Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. Н. Монахов

Аннотация: Разработан конструктивный вариационный метод решения функциональных уравнений относительно параметров конформных отображений. С помощью этого метода доказана разрешимость струйных задач гидродинамики и задач фильтрации жидкости со свободными границами в неограниченных областях. Библиогр. 9.

Плоские стационарные течения несжимаемой жидкости описываются аналитическими функциями комплексного переменного — комплексным потенциалом течения.

Задачами со свободными границами в гидродинамике принято называть задачи, в которых часть границы области течения неизвестна (свободная граница) и должна определяться в процессе решения вместе с искомым комплексным потенциалом течения. Эти задачи, рассматриваемые в точной нелинейной постановке, приводят к сложным математическим проблемам и требуют создания адекватного математического аппарата.

Впервые корректность простейшей из таких задач была доказана А. Вайнштейном [1] на основе предложенного им вариационного подхода — метода непрерывности. В совместной работе с А. Вайнштейном [2] Ж. Лере придал этому методу абстрактную форму, реализованную в дальнейшем в виде теоремы Лере — Шаудера. С помощью этого метода Ж. Лере [3] при некоторых условиях на величину угла вращения касательной вдоль обтекаемого криволинейного препятствия доказал существование течений несжимаемой жидкости со свободными границами по схеме Кирхгофа. Независимо от Ж. Лере при тех же условиях на геометрию обтекаемого препятствия М. А. Лаврентьев [4], опираясь на разработанные им вариационные принципы теории конформных отображений [5], вместе с теоремой существования течений Кирхгофа установил и теорему единственности таких течений.

Вариационные принципы (теоремы сравнения) М. А. Лаврентьева оказались применимыми к осесимметрическим течениям жидкости [6], а также к исследованию корректности других гидродинамических задач [7].

Автором (библиография работ имеется в [8]) разработан метод конечномерной аппроксимации, с помощью которого без ограничений Лере — Лаврентьева доказана разрешимость широкого класса задач гидродинамики со свободными границами.

Предварительно изучались аппроксимирующие задачи, в которых известные участки границы заменялись полигонами, а нелинейные краевые условия —

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00622) и программы «Университеты России» (грант 1788).

кусочно-линейными. Разрешимость полученных при этом систем уравнений относительно конечного числа аппроксимационных параметров устанавливалась последовательно с помощью малых вариаций границ и граничных условий. Решения исходных задач гидродинамики строились предельным переходом практически без ограничения на геометрию заданных границ.

В этой работе предлагается конструктивный вариант описанного аппроксимационного подхода, названного циклическим методом непрерывности. Метод заключается в построении конечного цикла деформаций заданных полигональных границ таким образом, чтобы соответствующая система уравнений относительно искомых параметров конформного отображения в каждом цикле допускала построение ее решения методом простой итерации.

На основе циклического метода непрерывности в работе доказана корректность струйных задач гидродинамики и задач теории фильтрации со свободными границами, в которых заданные полигональные препятствия допускают внешнее самопересечение и могут иметь бесконечные вершины с произвольным углом при них.

1. Задачи типа фильтрации

Пусть $P = \bigcup\limits_{1}^{n-1} P_k$ — бесконечный полигон в плоскости $z = x+iy$ с вершинами и концами z_k, $k = \overline{1,n}$, звеньями P_k, внутренними углами $\alpha_k\pi$, $k = \overline{2, n-1}$. Обозначим через L искомую кривую, соединяющую концы z_1, z_n полигона P и лежащую в полосе $\{z \mid x_n < x < x_1, -\infty < y < \infty\}$, $|z_n - z_1| \neq 0, \infty$.

В области D с границей $\partial D = P \cup L$ ищется аналитическая функция $w(z) = \varphi + i\psi$, удовлетворяющая на ∂D следующим граничным условиям:

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0, \quad z \in P; \quad \varphi + i\psi = R(x), \quad \left|\frac{dR}{dx}\right| \geq d_0 > 0, \quad x \in [x_n, x_1].$$

Этими граничными условиями описываются два основных класса задач фильтрации жидкости со свободными границами: безнапорная фильтрация жидкости в земляной плотине и задача определения формы подземной части контура бетонной плотины по известной эпюре напоров [8, 9].

