Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 510.6

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ТИПОВ m–ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СУПЕРАТОМНЫХ I–АЛГЕБР

С. Г. Пыркин

Аннотация: Изучается проблема m-эквивалентности суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом (I-алгебр). Понятие m-эквивалентности рассматривается в терминах конечных частичных изоморфизмов, что очень удобно при работе с булевыми алгебрами и их обогащениями выделенными идеалами, так как существует возможность перехода при оперировании с m-эквивалентностью над указанными выше объектами к их прямым слагаемым. При этом данное понятие m-эквивалентности обладает таким свойством, что на m-эквивалентных булевых алгебрах истинны одни и те же предложения с не более чем m кванторами. На основе элементарной классификации исследуемых объектов Д. Е. Пальчунова получено полное описание типов m-эквивалентности суператомных I-алгебр. Библиогр. 14.

Введение

В работе исследуются элементарные теории булевых алгебр в обогащенной сигнатуре.

Изучение данных объектов началось в 40-х гг. В 1949 г. А. Тарский [1] анонсировал, а в 1964 г. Ю. Л. Ершов [2] дал доказательство полного описания элементарных теорий булевых алгебр, из которого следует, что теория булевых алгебр и элементарная теория произвольной булевой алгебры разрешимы. В [2] также было доказано, что теория булевой алгебры разрешима по крайней мере в следующих двух случаях: 1) $\mathfrak{A}/I$ конечна; 2) существует $\sup\{x \mid x \in I\}$ и $\mathfrak{A}$ атомна. М. Рабин в [3] доказал, что теория класса булевых алгебр с выделенным идеалом разрешима. В [4] построены булевы алгебры с выделенными идеалами с неразрешимой теорией. В [5, 6] получены критерии m-эквивалентности для булевых алгебр.

Наиболее систематически булевы алгебры с выделенными идеалами (I-алгебры) изучались Д. Е. Пальчуновым. В [7] полностью описаны элементарные теории суператомных I-алгебр и найден критерий разрешимости теорий булевых алгебр с одним выделенным идеалом. В [8, 9] исследовались существование у данной булевой алгебры обогащения λ выделенными идеалами с неразрешимой элементарной теорией и континуума обогащений с различными элементарными теориями, счетная категоричность, конечная аксиоматизируемость. На описании суператомных I-алгебр с одним выделенным идеалом, полученным Д. Е. Пальчуновым, базируется основной результат этой работы.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Интеграция» (проект 274).

В настоящей работе изучается m-эквивалентность суператомных I-алгебр, получен критерий m-эквивалентности этих алгебраических систем. Понятие m-эквивалентности дано в терминах конечных частичных изоморфизмов [9, 11, 12], что очень удобно при работе с булевыми алгебрами и их обогащениями выделенными идеалами, так как возможен переход при оперировании с m-эквивалентностью над указанными выше объектами к их прямым слагаемым. При этом данное понятие m-эквивалентности обладает таким свойством, что, с одной стороны, на m-эквивалентных булевых алгебрах истинны одни и те же предложения с не более чем m кванторами [13], а с другой, как показано в [9], оно является формульно выразимым.

Через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ будем обозначать булевы алгебры с выделенным идеалом, рассматриваемые в сигнатуре $\Sigma = \langle \cup, \cap, {}^-, 0, 1, I\rangle$, где I — унарный предикат, выделяющий идеал. Буквами A, B будем обозначать основные множества алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ соответственно. Если x — элемент булевой алгебры $\mathfrak{A}$, то положим $(x) = \langle \hat{x}, \cup, \cap, {}^-, 0, x, I \cap x\rangle$, где $\hat{x} = \{a \in A \mid a \leq x\}$. Под формулой будем понимать формулу сигнатуры Σ с одной свободной переменной. В данной работе будем рассматривать только такие булевы алгебры, в которых $0 \neq 1$. С простейшими свойствами булевых алгебр можно познакомиться в [14]. Что касается булевых алгебр с выделенными идеалами, то всю необходимую информацию о них можно найти в [7–9].

§ 1. Основные понятия и определения

Определение 1. Пусть даны I-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $m \in \omega$, $L \subseteq A$, L конечно и f — отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_f$ подмодель $\mathfrak{A}$, порожденную множеством L, через $\bar{f}$ — ограничение f на $\mathfrak{A}_f$. Назовем f *частичным изоморфизмом* $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если $\bar{f}$ — изоморфное вложение $\mathfrak{A}_f$ в $\mathfrak{B}$.

Определение 2. Пусть даны I-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $m \in \omega$. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *m-эквивалентна* $\mathfrak{B}$ и обозначать $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, если существуют непустые множества F_k, $k \leq m$, конечных частичных изоморфизмов $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ со следующим свойством: если $f \in F_k$, $0 \leq k < m$, то для любых $a \in A$ и $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_{k+1}$, для которых $a \in \operatorname{dom} g_1$, $b \in \operatorname{im} g_2$, $f \subseteq g_1$, $f \subseteq g_2$.

Замечание 1. Если в I-алгебрах $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ выполняется $1^{\mathfrak{A}} \notin I$, но $1^{\mathfrak{B}} \in J$, то не существует такого натурального m, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. Поэтому положим в этом случае по определению $\mathfrak{A} \equiv_{-1} \mathfrak{B}$.

В [7] введена элементарная характеристика $r(\mathfrak{A}) = (r_1(\mathfrak{A}), r_2(\mathfrak{A}), r_3(\mathfrak{A}))$ для суператомных I-алгебр с одним выделенным идеалом и доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Если $x = x_1 \cup x_2$, $x_1 \cap x_2 = 0$, то*
а) $r_3(x) = \max(r_3(x_1), r_3(x_2))$;
б) *если $r_3(x_1) = r_3(x_2)$, то $r_i(x) = r_i(x_1) + r_i(x_2)$ при $i = 1, 2$;*
в) *если $r_3(x_1) = r_3(x_2) + 1$, то $r_1(x) = r_1(x_1)$ и $r_2(x) = r_2(x_1) + r_1(x_2)$;*
г) *если $r_3(x_1) > r_3(x_2) + 1$, то $r(x) = r(x_1)$.*

§ 2. m-Эквивалентность суператомных I-алгебр

Введем обозначение:

$$m[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \begin{cases} m, & \text{если } m \text{ максимальное такое, что } \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}, \\ \infty, & \text{если для любого } m \in \omega \text{ имеет место } \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}. \end{cases}$$

В [9] доказаны следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть даны I-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $m \in \omega$. Предположим, что*

1) для любого $a_1 \in A$ существует $b_1 \in B$ такой, что $m[(a_1),(b_1)] \geq m-1$ и $m[(\bar{a}_1),(\bar{b}_1)] \geq m-1$;

2) для любого $b_2 \in B$ существует $a_2 \in A$ такой, что $m[(a_2),(b_2)] \geq m-1$ и $m[(\bar{a}_2),(\bar{b}_2)] \geq m-1$.

