяются соответственно формулами* (3.15) *и* (4.10), (4.11). *Пусть, кроме того, функция* $v(t)$ *имеет вид* (3.18), *а* $u(t)$ — *решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода* (4.4) *с ядром* (4.5) *и свободным членом* (4.12). *Тогда задача Коши*

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = [2A_2(t)+\tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t)+[2A_1(t)+\sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t),\ \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0), \quad (4.13)$$

*обладает следующим решением:*

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}} SQ(t)\left[\sigma\left(\int\limits_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)Q^{-1}(\eta)\,d\eta\right)Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)+ \right.$$
$$\left. + 2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\right]. \quad (4.14)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вектор-столбец

$$\mathbb{B}_1(t) = \sigma\left(\int\limits_0^t [\dot{z}(t)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)Q^{-1}(\eta)\,d\eta\right) Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$+ 2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0). \quad (4.15)$$

Тогда формула (4.14) запишется в виде

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}} SQ(t)\mathbb{B}_1(t). \quad (4.16)$$

Дифференцируя (4.16) по времени, приходим к соотношению

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \frac{1}{p}[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}-1}\ddot{z}(t)SQ(t)\mathbb{B}_1(t) + [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}(S\dot{Q}(t)\mathbb{B}_1(t) + SQ(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t)).$$

Используя (3.19), (3.20), имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = [2A_2(t) + \tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t) + [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}} SQ(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t). \quad (4.17)$$

Исходя из (4.15), вычислим $\dot{\mathbb{B}}_1(t)$:

$$\dot{\mathbb{B}}_1(t) = \sigma[\dot{z}(t)]^{1-\frac{1}{p}} u(t)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$+ 2\sigma\left(\int\limits_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)Q^{-1}(\eta)\,d\eta\right) \dot{z}(t)Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$+ 2\dot{z}(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + 4z(t)\dot{z}(t)Q^2(t)D(0)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0).$$

Поскольку справедливо равенство (3.21), то

$$\dot{\mathbb{B}}_1(t) = \sigma[\dot{z}(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)S'\mathbf{B}_2(0) + 2\dot{z}(t)Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$+ 2\sigma\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)\,d\eta\right)\dot{z}(t)Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0).$$

После этого нетрудно убедиться, что имеет место цепочка равенств

$$[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}SQ(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t) = \sigma u(t)\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$+ 2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}S\left(\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)\,d\eta\right)Q^2(t)S' \times \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$+ 2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}S\Lambda(0)Q^2(t)S' \times \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) = \sigma u(t)\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$+ 2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}S\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)\,d\eta + \Lambda(0)\right]Q^2(t)S' \times \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)$$
$$= \sigma u(t)I\mathbf{B}_2(t) + 2A_1(t)\mathbf{B}_2(t) = [2A_1(t) + \sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t).$$

С учетом этого соотношения уравнение (4.17) принимает вид

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = [2A_2(t) + \tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t) + [2A_1(t) + \sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t).$$

Тем самым функция $\mathbf{B}_1(t)$, определяемая согласно (4.14), является решением этого уравнения. Наконец, учитывая, что $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$, $Q(0) = I$, легко проверить, что предъявленное решение (4.14) удовлетворяет начальному условию. Итак, функция $\mathbf{B}_1(t)$ является решением задачи Коши (4.13). Утверждение доказано.

Итак, все подготовлено для того, чтобы перейти к исследованию разрешимости задачи Коши для ОДУ (3.4.6). Покажем, что в этом случае справедливо

**Утверждение 5.** *Пусть вектор-столбцы* $\mathbf{B}_2(t)$, $\mathbf{B}_1(t)$ *и скалярная функция* $C_2(t)$ *определяются согласно* (3.15), (4.14) *и* (3.16). *Пусть, помимо этого, функция* $v(t) = \operatorname{tr} A_2(t)$ *имеет вид* (3.18), *а* $u(t) = \operatorname{tr} A_1(t)$ *— решение линейного уравнения Вольтерра второго рода* (4.4) *с ядром* (4.5) *и свободным членом* (4.12). *Тогда задача Коши*

$$\dot{C}_1(t) = \tau v(t)C_1(t) + \sigma u(t)C_2(t) + 2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)), \quad C_1(t)|_{t=0} = C_1(0), \tag{4.18}$$

*имеет следующее решение:*

$$C_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\Bigg[C_1(0) + 2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))$$
$$+ 2z^2(t)(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + \sigma\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)$$
$$\times [C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2]$$
$$- \sigma\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\Bigg], \tag{4.19}$$

*где функция $z(t)$ определяется из* (3.10) *и удовлетворяет соотношению* (3.19).