В обеих задачах кривая $P_* = \{\varphi, \psi \mid \Phi(\varphi, \psi) = 0\}$ в плоскости $w = \varphi + i\psi$ состоит из отрезков прямых $\psi = \mathrm{const}$ (линий тока) и $\varphi = \mathrm{const}$ (эквипотенциалей), а $L_* = \{\varphi, \psi \mid \varphi + i\psi = R(x)\}$, $\operatorname{Im} R = \mathrm{const}$, $\operatorname{Re} R = -x + \mathrm{const}$, в первой из задач и $R(x) \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, — произвольная функция во второй (ось OX направлена противоположно вектору силы тяжести).

Нами будет рассматриваться аналог второй задачи, в которой кривые P_*, L_* являются ляпуновскими, $(P_*, L_*) \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, и образуют замкнутую жорданову кривую $\partial D_* = P_* \cup L_*$, ограничивающую область D_*, при этом в точках w_n, w_1 стыка P_* и L_* имеются углы $\delta_n\pi$, $\delta_1\pi$ (*задачи типа фильтрации*).

Построим конформное отображение $w = w(\zeta)$, $w : E \to D_*$, верхней полуплоскости $E : \operatorname{Im}\zeta > 0$ на область D_* с нормировкой $w_k = w(t_k)$, $k = 1, n, 0$, где t_1, t_n — прообразы точек w_1, w_n, t_0 — прообраз $w(z_0) = w_0 \subset L_*$, $z_0 \in L$ — точка с заданной координатой $x_0 \in (x_n, x_1)$. Зафиксируем $t_1 = -1$, $t_n = 1$, $t_0 = 2$, из тождества $w(t) \equiv R(x)$ определим зависимость $x = H(t)$ и вычислим

$$\frac{dx}{dt} = |w_t(t)|\{|R_x[H(t)]|\}^{-1} \equiv h(t), \quad |t| \geq 1.$$

Учитывая поведение $\frac{dw}{d\zeta}$ в прообразах $t_1 = -1$ и $t_n = 1$ угловых точек $(w_1, w_n) = P_* \cap L_*$ и гладкость кривых $(P_*, L_*) \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, получим

$$h(t) \equiv |t+1|^{\delta_1 - 1}|t-1|^{\delta_n - 1}h_*(t), \quad |t| \geq 1,$$

где $0 < \delta_k \le 2$, $k = 1, n$, и $|\ln h_*(t)| \in C^\alpha$, $\alpha > 0$, при $|t| \ge 1$.

Пусть t_k, $k = \overline{1,n}$, — прообразы вершин и концов z_k, $k = \overline{1,n}$, полигона P при конформном отображении $z = z(\zeta)$, $z : E \to D$ $(z_k = z(t_k))$. Производная $\frac{dz}{d\zeta}$ конформного отображения $z : E \to D$ удовлетворяет граничным условиям

$$\arg \frac{dz}{dt} = \gamma_k \pi, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}; \quad \operatorname{Re} \frac{dz}{dt} = h(t), \quad |t| \ge 1, \tag{1}$$

где $\gamma_k \pi$ — углы наклона P_k с осью OX.

Рассмотрим область D_0, ограниченную многоугольником $\overline{P} = (P_0 \cup P_n \cup P)$, $P_0 = \{z \mid x = x_1, y < y_1\}$, $P_n = \{z \mid x = x_n, y < y_n\}$, с внутренними углами $\alpha_k \pi$, $k = \overline{1,n}$ $(\alpha_k = 1 - \gamma_k + \gamma_{k-1};\ \gamma_0 = 1/2,\ \gamma_n = -1/2)$.

Каноническим решением однородной краевой задачи (1) $(h \equiv 0)$ в нужном классе функций является производная

$$\frac{dZ}{d\zeta} = iK\Pi(\zeta), \quad \Pi = \prod_{k=1}^{n} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}, \quad K = \text{const} > 0 \tag{2}$$

конформного отображения $Z : E \to D_0$, причем звеньям $(P_0, P_n) \subset \overline{P}$ отвечает однородное условие (1) — $\operatorname{Re} \frac{dZ}{dt} = 0$, $|t| \ge 1$.

Следовательно, решение неоднородной краевой задачи (1) относительно производной $\frac{dz}{d\zeta}$ конформного отображения $z : E \to D$ представляется в виде [8]

$$\frac{dz}{d\zeta} = \Pi(\zeta) M(\zeta), \quad \Pi = \prod_{k=1}^{n} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}, \tag{3}$$

где

$$M(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|>1} \frac{h(t)dt}{\Pi(t)(t-\zeta)}.$$

Отметим, что согласно заданной геометрии полигона P, как и в случае его конечности [8], имеем $\sum\limits_{1}^{n} (\alpha_k - 1) = -1$.