Тогда $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq m$.

Предложение 2. *Пусть даны I-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $m \in \omega$. Предположим, что*

1) для любого $a_1 \in A$ существует $b_1 \in B$ такой, что $(r(a_1) = r(\mathfrak{A})$ и $r(b_1) = r(\mathfrak{B}))$ или $m[(a_1),(b_1)] \geq m-1$ и $(r(\bar{a}_1) = r(\mathfrak{A})$ и $r(\bar{b}_1) = r(\mathfrak{B}))$ или $m[(\bar{a}_1),(\bar{b}_1)] \geq m-1$;

2) для любого $b_2 \in B$ существует $a_2 \in A$ такой, что $(r(a_2) = r(\mathfrak{A})$ и $r(b_2) = r(\mathfrak{B}))$ или $m[(a_2),(b_2)] \geq m-1$ и $(r(\bar{a}_2) = r(\mathfrak{A})$ и $r(\bar{b}_2) = r(\mathfrak{B}))$ или $m[(\bar{a}_2),(\bar{b}_2)] \geq m-1$.

Тогда $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq m$.

Предложение 3. *Пусть даны I-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $m \in \omega$. Если существует $a \in A$ ($b \in B$) такой, что для любого $b \in B$ ($a \in A$) $m[(a),(b)] \leq m-1$ или $m[(\bar{a}),(\bar{b})] \leq m-1$, то $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \leq m$.*

Из [7] следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = \infty$ тогда и только тогда, когда суператомные I-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны, т. е. когда $r(\mathfrak{A}) = r(\mathfrak{B})$.

Введем на множестве характеристик суператомных I-алгебр обратный лексикографический порядок $\leq'$. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — суператомные I-алгебры, $r(\mathfrak{A}) = (n_1,n_2,n_3)$, $r(\mathfrak{B}) = (k_1,k_2,k_3)$, $r(\mathfrak{A}) <' r(\mathfrak{B})$. Тогда максимальное m такое, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, вычисляется следующим образом:*

при $n_3 < k_3$

<table>
<tr><td rowspan="5">$n_2 = 0$</td><td colspan="3">$n_3 = 1$</td><td>$m = -1$</td><td>(0)</td></tr>
<tr><td colspan="3">$n_3 = 2$</td><td>$m = 0$</td><td>(1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n_3 = 3$</td><td colspan="2">$n_1 = 1$</td><td>$m = 0$</td><td>(2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$n_1 \geq 2$</td><td>$m = 1$</td><td>(3)</td></tr>
<tr><td colspan="3">$n_3 \geq 4$</td><td>$m = n_3 - 2$</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td rowspan="11">$n_2 \neq 0$</td><td rowspan="4">$n_3 = 2$</td><td rowspan="2">$n_1 = 1$</td><td>$r(\mathfrak{B}) = (1,0,3)$</td><td>$m = 1$</td><td>(5)</td></tr>
<tr><td>$r(\mathfrak{B}) = (1,0,3)$</td><td>$m = 0$</td><td>(6)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n_1 \geq 2$</td><td>$r(\mathfrak{B}) = (1,0,3)$</td><td>$m = 0$</td><td>(7)</td></tr>
<tr><td>$r(\mathfrak{B}) \neq (1,0,3)$</td><td>$m = 1$</td><td>(8)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$n_3 = 3$</td><td colspan="2">$n_1 = 1$</td><td>$m = 1$</td><td>(9)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n_1 \geq 2$</td><td>$n_2 = 1$</td><td>$m = 1$</td><td>(10)</td></tr>
<tr><td>$n_2 \geq 2$</td><td>$m = 2$</td><td>(11)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n_3 = 4$</td><td colspan="2">$n_2 = 1,2,3$</td><td>$m = 2$</td><td>(12)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$n_2 \geq 4$</td><td>$m = 3$</td><td>(13)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n_3 \geq 5$</td><td colspan="2">$n_2 = 1$</td><td>$m = n_3 - 2$</td><td>(14)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$n_2 \geq 2$</td><td>$m = n_3 - 1$</td><td>(15)</td></tr>
</table>

а при $n_3 = k_3$

$n_2 = 0$, $k_2 = 0$	$n_3 = 1, 2, 3$		$m = [\log_2(n_1)]$	(16)
	$n_3 \geq 4$		$m = [\log_2(n_1)] + n_3 - 2$	(17)
$n_2 = 0$, $k_2 \neq 0$	$n_3 = 2$		$m = 0$	(18)
	$n_3 = 3$	$n_1 = 1$	$m = 0$	(19)
		$n_1 \geq 2$	$m = 1$	(20)
	$n_3 \geq 4$		$m = n_3 - 2$	(21)