Доказательство. Для упрощения записи формулы (4.19) введем обозначение

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_1(t) = C_1(0) + 2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + 2z^2(t)(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + \sigma\left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)\\ \times [C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2]\\ - \sigma\left(\int_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2. \quad (4.20)\end{aligned}$$

Тем самым формула (4.19) принимает вид

$$C_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\mathbb{C}_1(t). \quad (4.21)$$

Прежде всего отметим, что $z(0)=0, \dot z(t)=1$. Таким образом, легко видеть, что предъявленная функция (4.19) удовлетворяет начальному условию $C_1(t)|_{t=0} = C_1(0)$. Дифференцируя (4.21) по времени и принимая во внимание соотношения (3.19), (4.20), имеем

$$\dot C_1(t) = \tau v(t)C_1(t) + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\dot{\mathbb{C}}_1(t). \quad (4.22)$$

Теперь, исходя из (4.20), нужно вычислить $\dot{\mathbb{C}}_1(t)$. Итак, учитывая формулу (3.20), получим

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{C}}_1(t) = 2\dot z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + 4z(t)\dot z(t)(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + 4z(t)\dot z(t)(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + 8z^2(t)\dot z(t)(Q^3(t)\Lambda(0)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + \sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)[C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))] + \sigma\left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)\\ \times \{\dot z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + 2z(t)\dot z(t)(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + \dot z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2 + 4z(t)\dot z(t)(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\}\\ - 4\sigma\dot z(t)\left(\int_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)).\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, можно упростить. В самом деле, используя (3.21), нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned}\dot z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + 2z(t)\dot z(t)(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + \dot z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2 + 4z(t)\dot z(t)(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ = 2\dot z(t)(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbb{C}}_1(t) &= 2\dot z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)) + 4z(t)\dot z(t)(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad + 4z(t)\dot z(t)(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad + 8z^2(t)\dot z(t)(Q^3(t)\Lambda(0)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad + \sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)[C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))]\\
&\quad + 2\sigma\dot z(t)\left(\int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad - 4\sigma\dot z(t)\left(\int\limits_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)).
\end{aligned}
$$

Умножая последнее соотношение на $[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}$ и принимая во внимание формулу (3.21), несложно проверить, что справедлива цепочка равенств

$$
\begin{aligned}
[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\dot{\mathbb{C}}_1(t) &= 2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}(Q(t)[I + 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad + 4z(t)[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}(Q^2(t)\Lambda(0)[I + 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad + \sigma u(t)C_2(t) + 2\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad - 4\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int\limits_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&= \sigma u(t)C_2(t) + 2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}(Q^2(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad + 4z(t)[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}(Q^3(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad + 2\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&\quad - 4\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int\limits_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta\right)(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\
&= \sigma u(t)C_2(t) + 2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)).
\end{aligned}
$$

Подставляя это выражение в формулу (4.22), приходим к ОДУ

$$
\dot C_1(t) = \tau v(t)C_1(t) + \sigma u(t)C_2(t) + 2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)).
$$

Таким образом, скалярная функция $C_1(t)$, определяемая посредством формулы (4.19), является решением задачи Коши (4.18). Утверждение доказано.