Предполагаются выполненными условия ограниченности $M(\zeta)$:

$$\alpha_i \le \delta_i + 1 - \delta, \quad i = 1, n,\ \delta > 0; \quad \|\ln h_*\|_{C^\alpha} \le \delta^{-1},\ \alpha > 0, \tag{4}$$

где $h_*(t)$ определена перед (1).

2. Система уравнений для параметров

Если в (3) произвольно зафиксировать вектор $T = (t_2, \dots, t_{n-1})$ неизвестных постоянных t_k $(t_1 = -1 < t_k < t_{k+1} < t_n = 1)$, то соответствующее ему отображение $z = z(\zeta, T)$, $z : E \to D(T)$, переводит отрезок $[-1, 1]$ в полигон $P(T)$ со сторонами, параллельными сторонам заданного полигона P. Составим систему уравнений относительно вектора T, решение которой обеспечивает совпадение $P(T) = P$.

Пронумеруем бесконечные точки $z^i \equiv z_{s_i} = \infty$, $i = \overline{1,m}$, в порядке их следования на полигоне P и разобьем тем самым P на бесконечные полигоны

$$Q_i = \bigcup_{k=s_i}^{s_{i+1}-1} P_k, \quad P = \bigcup_{i=1}^{m+1} Q_i.$$

Пусть $z^1 = z_s = \infty$ — первая бесконечная вершина на P и P_{s-1} — бесконечное звено с концами в точках z_{s-1}, z_s. Положим $z_1 = 0$, $z_1 \in (P \cap L)$ и зададим длины $l_k = |z_{k+1} - z_k|$, $k = \overline{1, s-2}$, конечных звеньев полигона $Q_s = \bigcup\limits_1^{s-1} P_k \subset P$:

$$l_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\Pi(t)M(t)|\, dt, \quad k = \overline{1, s-2}. \tag{5}$$

При заданных углах $\alpha_k\pi$, $k = \overline{1, s-1}$, при вершинах Q_s условия (5), очевидно, полностью фиксируют положение Q_s. Рассмотрим теперь звено P_s, $z_s \in \partial P_s$.

Условимся на каждом звене P_{s-1}, P_s с концами в $z_s = \infty$ произвольно фиксировать точки $(z_{s+1}, z_{s+2}) \in P_s$ и $(z_{s-2}, z_{s-1}) \in P_{s-1}$, считая их включенными в число вершин P с углами, равными π. Положим $z_{s+1} = l_s + il_{s+1}$:

$$l_s = \operatorname{Re} \int\limits_{-1}^{t_{s+1}} \Pi(\zeta)M(\zeta)\, d\zeta, \quad l_{s+1} = \operatorname{Im} \int\limits_{-1}^{t_{s+1}} \Pi(\zeta)M(\zeta)\, d\zeta. \tag{6}$$

Если $\alpha_s\pi = 0$ в вершине $z_s = \infty$, то в качестве l_s можно взять ширину полосы в точке $z_s = \infty$:

$$l_s = \pi|\Pi(\zeta)M(\zeta)(\zeta - t_s)|_{\zeta = t_s}.$$

Тем самым для определения положения полигона $Q_{s+1} = \bigcup\limits_{k=s}^{s+m} P_k$, примыкающего к точке $z_s = \infty$, достаточно задать длины его конечных звеньев $l_k = |z_{k+1} - z_k|$, $k = \overline{s+1, s+m}$, $m \geq 1$.

Повторяя такие построения в окрестности каждой бесконечной вершины P, придем к полигону $Q_n = \bigcup\limits_{k=n-q}^{n-1} P_k$, $q \geq 1$, примыкающему к точке $z_n \in (P \cap L)$.

Длина последней стороны $l_{n-1} = |z_n - z_{n-1}|$ полигона Q_n определяется известным расстоянием между лучами $(P_0, P_n) \subset \overline{P}$ ($\overline{P}$ — многоугольник, введенный после (1)), и нет необходимости ее фиксировать [8, с. 115]. Положим $u_k = t_{k+1} - t_k$, $k = \overline{1, n-2}$, и введем вектор $u = (u_1, \dots, u_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$, через который $T = (t_2, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ однозначно определяется. Тогда искомый вектор $u \in \mathbb{R}^{n-2}$ является решением функционального уравнения

$$l = g(u, \alpha); \quad l = (l_1, \dots, l_{n-1}), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \tag{7}$$

Здесь l_k, l_{k+1} представляются в виде (5) при $z_k \neq \infty$ и в виде (6) при $z_k = \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вектор внутренних углов $\alpha_k\pi$, $k = \overline{1, n}$, многоугольника $\overline{P} = \bigcup\limits_0^n P_k$, $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$ — вектор длин l_k, $k = \overline{1, n-1}$, «сторон» $\overline{P} = \bigcup\limits_1^{n-1} P_k$ (при $z_k = \infty$, $z_{k+1} = l_k + il_{k+1}$).