$n_2 \neq 0$, $k_2 \neq 0$	$n_2 = k_2$	$n_3 = 2$			$m = [\log_2(n_1)]$	(22)
		$n_3 = 3$	$n_2 = 1$		$m = [\log_2(n_1 + 1)]$	(23)
			$n_2 \geq 2$		$m = [\log_2(n_1 + 2)]$	(24)
		$n_3 = 4$	$n_2 = 1$		$m = [\log_2(n_1)] + 2$	(25)
			$n_2 \geq 2$		$m = [\log_2(n_1 + 1)] + 2$	(26)
		$n_3 \geq 5$			$m = [\log_2(n_1 + 1)] + n_3 - 2$	(27)
	$n_2 < k_2$	$n_1 < k_1$	$n_3 = 2$	$n_1 \leq n_2 + 1$	$m = [\log_2(n_1)]$	(28)
				$n_1 > n_2 + 1$	$m = [\log_2(n_2 + 1)]$	(29)
			$n_3 = 3$	$n_1 \leq n_2$	$m = [\log_2(n_1 + 2)]$	(30)
				$n_1 > n_2$	$m = [\log_2(n_2 + 2)]$	(31)
			$n_3 = 4$	$4n_1 \leq n_2$	$m = [\log_2(n_1 + 1)] + 2$	(32)
				$4n_1 > n_2$	$m = [\log_2(n_2 + 4)]$	(33)
			$n_3 \geq 5$	$2n_1 \leq n_2$	$m = [\log_2(n_1 + 1)] + n_3 - 2$	(34)
				$2n_1 > n_2$	$m = [\log_2(n_2 + 2)] + n_3 - 3$	(35)
		$n_1 = k_1$	$n_3 = 2$		$m = [\log_2(n_2 + 1)]$	(36)
			$n_3 = 3$	$n_1 = 1$	$m = [\log_2(n_2 + 1)]$	(37)
				$n_1 \geq 2$	$m = [\log_2(n_2 + 2)]$	(38)
			$n_3 = 4$		$m = [\log_2(n_2 + 4)]$	(39)
			$n_3 \geq 5$		$m = [\log_2(n_2 + 2)] + n_3 - 3$	(40)
		$n_1 > k_1$	$n_3 = 2$	$k_1 \leq n_2 + 1$	$m = [\log_2(k_1)]$	(41)
				$k_1 > n_2 + 1$	$m = [\log_2(n_2 + 1)]$	(42)
			$n_3 = 3$	$k_1 \leq n_2$	$m = [\log_2(k_1 + 2)]$	(43)
				$k_1 > n_2$	$m = [\log_2(n_2 + 2)]$	(44)
			$n_3 = 4$	$4k_1 \leq n_2$	$m = [\log_2(k_1 + 1)] + 2$	(45)
				$4k_1 > n_2$	$m = [\log_2(n_2 + 4)]$	(46)
			$n_3 \geq 5$	$2k_1 \leq n_2$	$m = [\log_2(k_1 + 1)] + n_3 - 2$	(47)
				$2k_1 > n_2$	$m = [\log_2(n_2 + 2)] + n_3 - 3$	(48)

Доказательство. Рассмотрим следующие функции:

$$\varphi(t) = \max\{k \mid t \geq 2^k\}, \quad \psi(t) = \min\{k \mid t \leq 2^1 + \cdots + 2^k\}, \quad \psi(0) \risingdotseq 0,$$

$$\chi(t) = \max\{k \mid t \geq 2^1 + \cdots + 2^k\}, \quad \chi(1) \risingdotseq 0, \quad \chi(0) \risingdotseq 0,$$

$$\tau(t) = \min\{k \mid t < 2^2 + \cdots + 2^{k+2}\}.$$

Введем понятие ранга пары булевых I-алгебр:

$$\operatorname{rang}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \begin{cases} (r_3(\mathfrak{A}), r_2(\mathfrak{A}), r_1(\mathfrak{A}), r_3(\mathfrak{B}), r_2(\mathfrak{B}), r_1(\mathfrak{B})), & \text{если } r(\mathfrak{A}) \leq' r(\mathfrak{B}), \\ (r_3(\mathfrak{B}), r_2(\mathfrak{B}), r_1(\mathfrak{B}), r_3(\mathfrak{A}), r_2(\mathfrak{A}), r_1(\mathfrak{A})), & \text{если } r(\mathfrak{A}) \geq' r(\mathfrak{B}). \end{cases}$$

На множестве этих рангов зададим лексикографический порядок. Очевидно, что получившееся упорядоченное множество является вполне упорядоченным множеством, следовательно, по нему можно вести трансфинитную индукцию.

Итак, доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом показывается, что для любого из случаев (1)–(48) справедливо неравенство $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \leq m$. На втором этапе также для всех случаев (1)–(48) доказывается, что имеет место обратное неравенство $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq m$. Из этих двух утверждений и вытекает утверждение теоремы: $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = m$. Случай (0) следует из замечания 1. Доказательство базиса индукции и индукционного шага будет осуществляться параллельно. Доказательства многих случаев очень похожи, поэтому приведем доказательство только основных случаев: (4), (14), (15), (17), (21), (27), (34), (40), (47).

Для краткости в дальнейшем вместо выражения «так как $\operatorname{rang}((a),(b)) < \operatorname{rang}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ (либо $\operatorname{rang}((\bar{a}),(\bar{b})) < \operatorname{rang}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$), то в силу индукционного предположения по любому из случаев $(i_1),\dots(i_k)$ имеем …», где $0 \leq k \leq 48$, $i_j \in \{0,\dots,48\}$ для всех $0 \leq j \leq k$, будем просто писать «по $(i_1),\dots,(i_k)$». Выбор: $\operatorname{rang}((a),(b))) < \operatorname{rang}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ или $\operatorname{rang}((\bar{a}),(\bar{b})) < \operatorname{rang}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, будет ясен из контекста.

Этап 1

Случай 4. Пусть $b \in B$ таков, что $r(b) = (1, 0, n_3 - 1)$. Тогда для любого $a \in A$ по (0)–(15)

$$m[(a),(b)] \leq n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 3 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \leq n_3 - 2 = m$.

Случай 14. Пусть $b \in B$ таков, что $r(b) = (2, 0, n_3 - 1)$. Тогда для любого $a \in A$ по (0)–(15), (17), (21)

$$m[(a),(b)] \leq n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 3 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \leq n_3 - 2 = m$.

Случай 15. Пусть $a \in A$ таков, что $r(a) = (n_2, 0, n_3 - 1)$. Если $r_3(b) \neq n_3 - 1$, то по (0)–(15)

$$m[(a),(b)] \leq n_3 - 2 = m - 1.$$

Если $r_3(b) = n_3 - 1$, то по (4)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = n_3 - 2 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 3 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \leq n_3 - 1 = m$.