Замечание 3. Нетрудно проверить, что если вместо $u(t)$ рассмотреть функцию

$$
u_0(t) = u(t)[\dot z(t)]^{-\frac{1}{p}}, \tag{4.23}
$$

то $u_0(t)$ будет удовлетворять линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$
u_0(t) = \sigma\int\limits_0^t K_0(t,\eta)u_0(\eta)\,d\eta + f_0(t) \tag{4.24}
$$

с ядром

$$K_0(t,\eta) = \dot z(\eta)\,\mathrm{tr}[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)] \tag{4.25}$$

и свободным членом

$$f_0(t) = \mathrm{tr}[Q^2(t)\Lambda(0)]. \tag{4.26}$$

При этом матрицы $A_k(t)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ и скалярные функции $C_k(t)$, $k = 1, 2$, принимают вид

$$A_2(t) = \dot z(t) SQ(t)D(0)S', \tag{4.27}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot z(t) SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{4.28}$$

$$C_2(t) = \dot z(t)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right], \tag{4.29}$$

$$A_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} S\left[\sigma\int\limits_0^t \dot z(\eta)u_0(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)\,d\eta + \Lambda(0)\right] Q^2(t)S', \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} SQ(t)\Bigg[\sigma\left(\int\limits_0^t \dot z(\eta)u_0(\eta)Q^{-1}(\eta)\,d\eta\right) Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)\\ + 2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg],\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}C_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\Bigg[C_1(0) + 2z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + 2z^2(t)(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + \sigma\left(\int\limits_0^t \dot z(\eta)u_0(\eta)\,d\eta\right)[C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))\\ + z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2] - \sigma\left(\int\limits_0^t z(\eta)\dot z(\eta)u_0(\eta)\,d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\Bigg].\end{aligned} \tag{4.32}$$

Замечание 4. Очевидно, что если ввести в рассмотрение матрицу $\Lambda(t) = \mathrm{diag}[\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$ с вещественными собственными значениями вида

$$\begin{aligned}\lambda_k(t) = \left[\sigma d_k(t)\int\limits_0^t [1 - 2d_k(0)z(\eta)][\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)\,d\eta + \lambda_k(0)\right]\\ \times [1 - 2d_k(0)z(t)]^{-2}[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

то формула (4.30) запишется так:

$$A_1(t) = S\Lambda(t)S', \tag*{$(4.30)'$}$$

$$\Lambda(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma\int\limits_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)\,d\eta + \Lambda(0)\right]Q^2(t).$$

Наконец, отметим, что вопросу диагонализации квадратных матриц $A(\chi) = [a_{ij}(\chi)]$, $i,j = 1,2,\dots,n$, элементы которых суть голоморфные функции комплексного переменного $\chi$, посвящен § 2, из [50, гл. II].

**5. О свойствах решений системы (3.4.7)–(3.4.9).** Полученные в пп. 3, 4 результаты позволяют продолжить исследование разрешимости переопределенной системы уравнений (3.4). Это весьма сложная задача. Поэтому подчиним исследование системы АДУ (3.4) изучению разрешимости уравнений (3.4.1)–(3.4.9), рассматриваемых в определенной последовательности. Известно [43], что переопределенные системы уравнений могут вообще не иметь решений. В связи с этим покажем, что система АДУ (3.4), которая является переопределенной, имеет решения, отличные от тривиального: $A_k(t) = 0$, $\mathbf{B}_k(t) = \mathbf{0}$, $C_k(t) = 0$, $k = 1,2$.

Наша ближайшая задача заключается в исследовании разрешимости алгебраического уравнения (3.4.7) в классе диагональных матриц вида $(4.30)'$. Из (3.4.7), $(4.30)'$ следует, что

$$\lambda_k(t)[\lambda u(t) + 2\xi\lambda_k(t)] = 0$$

где

$$u(t) = \operatorname{tr} A_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t); \quad \xi = p(\lambda+1) - \lambda; \quad \xi \neq 0; \quad \lambda \neq 0.$$

Тем самым для любого $k = 1,2,\dots,n$ либо $\lambda_k(t) = 0$, либо $\lambda_k(t) = -\frac{\lambda}{2\xi}u(t)$. Следовательно, все ненулевые $\lambda_k(t)$ равны между собой. Пусть $\mathscr{K} = \{k : \lambda_k(t) \neq 0\} = m \leq n$. Тогда из соотношения $\lambda u(t) + 2\xi u(t) = 0$ вытекает зависимость

$$\lambda m \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) + 2\xi \sum_{\mathscr{K}} \lambda_k(t) = 0.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) = \sum_{\mathscr{K}} \lambda_k(t) = \operatorname{tr} A_1(t) \neq 0, \quad m = \operatorname{rank} A_1(t),$$