Назовем вектор $p = (l, \alpha)$ *геометрической характеристикой* полигона P. Как отмечено выше, последнее уравнение (7) $l_{n-1} = g_{n-1}(u, \alpha)$ является следствием остальных и может быть отброшено.

Определим семейство $G = G(\delta)$ *простых* полигонов $P \subset G$, обладающих свойствами:

1) геометрическая характеристика $p = (l, \alpha)$ подчинена условиям

$$\begin{gathered} 0 < \delta \leq \alpha_k \leq 2 \quad \text{при} \quad z_k \neq \infty, \quad -2 \leq \alpha_k \leq 0 \quad \text{при} \quad z_k = \infty,\ k = \overline{1, n}; \\ \text{при } m > 1 \qquad \sum_{k=s_i}^{s_j} (\alpha_k - 1) \neq -1,\ (i, j) = \overline{1, m}; \quad |\ln l_k| \leq \delta^{-1},\ k = \overline{1, n-1}; \end{gathered} \tag{8}$$

2) для любой кривой $P_{ij} \subset D_0$, $\partial D_0 = \overline{P} = \bigcup\limits_0^n P_k$, с концами на звеньях $(P_i, P_j) \in \overline{P}$ справедливы неравенства

$$|P_{ij}| \geq \delta > 0, \quad |i-j| \geq 2, \quad (i,j) \in \overline{0,n}; \tag{9}$$

3) для производной $\frac{dZ}{d\zeta}$ конформного отображения $Z : E \to D_0$, $\partial D_0 = \overline{P}$, имеет место представление (2).

Отметим, что если условие (8) на величину $\sum\limits_{k=s_i}^{s_j} (\alpha_k - 1)$ при $m > 1$ не выполняется, то может нарушится связность области D_0, $\partial D_0 = \overline{P}$.

Простые полигоны $P \subset G$ и соответствующие им многоугольники $\overline{P}$, вообще говоря, неоднолистны и допускают внешнее самопересечение своих звеньев, т. е. P и $\overline{P}$ могут лежать на римановых поверхностях нулевого рода.

3. Струйные течения

Рассматривается плоское потенциальное течение несжимаемой жидкости в односвязной области D с границей $\partial D = P \cup L$, состоящей из простого полигона P (конечного или бесконечного) и струй L, срывающихся с его концов z_1, z_n [7, 8].

Введем аналитическую функцию $w(z) = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал течения — и ее производную $\frac{dw}{dz} = qe^{-i\theta}$ — комплексную скорость течения.

Граница $\partial D = P \cup L$ области D является линией тока ($\operatorname{Im} w = \psi = 0$), и на струях L задана постоянная скорость течения $\left|\frac{dw}{dz}\right| = 1$.

Заданием топологии струйного потока (схемы течения) в плоскости комплексного потенциала w определяется прообраз D_* области течения D.

Построением конформного отображения $w = KW(\zeta)$, $K = \text{const} > 0$, верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на D_* найдем функцию $\mu(t) = \left|\frac{dW}{dt}\right|$, $|t| \geq 1$.

Для отыскания производной $\frac{dz}{d\zeta}$ конформного отображения $z : E \to D$ аналогично задаче типа фильтрации, разд. 1, приходим к краевой задаче

$$\arg\frac{dz}{dt} = \gamma_k\pi, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}; \quad \left|\frac{dz}{dt}\right| = K\mu(t), \quad |t| \geq 1. \tag{10}$$

Решая смешанную краевую задачу (10) для функции $\ln(K^{-1}\frac{dz}{d\zeta})$, получим представление (3) для $\frac{dz}{d\zeta}$, в котором $M(\zeta)$ имеет вид

$$M = Ke^{i\beta}\exp\left\{\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)}}{\pi i}\int\limits_{|t|>1}\frac{\ln(\mu(t)\Pi^{-1}(t))dt}{\sqrt{1-t^2}(t-\zeta)}\right\},$$

где постоянная β выбрана из условия $\arg[e^{i\beta\Pi(t_1+0)}] = (\alpha_1 - 1)\pi$.