Случай 17. Если $n_1 = 1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = (1, 0, n_3)$. Тогда если $r_3(a) = n_3$, то по (0)–(15)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \leq n_3 - 3 = m - 1,$$

если же $r_3(a) \leq n_3 - 2$, то по (0)–(15)

$$m[(a),(b)] \leq n_3 - 3 = m - 1.$$

Пусть теперь $n_1 \geq 2$. Тогда возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = \left(\left[\frac{k_1}{2}\right], 0, n_3\right)$.

Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3$, то для любого $a \in A$ либо $r_1(a) \leq \left[\frac{n_1}{2}\right]$, либо $r_1(\bar{a}) \leq \left[\frac{n_1}{2}\right]$. Поэтому либо по (17)

$$m[(a),(b)] \leq \varphi\left(\left[\frac{n_1}{2}\right]\right) + n_3 - 2 = \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \leq \varphi\left(\left[\frac{n_1}{2}\right]\right) + n_3 - 2 = \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Если же $r_3(a) \le n_3 - 2$, то опять же по (0)–(15)

$$m[(a),(b)] \le n_3 - 3 \le m - 1.$$

Из предложения 3 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \le \varphi(n_1) + n_3 - 2 = m$.

Случай 21. Пусть $b \in B$ таков, что $r(b) = (1, 0, n_3 - 1)$. Тогда для любого $a \in A$ по (0)–(15)

$$m[(a),(b)] \le n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 3 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \le n_3 - 2 = m$.

Случай 27. Пусть $b \in B$ таков, что $r(b) = \big(\big[\frac{k_1+1}{2}\big], 0, n_3\big)$. Тогда

- если $r_3(a) \le n_3 - 1$, то по (0)–(15)

$$m[(a),(b)] \le n_3 - 2 \le \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

- если $r_3(a) = n_3$ и $r_2(a) \ne 0$, то по (21)

$$m[(a),(b)] = n_3 - 2 \le \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

- если $r_3(a) = n_3$, $r_2(a) = 0$, $r_1(a) < \big[\frac{n_1+1}{2}\big]$, то по (17)

$$m[(a),(b)] \le \varphi\Big(\Big[\frac{n_1+1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

- если $r_3(a) = n_3$, $r_2(a) = 0$, $r_1(a) = \big[\frac{n_1+1}{2}\big]$, то при $n_1 = 1$ по (2)–(4), (9)–(15)

$$m[(\bar a),(\bar b)] \le n_3 - 2 \le \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— при $n_1 \ge 2$ и $\big[\frac{n_1+1}{2}\big] < \big[\frac{k_1+1}{2}\big]$ по (17)

$$m[(a),(b)] = \varphi\Big(\Big[\frac{n_1+1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— при $n_1 \ge 2$ и $\big[\frac{n_1+1}{2}\big] = \big[\frac{k_1+1}{2}\big]$ выполнено $n_1 = 2k - 1$ и $r_1(\bar a) = n_1 - \big[\frac{n_1+1}{2}\big] = k - 1 = \big[\frac{n_1-1}{2}\big]$. Поэтому по (27)

$$m[(\bar a),(\bar b)] = \psi\Big(\Big[\frac{n_1-1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

- если $r_3(a) = n_3$, $r_2(a) = 0$, $r_1(a) > \big[\frac{n_1+1}{2}\big]$, то по (2)–(4), (9)–(15),(27)

$$m[(\bar a),(\bar b)] \le \psi\Big(\Big[\frac{n_1-1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 3 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \le \psi(n_1) + n_3 - 2 = m$.

Случай 34. Доказательство аналогично случаю (27).

Случай 35. Доказательство аналогично случаю (40).

Случай 40. Если $n_2 = 1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = (k_2, 0, n_3 - 1)$. Тогда для любого $a \in A$ по (0)–(15), (17), (21)

$$m[(a),(b)] \le n_3 - 3 = m - 1.$$

Если $n_2 \ge 2$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = \big(\big[\frac{k_2}{2}\big] + 1, 0, n_3 - 1\big)$. Тогда

- при $r_3(a) \le n_3 - 2$ по (0)–(15)

$$m[(a),(b)] \le n_3 - 3 < \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

- при $r_3(a) = n_3 - 1$ и $r_2(a) \ne 0$ по (21)

$$m[(a),(b)] = n_3 - 2 < \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_3(a) = n_3 - 1$ и $r_2(a) = 0$: если $r_1(a) < \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1$, то по (17)

$$m[(a),(b)] \le \varphi\Big(\Big[\frac{n_2}{2}\Big] + 1\Big) + n_3 - 3 = \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_1(a) = \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1$, $\left[\frac{n_2}{2}\right] < \left[\frac{k_2}{2}\right]$, то по (17)

$$m[(a),(b)] = \varphi\Big(\Big[\frac{n_2}{2}\Big] + 1\Big) + n_3 - 3 = \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_1(a) = \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1$, $\left[\frac{n_2}{2}\right] = \left[\frac{k_2}{2}\right]$, то $n_2 = 2l$ и $\chi\big(n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1\big) = \chi(n_2) - 1$; тогда по (21), (40)

$$m[(\bar a),(\bar b)] \le \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_1(a) > \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1$, то по (21), (40)

$$m[(\bar a),(\bar b)] \le \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1.$$

• при $r_3(a) = n_3$ по (4)

$$m[(a),(b)] = n_3 - 2 \le \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 3 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \le \chi(n_2) + n_3 - 2 = m$.

Случай 47. Доказательство аналогично случаю (27).

Случай 48. Доказательство аналогично случаю (40).

Этап 2

Случай 4. 1. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar a) \le n_3 - 2$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar b) = r(\bar a)$.