имеем $\lambda \operatorname{rank} A_1(t) + 2\xi = 0$. Если рассмотреть функцию

$$\varphi(t) = -\frac{\lambda}{2\xi}u(t) = \frac{\operatorname{tr} A_1(t)}{\operatorname{rank} A_1(t)},$$

то ясно, что $\Lambda(t) = \varphi(t)E_m$, $A_1(t) = \varphi(t)SE_mS'$, где $E_m = \operatorname{diag}[e_1,\dots,e_n]$; $e_k \in \{0,1\}$.

Итак, имеет место следующий результат.

**Утверждение 6.** *Пусть* $A_1(t) = \varphi(t)SE_mS' \neq 0$, $E_m = \operatorname{diag}[e_1,\dots,e_n]$, $e_k \in \{0,1\}$, $k = 1,2,\dots,n$, $\operatorname{rank} E_m = m \in \{1,2,\dots,n\}$, $\varphi(t)$ *— произвольная вещественная функция, обладающая тем свойством, что* $\varphi(t) \neq 0$ *для всех* $t$ *из области определения* $A_1(t)$, $S \in M_n(\mathbb{R})$ *— вещественная ортогональная матрица. Тогда если* $m = -2\xi/\lambda$, *то* $A_1(t)$ *является решением матричного уравнения* (3.4.7) *и выполняется соотношение*

$$\operatorname{rank} E_m = \operatorname{rank} A_1(t) = -\frac{2\xi}{\lambda}, \tag{5.1}$$

*где* $\xi = p(\lambda+1) - \lambda$; $\xi \neq 0$; $\lambda, p \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$, $p \neq 0$.

Доказательство. Очевидно, что каждая из матриц $E_m$ эквивалентна [47] матрице $\operatorname{diag}[1,\dots,1,0,\dots,0]$, в которой $e_k = 1$ для $k = 1,2,\dots,m$ и $e_k = 0$ для

$k = m+1,\dots,n$. Тем самым ниже, не теряя общности, будем предполагать, что $E_m = \operatorname{diag}[1,\dots,1,0,\dots,0]$. Легко видеть, что $E_m = E_m^2$, т. е. матрица $E_m$ идемпотентна. Так как $A_1(t)$ и $E_m$ связаны соотношением $A_1(t) = \varphi(t)SE_mS'$, причем $A_1(t) \neq 0$, $\varphi(t) \neq 0$, то матрицы $A_1(t)$ и $E_m$ также эквивалентны. С другой стороны, известно, что для эквивалентности двух вещественных $n\times n$-матриц необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый ранг. Из этого в силу того, что $\operatorname{rank} E_m = m$ и $m = -\frac{2\xi}{\lambda}$ следует справедливость цепочки равенств (5.1). Наконец, с учетом того, что

$$m = -\frac{2\xi}{\lambda}, \quad E_m = E_m^2, \quad \varphi(t) \neq 0,$$

нетрудно убедиться, что матрица $A_1(t) = \varphi(t)SE_mS'$ удовлетворяет уравнению (3.4.7). В самом деле, имеем

$$\lambda(\operatorname{tr} A_1)A_1 + 2\xi A_1^2 = \lambda m\varphi^2(t)SE_mS' + 2\xi\varphi^2(t)SE_m^2S' = \lambda m\varphi^2(t)S(E_m - E_m^2)S' \equiv 0,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$; $m \in \{1,2,\dots,n\}$. Ясно, что $A_1(t) \in M_n(\mathbb{R})$ — вещественная симметричная матрица. Утверждение доказано.

Так как с одной стороны $\xi = -\frac{\lambda m}{2}$, а с другой $\xi = p(\lambda+1) - \lambda$, параметры исследуемой системы АДУ (3.4) связаны соотношением $2p(\lambda+1) = \lambda(2-m)$. В этом случае $\tau = \frac{\lambda}{p}$, $\sigma = -\frac{2p}{m}$, $\lambda \neq 0$, $p \neq 0$.