Схема Кирхгофа. В этой схеме струйного течения [8, с. 151, 152] имеем: P — конечный полигон, струи L бесконечны, границы прообраза D_* области D таковы:

$$\begin{gathered}\partial D_* = \{\varphi,\psi \mid \psi = 0, \varphi > 0\}, \quad W = \frac{1}{2}\zeta^2, \quad \mu = |t|, \quad \alpha_1 = \alpha_n = 1,\\ M = K\chi(\zeta)M_0(\zeta, T); \quad M_0 = \prod_{k=1}^n\left[\sqrt{(1-t_k^2)(1-\zeta^2)} + 1 - \zeta t_k\right]^{1-\alpha_k},\end{gathered} \tag{11}$$

где $\chi(\zeta) = (1 + \sqrt{1-\zeta^2})$.

Симметричная схема Рябушинского: полигон $P = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} P_k$ лежит в правой полуплоскости $\operatorname{Im} z = y > 0$ и состоит из конечных звеньев P_k, $k = \overline{1, n-1}$, и бесконечного $P_0 = \{x, y \mid y = 0, x > 0\}$, в полуплоскости $\operatorname{Im} z = y < 0$ ему соответствует симметричный относительно оси OY полигон P^*; $W = \zeta$, $\mu = 1$, $\Pi(\zeta) = \prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta^2 - t_k^2)^{\alpha_k - 1}$, $\alpha_n = 1$,

$$M = KM_0(\zeta, T)M_0(\zeta, -T)\zeta^{-2}, \tag{12}$$

где $M_0(\zeta, T)$ определена в (11).

Другие примеры струйных течений (схем) можно найти в [7, 8]. Вектор $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$, $u_{n-1} = \exp(-\frac{K^2+1}{K})$ ($u_{n-1} = 0$ при $K = 0, \infty$), удовлетворяет уравнению (7), в котором в отличие от задачи типа фильтрации все компоненты $(l_1, \dots, l_{n-1})$ независимы ($u_{n-1} = 2 - \sum\limits_{k=1}^{n-2} u_k$).

4. Априорные оценки

Лемма 1. *Пусть $P \subset G(\delta)$ — простой полигон и для задачи* (1) *выполнено предположение* (4).

Тогда если уравнение (7), *соответствующее задачам* (1) *и* (10), *имеет решение* $(u_1, \dots, u_{n-1})$, $u_k > 0$ (*в задаче* (1) u_{n-1} *фиксировано*), *то существует постоянная* $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ (δ — *константа в неравенствах* (4), (8)) *такая, что* $u \in \Omega$ (*априорная оценка*),

$$\Omega = \{u \mid 0 < \varepsilon(\delta) \le u_k,\ k = \overline{1, n-1}\}. \tag{13}$$

Доказательство леммы проводится аналогично случаю конечного полигона P, изученному в [8, гл. III, IV].

Предложенный в [8] метод оценок u_k заключается в изучении свойств функций $l_s = g_s(u, \alpha)$ в (7) в зависимости от величин вариаций $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Рассмотрим сначала струйную задачу (10).

Поскольку $t_1 = -1$, $t_n = 1$ фиксированы, найдется $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m \ge 2/n$, $1 \le m \le n-1$. На звене $P_m \subset P$ (конечном или бесконечном) выберем точки z_m^*, z_{m+1}^*, $|z_{m+1}^* - z_m^*| \ne \infty$, и соединим их прообразы $t_s^* \in (t_m, t_{m+1})$, $s = m, m+1$, полуокружностью

$$\Lambda_m = \{\zeta \mid |\zeta - r| = r\} \cap \{\operatorname{Im} \zeta > 0\}, \quad r = \frac{t_{m+1}^* - t_m^*}{2}.$$

Рассмотрим величину

$$\lambda_m = K\left|\int\limits_{\Lambda_m} \Pi(\zeta)M_0(\zeta, T)\,d\zeta\right|, \quad KM_0 \equiv M,$$

и зафиксируем $t_m^* = t_m + \Delta t_m/4$, $t_{m+1}^* = t_{m+1} - \Delta t_m/4$. Тогда в силу ограниченности интеграла в определении λ_m получим $\ln \lambda_m \to \infty$ при $\ln K \to \infty$, что противоречит конечности z_m^* и z_{m+1}^*. Таким образом, $|\ln K| < \infty$ и тем самым

$$u_{n-1} = \exp\left(-\frac{K^2+1}{K}\right) \ge \varepsilon_1 > 0.$$

После получения оценки постоянной $\ln K$ уравнения $l_k = g_k(u, \alpha)$ для определения u_i, $i = \overline{1, n-2}$, соответствующие задачам (1) и (10), принимают одинаковую структуру. Поэтому для доказательства неравенств (13) остановимся для определенности на задаче (1).