Замечание 1. Такого $b \in B$ может не существовать в случае $r_i(a) = \infty$ для некоторого i. Тогда мы выбираем $b \in B$ следующим образом:

$$r_i(b) = \begin{cases} r_i(a), & \text{если } r_i(a) < \infty, \\ 2^{m'}, & \text{если } r_i(a) = \infty, \end{cases}$$

где m' выбирается достаточно большим для того, чтобы выполнялось $(a) \equiv_m (b)$. Очевидно, что такое m' мы сможем выбрать. Ниже, когда мы будем выбирать элемент с такой характеристикой, будем писать «$r(a) \approx r(b)$» и «$m[(a),(b)] \approx \infty$». Тогда

$$r(a) = r(\mathfrak{A}),\ r(b) = r(\mathfrak{B})$$

и

$$m[(\bar a),(\bar b)] \approx \infty > n_3 - 2 = m - 1.$$

Замечание 2. Ниже в подобных случаях, т. е. когда уровень одного из элементов будет меньше $n_3 - 1$, мы будем поступать аналогичным образом. Поэтому на этих случаях останавливаться больше не будем. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar a) = n_3$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = (2, 0, n_3 - 1)$. Тогда по (3), (4)

$$m[(a),(b)] = n_3 - 3 = m - 1$$

и по (4)

$$m[(\bar a),(\bar b)] = n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1.$$

2. Если $r_3(b) > n_3$, то

• при $r_3(\bar{b}) \geq n_3$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = (2, 4, n_3 - 2)$. Тогда по (8), (11), (13), (15)

$$m[(a), (b)] \geq n_3 - 3 = m - 1,$$

и либо по (4), (17), (21)

$$m[(\bar{a}), (\bar{b})] > n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(\bar{a}), (\bar{b})] = \infty > n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_3(\bar{b}) = n_3 - 1$: если $n_3 = 4$ и $r(\bar{b}) = (1, 0, 3)$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) = (1, 1, 2)$, тогда

$$r(a) = r(\mathfrak{A}),\ r(b) = r(\mathfrak{B})$$

и по (5)

$$m[(\bar{a}), (\bar{b})] = 1 = m - 1;$$

— если $n_3 \geq 5$ или ($n_3 = 4$ и $r(\bar{b}) \neq (1, 0, 3)$), то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) = (2, 4, n_3 - 2)$, тогда

$$r(a) = r(\mathfrak{A}),\ r(b) = r(\mathfrak{B})$$

и по (8), (11), (13), (15)

$$m[(\bar{a}), (\bar{b})] = n_3 - 3 = m - 1.$$

Замечание 3. Если $r_3(b) \leq n_3$, то $r_3(\bar{b}) > n_3$. Поэтому в рассмотренных выше случаях достаточно заменить a на $\bar{a}$, b на $\bar{b}$ и наоборот. Ниже будем использовать это свойство без каких-либо оговорок. Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \geq n_3 - 2 = m$.

Случай 14. 1. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3 - 1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) \approx r(\bar{a})$. Тогда по (4)

$$m[(a), (b)] = n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}), (\bar{b})] \approx \infty > 1 = m - 1.$$

Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = (1, 1, n_3 - 1)$. Тогда по (12), (14)

$$m[(a), (b)] = n_3 - 3 = m - 1$$

и по (4), (14)

$$m[(\bar{a}), (\bar{b})] = n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1.$$

2. Если $r_3(b) > n_3$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = (1, 0, n_3 - 1)$. Тогда по (4)

$$m[(a), (b)] = n_3 - 3 = m - 1$$

и по (4)

$$m[(\bar{a}), (\bar{b})] = n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \geq n_3 - 2 = m$.

Случай 15. 1. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3 - 1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) \approx r(\bar{a})$. Тогда по (4), (14), (15)

$$m[(a), (b)] \geq n_3 - 2 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>n_3-2=m-1.$$

Если $r_3(a)=n_3$ и $r_3(\bar{a})=n_3$, то возьмем $b\in B$ такой, что $r(b)=(1,4,n_3-1)$. Тогда по (13), (15)

$$m[(a),(b)]=n_3-2=m-1$$

и по (4), (14), (15)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]\geq n_3-2=m-1.$$

2. Если $r_3(b)>n_3$, то

• при $r_3(\bar{b})\geq n_3$ возьмем $a\in A$ такой, что $r(\bar{a})=(n_2,4,n_3-1)$; тогда по (4)

$$m[(a),(b)]=n_3-2=m-1$$

и по (13), (15)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=n_3-2=m-1;$$

• при $r_3(\bar{b})=n_3-1$: если $r_1(\bar{b})>n_2$, то возьмем $a\in A$ такой, что $r(\bar{a})=(n_2,r_2(\bar{b}),n_3-1)$; тогда по (4)

$$m[(a),(b)]=n_3-2=m-1$$

и по (17), (25)–(27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]\geq n_3-2=m-1;$$

— если $r_1(\bar{b})\leq n_2$, то возьмем $a\in A$ такой, что $r(\bar{a})=r(\bar{b})$; тогда по (4), (14)–(15)

$$m[(a),(b)]\geq n_3-2=m-1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>n_3-2=m-1.$$

Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]\geq n_3-1=m$.

Случай 17. Рассмотрим сначала случай, когда $n_1=1$.

1. Так как для любого $a\in A$ либо $r_3(a)\leq n_3-2$, либо $r_3(\bar{a})\leq n_3-2$, утверждение следует из замечания 3.

2. Если $r_3(b)=n_3$ и $r_3(\bar{b})=n_3$, то возьмем $a\in A$ такой, что $r(a)=(2,4,n_3-2)$. Тогда по (8), (11), (13), (15)

$$m[(a),(b)]=n_3-3=m-1$$

и либо по (17)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=n_3-2>n_3-3=m-1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>n_3-3=m-1.$$

Пусть теперь $n_1\geq 2$.