Замечание 5. Если $\lambda = -\frac{2}{m}$, то из зависимости $2p(\lambda+1) = \lambda(2-m)$ следует, что либо $m = 2$, либо $p = 1$, где $m \in \{1,2,\dots,n\}$. Итак, если $m = 2$, то $\lambda = -1$, $\tau = -\frac{1}{p}$, $\sigma = -p$, $\xi = 1$, если $p = 1$, то $\lambda = \tau = \sigma = -\frac{2}{m}$, $\xi = 1$.

В силу зависимости $m = -\frac{2\xi}{\lambda}$ и с учетом вида матрицы $A_1(t)$ уравнения (3.4.8), (3.4.9) соответственно запишутся в виде

$$(I - E_m)S'\mathbf{B}_1(t) = 0, \tag{5.2}$$

$$|\mathbf{B}_1(t)|^2 = 2\varphi(t)C_1(t). \tag{5.3}$$

К исследованию выполнимости алгебраических уравнений (5.2), (5.3) мы вернемся ниже, после того как будут найдены вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_1(t)$.

Всюду ниже при фиксированном $m \in \{1,2,\dots,n\}$ будем отыскивать решения системы АДУ (3.4) при условии, что $A_1(t) = \varphi(t)SE_mS'$. Дальнейшее исследование системы АДУ (3.4) распадается на два независимых случая: $p = 2$ и $p \neq 2$.

Прежде чем перейти к рассмотрению случая $p \neq 2$, сформулируем утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем.

**Утверждение 7.** *Пусть $p \neq 2$. Тогда для того чтобы матрицы*

$$A_1(t) = \varphi(t)SE_mS', \tag{5.4}$$

$$A_2(t) = \psi(t)SE_mS' \tag{5.5}$$

*являлись решением переопределенной системы уравнений* (3.4.1), (3.4.4), (3.4.7), *достаточно, чтобы функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяли системе ОДУ*

$$\dot\varphi(t) = (\tau m + \sigma m + 4)\varphi(t)\psi(t), \tag{5.6}$$

$$\dot\psi(t) = (\lambda m + 2)\psi^2(t), \tag{5.7}$$

*где* $\varphi(t) \neq 0$ *для всех* $t$ *из области определения* $A_1(t)$; $\psi(t) \neq 0$ *для всех* $t$ *из области определения* $A_2(t)$; $\tau = \frac{\lambda}{p}$; $\sigma = -\frac{2p}{m}$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Из утверждения 6 следует, что матрица $A_1(t)$ вида (5.4) является решением уравнения (3.4.7). Подставляя функцию $A_1(t)$ в матричное уравнение (3.4.4) и учитывая формулу (3.24), после несложных преобразований приходим к равенству

$$\left[\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} - \tau \operatorname{tr} A_2(t)\right] E_m = [4E_m + \sigma m I]\, D(t),$$

где $D(t)$ — матрица, определяемая согласно (3.22). Это соотношение в силу вида матрицы $E_m$ распадается на два равенства:

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} - \tau \operatorname{tr} A_2(t) = (\sigma m + 4) d_k(t); \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$0 = \sigma m d_k(t); \quad k = m+1, \dots, n,$$

причем $\sigma m + 4 = 2(2-p) \neq 0$. Так как $\sigma m = -2p \neq 0$, то $d_k(t) \equiv 0$ для $k = m+1, \dots, n$. Тем самым если $k = 1, 2, \dots, m$, то собственные значения $d_k(t)$ матрицы $A_2(t)$ не зависят от $k$ и имеют вид

$$d_k(t) = \frac{1}{\sigma m + 4}\left[\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} - \tau \operatorname{tr} A_2(t)\right] \stackrel{\triangle}{=} \psi(t), \tag{5.8}$$

т. е. $D(t) = \psi(t) E_m$. Итак, если матрица $A_2(t)$ определяется согласно (5.5), то $\operatorname{tr} A_2(t) = m\psi(t)$. Формула (5.8) позволяет получить ОДУ (5.6). С другой стороны, несложно убедиться, что из (3.4.1) с учетом (5.5) следует ОДУ (5.7). Утверждение доказано.