Предположим, что часть искомых постоянных t_k может сближаться, т. е. $u_k = \Delta t_k \to 0$.

Пусть пока в число сближающихся параметров t_k, $i \le k \le j$, не входят t_1 и t_n и, следовательно, $i \ge 2$, $j \le n-1$.

Рассмотрим сначала случай $z_j \ne 0$ (возможно, $z_i = \infty$). Без нарушения общности будем считать, что $z_{j+1} \ne z^{j+1} = \infty$. В противном случае зафиксируем на бесконечном звене P_j с концами z_j, $z_{j+1}(=\infty)$ конечную точку z^*_{j+1} и включим ее в число вершин полигона P, опуская при этом индекс $*$.

Представим длину стороны $l_j = |z_{j+1} - z_j|$ в виде

$$l_j = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \prod_{k=i}^{j} |t-t_k|^{\beta_k} \bigl|M_j(t)\bigr|\,dt.$$

Здесь $\beta_k = \alpha_k - 1$, $k = \overline{2, n-1}$; $\beta_k = \alpha_k - 1$ при $\delta_k - \alpha_k > 0$ и $\beta_k = \delta_k - 1$ при $\delta_k - \alpha_k < 0$, $k = 1, n$; $|M_j(t)| = |\Pi_j(t)|\,|M(t)| \ne 0, \infty$ при $t \in [t_j, t_{j+1})$, где

$$|\Pi_j(t)| = \prod_{k=1}^{i-1} |t-t_k|^{\beta_k} \prod_{k=j+1}^{n} |t-t_k|^{\beta_k}.$$

Положим $\nu = -\sum' \beta_k$, $\mu = \sum'' \beta_k$, отнеся в $\sum'$ все $\beta_k < 0$, а в $\sum''$ все $\beta_k \ge 0$, $k = \overline{i, j}$.

Случай $\mu - \nu + 1 \le 0$, $|z_j| < \infty$. Покажем, что при этом $l_j \to \infty$, если $r = (t_j - t_i) \to 0$. Поскольку t_{j+1} и t_j по предположению не сближаются, существует $\varepsilon > 0$, для которого $t_j + \varepsilon < t_{j+1}$. Отметим, что

$$|M_j(t)| \ge a \ne 0,\ t \in [t_j, t_j + \varepsilon]; \quad t - t_j \le t - t_k \le t - t_i,\ k = \overline{i, j}.$$

Тогда

$$l_j \ge \int\limits_{t_j}^{t_j+\varepsilon} \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \ge a \int\limits_{t_j}^{t_j+\varepsilon} (t-t_i)^{-\nu}(t-t_j)^{\mu}\,dt.$$

После замены переменных $t = rs + t_j$ в интеграле справа при $\mu - \nu + 1 < 0$ получим

$$l_j \ge a r^{\mu-\nu+1} \int\limits_0^{\varepsilon/r} s^{\mu}(s+1)^{-\nu} ds \to \infty \quad \text{при } r = (t_j - t_i) \to 0.$$

Если $\mu - \nu + 1 = 0$, то

$$l_j \ge a \int\limits_0^{\varepsilon/r} s^{\mu-\nu}\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-\nu} ds \ge a 2^{-\nu} \int\limits_1^{\varepsilon/r} \frac{ds}{s} \to \infty \quad \text{при } r \to 0.$$

Случай $\mu - \nu + 1 > 0$, $|z_j| < \infty$. Рассмотрим полуокружность $K_r = \{\zeta \mid \operatorname{Im}\zeta > 0,\ |\zeta - t_i - r/2| = r\}$. При достаточно малом $r = t_j - t_i$ можно считать, что $t_i - r/2 > t_{i-1}$, $t_j + r/2 < t_{j+1}$. Тогда при $\zeta \in K_r$ имеем

$$|M_j(\zeta)| \le A < \infty; \quad r/2 \le |\zeta - t_k| \le 2r,\ k = \overline{i, j}.$$

При конформном отображении $z : E \to D$, $E = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$, множество K_r преобразуется в некоторую кривую $\Lambda_r \subset D$, соединяющую внутренние точки звеньев $(P_{i-1}, P_{j+1}) \subset P$.