1. Если $r_3(a)=n_3$ и $r_3(\bar{a})=n_3$, то

• при $r_1(a)<\left[\frac{n_1}{2}\right]$ возьмем $b\in B$ такой, что $r(b)=r(a)$; тогда

$$m[(a),(b)]=\infty>\varphi(n_1)+n_3-3=m-1$$

и по (17)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]\geq\varphi\Big(\Big[\frac{n_1}{2}\Big]\Big)+n_3-2=\varphi(n_1)+n_3-3=m-1;$$

• при $r_1(a) \geq \left[\frac{n_1}{2}\right]$ возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) = r(\bar{a})$; тогда по (17)

$$m[(a),(b)] \geq \varphi\Big(\Big[\frac{n_1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

2. Если $r_3(b) = n_3$ и $r_3(\bar{b}) = n_3$, то

• при $r_1(b) > \left[\frac{n_1}{2}\right]$ и $r_1(\bar{b}) > \left[\frac{n_1}{2}\right]$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = \left(\left[\frac{n_1}{2}\right], 0, n_3\right)$; тогда по (17)

$$m[(a),(b)] = \varphi\Big(\Big[\frac{n_1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

и либо по (17)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \varphi\Big(\Big[\frac{n_1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

• при $r_1(b) \leq \left[\frac{n_1}{2}\right]$ или $r_1(\bar{b}) \leq \left[\frac{n_1}{2}\right]$ положим для определенности $r_1(b) \leq \left[\frac{n_1}{2}\right]$ и возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = r(b)$; тогда

$$m[(a),(b)] = \infty > \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (17)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \varphi\Big(\Big[\frac{n_1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \varphi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq \varphi(n_1) + n_3 - 2 = m$.

Случай 21. 1. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = (k_2, 1, n_3 - 1)$. Тогда по (10), (12), (14)

$$m[(a),(b)] \geq n_3 - 3 = m - 1$$

и либо по (17), (21)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > n_3 - 3 = m - 1.$$

2. Если $r_3(b) = n_3$, то

• при $r_3(\bar{b}) = n_3 - 1$ и $r(\bar{b}) \neq (1, 0, 3)$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) = (2, 4, n_3 - 2)$; тогда либо по (17), (21)

$$m[(a),(b)] \geq n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(a),(b)] = \infty > n_3 - 3 = m - 1$$

и по (8), (11), (13), (15)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $n_3 = 4$ и $r_3(\bar{b}) = (1, 0, 3)$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) = (1, 1, 2)$; тогда либо по (17), (21)

$$m[(a),(b)] \geq n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(a),(b)] = \infty > n_3 - 3 = m - 1$$

и по (5)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_3(\bar{b}) = n_3$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = (2, 4, n_3 - 2)$; тогда по (8), (11), (13), (15)

$$m[(a),(b)] = n_3 - 3 = m - 1$$

и либо по (17), (21)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq n_3 - 2 > n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq n_3 - 2 = m$.

Случай 27. 1. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3 - 1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) \approx r(\bar{a})$. Тогда по (17), (27)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \approx \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3$, то возможны два случая: ($r_2(a) \neq 0$ и $r_2(\bar{a}) \neq 0$) или ($r_2(a) = 0$ либо $r_2(\bar{a}) = 0$; в этом случае положим для определенности $r_2(a) = 0$). Тогда

• если $r_1(a) < \left[\frac{n_1+1}{2}\right]$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = r(a)$; тогда

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \psi\Big(\Big[\frac{n_1 - 1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• если $r_1(a) \geq \left[\frac{n_1+1}{2}\right]$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) = r(\bar{a})$; тогда по (17), (27)

$$m[(a),(b)] \geq \varphi\Big(\Big[\frac{n_1 + 1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

2. Если $r_3(b) = n_3$ и $r_3(\bar{b}) = n_3 - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) \approx r(\bar{b})$. Тогда по (17), (27)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \approx \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Если $r_3(b) = n_3$ и $r_3(\bar{b}) = n_3$, то возможны два случая: ($r_2(b) \neq 0$ и $r_2(\bar{b}) \neq 0$) или ($r_2(b) = 0$ либо $r_2(\bar{b}) = 0$; в этом случае положим для определенности $r_2(b) = 0$). Тогда

• если $r_1(b) < \left[\frac{n_1+1}{2}\right]$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(a) = r(b)$; тогда

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (27)

$$m[(\bar a),(\bar b)] \geq \psi\Big(\Big[\frac{n_1-1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• если $r_1(b) \geq \left[\frac{n_1+1}{2}\right]$, то при $r_1(\bar b) < \left[\frac{n_1-1}{2}\right]$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar a) = r(\bar b)$; тогда по (17), (27)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar a),(\bar b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— при $r_1(\bar b) \geq \left[\frac{n_1-1}{2}\right]$ и $n_1 > 1$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = \left(\left[\frac{n_1+1}{2}\right], 0, n_3\right)$; тогда по (17), (27)

$$m[(a),(b)] = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

или

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и либо по (27)

$$m[(\bar a),(\bar b)] = \psi\Big(\Big[\frac{n_1-1}{2}\Big]\Big) + n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(\bar a),(\bar b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— при $r_1(\bar b) \geq \left[\frac{n_1-1}{2}\right]$ и $n_1 = 1$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar a) = (n_2, 4, n_3 - 1)$; тогда либо по (17), (21)

$$m[(a),(b)] = n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (13), (15)

$$m[(\bar a),(\bar b)] = n_3 - 2 = \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq \psi(n_1) + n_3 - 2 = m$.

Замечание 4. Ниже в случаях (28)–(29), (30)–(31), (32)–(33), (34)–(35) в указанных парах искомое m выбирается как минимальное, так что доказательства этих парных случаев отличаются только нижней оценкой. Поэтому в этих парах доказательство будем приводить только для первых случаев каждой пары, эа исключением некоторых случаев, где необходимо доказывать базу.

Случай 34. 1. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar a) = n_3 - 1$, то

• при $r_2(a) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = (k_1, r_2(a), n_3)$ и $r_2(\bar b) = r_2(\bar a)$; тогда по (17), (27)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и либо по (17), (25)–(27)

$$m[(\bar a),(\bar b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>\psi(n_1)+n_3-3=m-1;$$

• при $r_2(a)\geq\left[\frac{n_2}{2}\right]-1$ возьмем $b\in B$ такой, что $r(\bar{b})=r(\bar{a})$; тогда по (21), (34)–(35)
$$m[(a),(b)]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1$$
и
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>\psi(n_1)+n_3-3=m-1.$$

Если $r_3(a)=n_3$ и $r_3(\bar{a})=n_3$, то в этом случае для любого $a\in A$ либо $r_1(a)\leq\left[\frac{n_1}{2}\right]$, либо $r_1(\bar{a})\leq\left[\frac{n_1}{2}\right]$. Положим для определенности $r_1(a)\leq\left[\frac{n_1}{2}\right]$. Тогда