**Следствие 1.** *Если матрица* $A_2(t)$ *определяется формулой* (5.5), *то*

$$A_2(t) = \frac{d(0)\dot{z}(t)}{1 - 2d(0)z(t)} S E_m S', \tag{5.9}$$

*причем*

$$\psi(t) = \psi(0)[1 - 2\psi(0)z(t)]_+^{-(\lambda m+2)/2}, \tag{5.10}$$

*где* $\lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$; $m \in \{1, 2, \dots, n\}$; $\psi(0) \neq 0$; $d(0) \neq 0$.

Доказательство. Вводя обозначение $q_k(t) = [1 - 2d_k(0)z(t)]^{-1}$, перепишем матрицу (3.17) в виде $Q(t) = \operatorname{diag}[q_1(t), \dots, q_n(t)]$. Из утверждения 7 вытекает, что $d_k(0) \equiv 0$ для $k = m+1, \dots, n$ и $d_k(0) = \psi(0) \stackrel{\triangle}{=} d(0)$ для $k = 1, 2, \dots, m$. Поэтому $q_k(t) = [1 - 2d(0)z(t)]^{-1}$ при $k = 1, 2, \dots, m$ и $q_k(t) = 1$, при $k = m+1, \dots, n$. При этом мы учли, что $z(0) = 0$. Тем самым

$$Q(t) = [1 - 2d(0)z(t)]^{-1} E_m + (I - E_m). \tag{5.11}$$

С другой стороны, из (5.8) в силу (3.22) получим, что

$$\psi(t) = d(0)[1 - 2d(0)z(t)]^{-1} \dot{z}(t), \tag{5.12}$$

где функция $\dot{z}(t)$ определяется согласно (3.10) и в рассматриваемом случае принимает вид

$$\dot{z}(t) = [1 - 2d(0)z(t)]^{-\lambda m/2}, \quad z(0) = 0. \tag{5.13}$$

Итак, из (5.5) с учетом (5.12) следует, что имеет место формула (5.9). Кроме того, соотношения (5.12), (5.13) приводят к справедливости (5.10). Следствие доказано.

Замечание 6. Если $\lambda m+2\neq 0$, $p\neq 2$, то задача Коши (5.13) имеет решение

$$z(t)=\frac{1}{2d(0)}-\frac{1}{2d(0)}[1-(\lambda m+2)d(0)t]_+^{2/(\lambda m+2)},\tag{5.14}$$

причем

$$\psi(t)=\psi(0)[1-(\lambda m+2)\psi(0)t]^{-1}.\tag{5.15}$$

Если $\lambda=-\frac{2}{m}, p\neq 2$, то решение задачи Коши (5.13) определяется формулой

$$z(t)=\frac{1}{2d(0)}[1-\exp(-2d(0)t)],\tag{5.16}$$

причем $\psi(t)=\psi(0)$. Здесь $\lambda\in\mathbb{R}$; $\lambda\neq 0$; $\psi(0)=d(0)\neq 0$; $m\in\{1,2,\dots,n\}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кершнер Р.* О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Acta Math. Acad. Sci. 1978. V. 32, N 3–4. P. 301–330.
2. *Антонцев С. Н.* Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986.
3. *Мартинсон Л. К.* Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.
4. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 2. С. 135–176.
5. *Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т. 28. С. 95–205.
6. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
7. *Aronson D. G.* Regularity of flows in porous media: a survey // Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. New York: Springer, 1988. V. 1. P. 35–49.
8. *Галактионов В.А., Посашков С.А.* Неограниченное точное решение уравнения нелинейной теплопроводности с источником. Москва, 1988. (Препринт/ИПМ АН СССР; № 42).
9. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 4. С. 497–506.
10. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Примеры несимметричного полного остывания и режимов с обострением для квазилинейных уравнений теплопроводности. Москва, 1994. (Препринт/Ин-т прикладной математики РАН; № 21).
11. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 3. С. 373–383.
12. *Галактионов В. А., Посашков С. А., Свирщевский С. Р.* Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 2. С. 253–261.
13. *Galaktionov V. A.* On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications // J. Differential Integral Equations. 1990. V. 3, N 5. P. 863–874.
14. *Galaktionov V. A.* Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities. Bristol, 1991. 39 (Препринт/School of Mathematics Univ. Bristol; N AM-91-11).
15. *Galaktionov V. A.* Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities. , 1995. 225–246 (Препринт/Proceedings of the Royal Society of Edinburgh; N 125A).
16. *King J. R.* Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46, N 3. P. 419–436.
17. *Пухначев В. В.* Преобразование эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 294, № 3. С. 535–538.