Покажем, что длина $|\Lambda_r|$ этой кривой стремится к нулю при $r \to 0$ и, следовательно, $l_k \to 0$, $k = \overline{i,j}$.

В самом деле,

$$|\Lambda_r| = \left|\int\limits_{K_r} \frac{dz}{d\zeta}\, d\zeta\right| \le \pi r \max\left|M_j \prod_{k=i}^{j} |\zeta - t_k|^{\beta_k}\right|$$

$$\le A\pi r \max |\Pi'(\zeta)||\Pi''(\zeta)| \le A\pi r (2r)^{\mu}(r/2)^{-\nu} \to 0 \quad \text{при} \ \to 0.$$

Здесь в $|\Pi'| = \Pi'|\zeta - t_k|^{\beta_k}$ входят только степени $\beta_k < 0$, а в Π'' все $\beta_k \ge 0$, $k = \overline{i,j}$.

Нами допускалась возможность, что $z_i = \infty$ при $|z_j| < \infty$. Если, наоборот, $z_j = \infty$, а $|z_i| < \infty$, то все рассуждения сохраняются, только при $\mu - \nu + 1 \le 0$ необходимо вместо длины стороны $l_j = |z_{j+1} - z_j|$ рассматривать $l_{i-1} = |z_i - z_{i-1}|$.

Пусть $z_i = \infty$, $z_j = \infty$, $1 \le i < j \le m$, причем $r = (t_{s_j} - t_{s_i}) \to 0$, а $t_{s_{j+1}}$ и $t_{s_{i-1}}$ не входят в число сближающихся параметров. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать $t_{s_j} \equiv t_j$, $t_{s_i} \equiv t_i$.

Положим, как и ранее, $\nu = \sum' \beta_k$, $\mu = \sum'' \beta_k$, включая в $\sum'$ все $\beta_k < 0$, а в $\sum''$ все $\beta_k \ge 0$, $k = \overline{i,j}$.

Отметим, что согласно условию (8)

$$\sum_{k=s_i}^{s_j} (\alpha_k - 1) + 1 = \mu - \nu + 1 \ne 0.$$

Случай $\mu - \nu + 1 > 0$, $(z_i, z_j) = \infty$. Как и при условии $|z_j| < \infty$, аналогично устанавливается, что $l_k \to 0$ при $r = (t_j - t_i) \to 0$.

Случай $\mu - \nu + 1 < 0$, $(z_i, z_j) = \infty$. Очевидно, найдется такой промежуток $[t_k, t_{k+1}] \subset [t_i, t_j]$, что $(t_{k+1} - t_k) \ge \lambda_0 r$, $r = (t_j - t_i)$, $\lambda_0 = (j - i - 1)^{-1}$. Если $(z_k, z_{k+1}) \ne \infty$, то, рассматривая длину стороны $l_{k+1} = |z_{k+1} - z_k|$, аналогично случаю $|z_j| < \infty$ при $r \to 0$ получим $l_{k+1} \to \infty$ при $\mu - \nu + 1 \le 0$ и $l_{k+1} \to 0$ при $\mu - \nu + 1 > 0$.

Пусть $|z_k| < \infty$, $z_{k+1} = \infty$. Положим

$$\tau_k = t_k + \lambda r < t_{k+1},\ \lambda \in (0, \lambda_0); \quad z_k^* = z(\tau_k) \ne \infty.$$

Изучим предварительно свойства конформного отображения $z = F(\zeta, r, \lambda)$, $F : E \to D$, в окрестности точки $\zeta = t_k$. Поскольку полигон P в вершинах z_{k-1}, z_k имеет углы $\alpha_{k-1}\pi = \alpha_k \pi = \pi$, то $F(\zeta, r, \lambda)$ аналитически продолжима в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$ до аналитической функции в полосе $E_k = \{\zeta \mid t_{k-1} < \operatorname{Re}\zeta < \tau_{k+1}\}$, $\tau_{k+1} = t_k + \lambda_0 r > \tau_k$. При фиксированном $r > 0$ выберем последовательность $\{\lambda_s\}$, $\lambda_s \to 0$, для которой $F(\zeta, r, \lambda_s) \to F(\zeta, r, 0)$. В частности, при $\lambda_s \to 0$ имеем $(\tau_k - t_k) = \lambda_s r \to 0$, $L_k = |z_k^* - z_k| \to 0$. Зафиксируем теперь $\lambda \in (0, \lambda_0)$ и рассмотрим последовательность $\{\Phi(r, \lambda)\}$, $\Phi = |F(\tau_k, r, \lambda)|^{-1}$. Так как $F(t, r, \lambda) \ne 0$ при $t \ne t_1$, то $\Phi(r, \lambda) \le M < \infty$ $(\tau_k - t_1 \ge \varepsilon > 0)$. Выберем последовательность $\{r_q\}$, $r_q \to 0$, таким образом, чтобы при этом $\Phi(r_q, \lambda) \to |z_k|^{-1}$. Тогда при $r_q \to 0$ имеем $(\tau_k - t_k) \to 0$, $L_k = |z_k^* - z_k| \to 0$. Считая теперь, что $\lambda = \lambda(r) \to 0$ при $r \to 0$, с помощью диагонального процесса выделим подпоследовательность $\{r_l\} \subset \{r_q\}$ так, чтобы $\Phi[r_l, \lambda(r_l)] \to |z_k|^{-1}$, $r_l \to 0$.