• при $r_2(a)<\left[\frac{n_2}{2}\right]-1$ возьмем $b\in B$ такой, что $r(b)=r(a)$; тогда
$$m[(a),(b)]=\infty>\psi(n_1)+n_3-3=m-1$$
и по (34)–(35)
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1;$$

• при $r_2(a)\geq\left[\frac{n_2}{2}\right]-1$ возьмем $b\in B$ такой, что $r_1(b)=r_1(a)$ и $r_2(\bar{b})=r_2(\bar{a})$; тогда по (21), (40)
$$m[(a),(b)]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1$$
и по (17), (27)
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1.$$

2. Если $r_3(b)=n_3$ и $r_3(\bar{b})=n_3-1$, то

• при $r_2(b)<\left[\frac{n_2}{2}\right]-1$ возьмем $a\in A$ такой, что $r(a)=(n_1,r_2(b),n_3)$ и $r_2(\bar{a})\approx r_2(\bar{b})$; тогда по (17), (27)
$$m[(a),(b)]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1$$
и по (17), (25)–(27)
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1,$$

• при $r_2(b)\geq\left[\frac{n_2}{2}\right]-1$: если $r_2(\bar{b})<\left[\frac{n_2}{2}\right]-1$, то возьмем $a\in A$ такой, что $r(\bar{a})=r(\bar{b})$; тогда по (34)–(35)
$$m[(a),(b)]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1$$
и
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>\psi(n_1)+n_3-3=m-1;$$
— если $r_2(\bar{b})\geq\left[\frac{n_2}{2}\right]-1$, то возьмем $a\in A$ такой, что $r(\bar{a})\approx\left(\left[\frac{n_2}{2}\right]+1,r_2(\bar{b}),n_3-1\right)$; тогда по (17), (27), (34)–(35), (47)–(48)
$$m[(a),(b)]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1$$
и либо по (17), (25)–(27)
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]\geq\psi(n_1)+n_3-3=m-1,$$
либо
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>\psi(n_1)+n_3-3=m-1.$$

Если $r_3(b)=n_3$ и $r_3(\bar{b})=n_3$, то

• при $r_1(b) < \left[\frac{n_1}{2}\right]$: если $r_2(b) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = r(b)$; тогда

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (34)–(35)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_2(b) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ и $r_2(\bar{b}) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r_1(a) = r_1(b)$ и $r_2(\bar{a}) = r_2(\bar{b})$; тогда по (21), (40)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (17), (25)–(27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_2(b) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ и $r_2(\bar{b}) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = \left(r_1(b), \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1, n_3\right)$; тогда либо по (21), (40)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (27), (34)–(35), (47)–(48)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_1(b) \geq \left[\frac{n_1}{2}\right]$ и $r_1(\bar{b}) \geq \left[\frac{n_1}{2}\right]$: если $r_2(b) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = \left(\left[\frac{n_1}{2}\right], r_2(b), n_3\right)$; тогда либо по (17), (27)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (34)–(35), (40), (47)–(48)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_2(b) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, и $r_2(\bar{b}) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) = \left(\left[\frac{n_1}{2}\right], r_2(\bar{b}), n_3\right)$; тогда по (34)–(35), (40), (47)–(48)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и либо по (17), (27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_2(b) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ и $r_2(\bar{b}) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = \left(\left[\frac{n_1}{2}\right], \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1, n_3\right)$; тогда по (17), (21), (27), (34)–(35), (40)

$$m[(a),(b)] \geq \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

или

$$m[(a),(b)] = \infty > \psi(n_1) + n_3 - 3 = m - 1$$

и либо по (17), (21), (27), (34)–(35), (40), (47)–(48)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \psi(n_1)+n_3-3=m-1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>\psi(n_1)+n_3-3=m-1.$$

Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq \psi(n_1)+n_3-2=m$.

Случай 35. Рассмотрим случай, когда $n_2=1$.

1. Если $r_3(a)=n_3$ и $r_3(\bar{a})=n_3-1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) \approx r(\bar{a})$. Тогда по (21), (34)–(35)

$$m[(a),(b)]>n_3-3=m-1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \approx \infty>n_3-3=m-1.$$

Если $r_3(a)=n_3$ и $r_3(\bar{a})=n_3$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(b)=(k_2,0,n_3-1)$. Тогда по (4)

$$m[(a),(b)]=n_3-3=m-1$$

и по (17), (21)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]>n_3-3=m-1.$$

2. Если $r_3(b)=n_3$ и $r_3(\bar{b})=n_3-1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) \approx (n_2,r_2(\bar{b}),n_3-1)$. Тогда по (17), (21)

$$m[(a),(b)]>n_3-3=m-1$$

и либо по (17), (25)–(27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq n_3-3=m-1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>n_3-3=m-1.$$

Если $r_3(b)=n_3$ и $r_3(\bar{b})=n_3$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a)=(n_2,0,n_3-1)$. Тогда по (4)

$$m[(a),(b)]=n_3-3=m-1$$

и либо по (17), (21)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]>n_3-3=m-1,$$

либо

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=\infty>n_3-3=m-1.$$

Если $n_2 \geq 2$, то доказательство аналогично случаю (34).

Таким образом, из предложения 2 следует, что $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq \chi(n_2)+n_3-2=m$.

Случай 40. Рассмотрим сначала случай, когда $n_2=1$.

1. Если $r_3(a)=n_3$, то возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b})=(k_2,0,n_3-1)$. Тогда либо по (17), (21)

$$m[(a),(b)] \geq n_3-3=m-1,$$

либо

$$m[(a),(b)]=\infty>n_3-3=m-1$$

и по (4), (21)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})]=n_3-3=m-1.$$

2. Если $r_3(b) = n_3$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = (1, 0, n_3 - 1)$. Тогда по (4)

$$m[(a),(b)] = n_3 - 3 = m - 1$$

и по (4), (12)–(15), (17), (21)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq n_3 - 3 = m - 1.$$

Пусть теперь $n_2 \geq 2$.

1. Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3 - 1$, то

• при $r_2(a) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = r(a)$ и $r_2(\bar{b}) \approx r_2(\bar{a})$; тогда

$$m[(a),(b)] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (17), (25)–(27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_2(a) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) \approx r(\bar{a})$; тогда по (21), (40)

$$m[(a),(b)] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \approx \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Если $r_3(a) = n_3$ и $r_3(\bar{a}) = n_3$, то

• при $r_2(a) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ возьмем $b \in B$ такой, что $r(b) = r(a)$; тогда

$$m[(a),(b)] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (17), (27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_2(a) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ возьмем $b \in B$ такой, что $r(\bar{b}) = r(\bar{a})$; тогда по (21), (40)

$$m[(a),(b)] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1.$$

2. Если $r_3(b) = n_3$ и $r_3(\bar{b}) = n_3 - 1$, то

• при $r_2(b) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = r(b)$ и $r_2(\bar{a}) \approx r_2(\bar{b})$; тогда

$$m[(a),(b)] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$

и по (17), (25)–(27)

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_2(b) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$: если $r_1(\bar{b}) < \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) \approx r(\bar{b})$; тогда по (21), (40)

$$m[(a),(b)] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$

и

$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \approx \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

— если $r_1(\bar{b}) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) \approx \left(\left[\frac{n_2}{2}\right] + 1, r_2(\bar{b}), n_3 - 1\right)$; тогда по (21), (40)

$$m[(a),(b)] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$

или
$$m[(a),(b)] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$
и либо по (17), (25)–(27)
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1,$$
либо
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1.$$

Если $r_3(b) = n_3$ и $r_3(\bar{b}) = n_3$, то

• при $r_2(b) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$ возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = r(b)$; тогда
$$m[(a),(b)] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$
и по (40)
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \chi\Big(\Big[\frac{n_2}{2}\Big] + 1\Big) + n_3 - 2 \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$

• при $r_2(b) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$: если $r_2(\bar{b}) < \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(\bar{a}) = r(\bar{b})$; тогда по (40)
$$m[(a),(b)] \geq \chi\Big(\Big[\frac{n_2}{2}\Big] - 1\Big) + n_3 - 2 = \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$
и
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1;$$
— если $r_2(\bar{b}) \geq \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $r(a) = \big(r_1(b), \left[\frac{n_2}{2}\right] - 1, n_3\big)$; тогда по (21), (40)
$$m[(a),(b)] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1$$
или
$$m[(a),(b)] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1,$$
и либо по (21), (40)
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] \geq \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1,$$
либо
$$m[(\bar{a}),(\bar{b})] = \infty > \chi(n_2) + n_3 - 3 = m - 1.$$
Таким образом, из предложения 2 следует, что
$$m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \geq \chi(n_2) + n_3 - 2 = m.$$

Для случаев (41)–(48) доказательство аналогично, когда $n_2 < k_2$ и $n_1 < k_1$ ((28)–(35)).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Предположим, что для суператомных I-алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ выполняется одно из условий:*

1) $r_3(\mathfrak{A}) < r_3(\mathfrak{B})$ *и* $r(\mathfrak{B}) \neq (1,0,3)$;

2) $r_3(\mathfrak{A}) = r_3(\mathfrak{B})$ *и* $r_1(\mathfrak{A}) \leq r_1(\mathfrak{B})$.

Тогда $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$ не зависит от $\mathfrak{B}$.

Ниже функцию $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$ удобнее рассматривать как функцию от характеристик суператомных I-алгебр, т. е. будем писать $m[(n_1,n_2,n_3),(k_1,k_2,k_3)]$ вместо $m[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$, где $r(\mathfrak{A}) = (n_1,n_2,n_3)$, $r(\mathfrak{B}) = (k_1,k_2,k_3)$.

Следствие 2. *Если $n_3 = k_3$, $n_1 \neq k_1$, $n_2 \neq k_2$, то*
$$m[(n_1,n_2,n_3),(k_1,k_2,k_3)] = \min\begin{cases} m[(\min\{n_1,k_1\},n_2,n_3),(\min\{n_1,k_1\},k_2,k_3)],\\ m[(n_1,\min\{n_2,k_2\},n_3),(k_1,\min\{n_2,k_2\},k_3)].\end{cases}$$

Следствие 2 говорит о том, что в случае $n_3 = k_3$ если мы знаем, как вычислять функцию $m[(n_1,n_2,n_3),(k_1,k_2,k_3)]$ при $n_1 = k_1$ и $n_2 = k_2$, то мы можем вычислить ее значение при любых n_1, n_2, k_1, k_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tarski A.* Arithmetical classes and types of Boolean algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 63.
2. *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.
3. *Rabin M. O.* Decidability of the second order theories and automata on infinity trees // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. N 141. P. 1–35.
4. *Морозов А. С.* О разрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 1. С. 199–201.
5. *Алаев П. Е.* Ранги Скотта булевых алгебр // Тр. ИМ СО РАН. 1996. Т. 30. С. 3–25.
6. *Крамер В. Ю.* m-эквивалентность булевых алгебр // Выч. сист. 1998. Т. 161. С. 76–105.
7. *Пальчунов Д. Е.* О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 326–346.
8. *Пальчунов Д. Е.* Счетно-категоричные булевы алгебры с выделенными идеалами // . Препринт/ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики, Новосибирск. 1986. № 12. С. 48.
9. *Пальчунов Д. Е.* Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами // Алгебра и Логика. 1987. Т. 16, № 4. С. 435–455.
10. *Тайманов А. Д.* Характеристики аксиоматизируемых классов моделей // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 4. С. 4–31.
11. *Fraissé R.* Isomorphisme local et équivalence associés à un ordinal; utilité en calcul des formules infinies à quanteurs finis // Tarski Symposium, Berkley. 1971. P. 241–254.
12. *Fraissé R.* Sur quelques classifications des systems de relations // Publications Sc. de l'Université D'Alger I. 1955. N I. P. 35–182.
13. *Ehrenfeucht A.* An application of games to the completeness problem for formilized theories // Fund. Math. 1961. V. 49. P. 129–141.
14. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 30 сентября 1999 г.

г. Новосибирск
Новосибирский гос. университет
psg@novosoft.ru