**18.** *Пухначев В. В.* Преобразования взаимности радиальных уравнений нелинейной теплопроводности // Записки научных семинаров ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 151–163.
**19.** *Пухначев В.В.* Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.
**20.** *Meirmanov A. M., Pukhnachev V. V., Shmarev S. I.* Evolution equations and Lagrangian coordinates. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1997.
**21.** *Косыгина Е.Р.* Об анизотропных точных решениях многомерного уравнения нестационарной фильтрации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 2. С. 241–259.
**22.** *Olver P. J.* Symmetry and explicit solutions of partial differential equations. 1991. (Preprint/Univ. of Minnesota).
**23.** *Olver P.J.* Direct reduction and differential constrains // Proceedings Roy. Soc. London. 1994. V. 444, N 1922. P. 509–523.
**24.** *Сидоров А.Ф.* Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.
**25.** *Титов С.С.* О движении фронта нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1996. Т. 37, № 4. С. 113–118.
**26.** *Bersch M., Kersner R., Peletier L. A.* Positivity versus localization in degenerate diffusion equations // Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. 1985. V. 9, N 10. P. 987–1008.
**27.** *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Коммутационные представления и преобразования Беклунда для нелинейных эволюционных уравнений с одной пространственной переменной. Иркутск, 1990. 70 (Препринт/ИрВЦ СО АН СССР; № 7).
**28.** *Rudykh G. A.,Semenov E. I.* Application of Liouville's equation to construction of special exact solutions for the quasilinear heat equation // IMACS Ann. Comput. and Appl. Math. 1990. V. 8. P. 193–196.
**29.** *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Об одном подходе построения частных точных решений квазилинейного уравнения теплопроводности с $N$-пространственными переменными. Иркутск, 1991. 21 (Препринт/ИрВЦ СО АН СССР; № 6).
**30.** *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Построение точных решений многомерного квазилинейного уравнения теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 8. С. 1228–1239.
**31.** *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1130–1139.
**32.** *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком) // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 6. С. 971–977.
**33.** *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1129–1138.
**34.** *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 2. С. 250–256.
**35.** *Рудых Г. А.* Точные неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 3. С. 323–324.
**36.** *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
**37.** *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
**38.** *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу-Юй-Линь* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 5. С. 667–704.
**39.** *Калашников А. С.* О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 2. С. 440–443.
**40.** *Калашников А. С.* Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1972. № 6. С. 45–49.
**41.** *Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
**42.** *Хирота Р.* Прямые методы в теории солитонов // Солитоны. М.: Мир, 1983. С. .
**43.** *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
**44.** *Титов С. С.* Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика. 1988. № 11. С. 104–110.

**45.** *Похожаев С. И.* Об одной задаче Л. В. Овсянникова // Прикл. механика и техн. физика. 1989. № 2. С. 5–10.

**46.** *Галактионов В. А., Посашков С. А., Свирщевский С. Р.* Об инвариантных множествах и точных решениях нелинейных эволюционных уравнений с квадратичными нелинейностями. Москва, 1994. (Препринт/ИПМ РАН; № 22).

**47.** *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

**48.** *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Гостехиздат, 1948.

**49.** *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

**50.** *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

*Статья поступила 19 ноября 1998 г.*

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН,*
*ул. Лермонтова, 134, 664033 Иркутск*
`rudykh@icc.ru; semenov@icc.ru`