Итак, построена последовательность $\{r_l\}$, для которой $(\tau_k - t_k) \to 0$, $L_k = |z_k^* - z_k| \to 0$, $\lambda(r_l) \to 0$ при $r_l \to 0$.

Чтобы не загромождать изложение, будем считать, что указанная выше сходимость имеет место при $r \to 0$.

При фиксированных $(r,\lambda) > 0$ представим $L_k = |z_k^* - z_k|$ в виде

$$L_k = \int\limits_{t_k}^{\tau_k} \prod_{s=i}^{j} |t - t_s|^{\beta_s} |M_j(t)|\, dt.$$

Учитывая неравенства $(t - t_k) \le (t - t_s) \le r$ при $s = \overline{i,k}$ и $(\tau_k - t) \le (t_s - t) \le r$ при $s = \overline{k+1,j}$, получим

$$L_k \ge a r^{-\nu} \int\limits_{t_k}^{\tau_k} (t - t_k)^{\mu_1} (\tau_k - t)^{\mu_2} dt; \quad (\mu_1, \mu_2) > 0,\ \mu_1 + \mu_2 = \mu.$$

Делая замену переменных $(t - t_k) = \sigma\rho$, $\rho = \tau_k - t_k \ge \lambda r$, находим

$$L_k \ge a \lambda^{\mu} r^{\mu - \nu + 1} \int\limits_0^1 \sigma^{\mu_1} (1 - \sigma)^{\mu_2} d\sigma.$$

Положим $\lambda^\mu = r^\beta$ и выберем постоянную $\beta > 0$ из условия $\beta + (\mu - \nu + 1) < 0$. Тогда $L_k = |z_k^* - z_k| \to \infty$ при $r \to 0$, что противоречит установленной выше сходимости $L_k \to 0$. Итак, предположение, что $r = (t_j - t_i) \to 0$, неверно, т. е. существует число $\varepsilon > 0$, для которого $(t_j - t_i) \ge \varepsilon > 0$.

Поскольку $t_1 = -1$ и $t_n = 1$ фиксированы и не могут одновременно входить в число сближающихся параметров t_k, осталось рассмотреть случай, когда, например, t_1 включается в их число.

Итак, пусть $r = (t_j - t_1) \to 0$, $1 < j < n$. С учетом выбора β_1 ($\beta_1 = \alpha_1 - 1$ при $(\delta_1 - \alpha_1) > 0$ и $\beta_1 = \delta_1 - 1$ при $(\delta_1 - \alpha_1) < 0$) имеем $|M_j(t_1)| \ne 0, \infty$. Поэтому случай $\mu - \nu + 1 \le 0$ не отличается от рассмотренного выше ($r = (t_j - t_i)$, $i \ge 2$).

Если $\mu - \nu + 1 > 0$, то один из концов полуокружности $K_r = \{\zeta \mid \operatorname{Im}\zeta > 0,\ |\zeta - t_1 - r/2| = r\}$ попадает в точку $t_0(r) = t_1 - r/2$, образ z_0 который лежит на свободной границе $L \subset \partial D$. Поэтому недостаточно доказать, что при $r \to 0$ стремится к нулю длина образа $\Lambda_r = F(K_r)$ полуокружности K_r при конформном отображении $z = F(\zeta)$, $F : E \to D$. Этот факт устанавливается аналогично рассмотренному выше случаю $r = t_j - t_i \to 0$, $i \ge 2$.

Требуется еще доказать сходимость $z_0(r) = F[t_0(r)] \to 0$ при $r \to 0$ ($F(t_1) = 0$). Тогда, очевидно, и все $l_k = |z_{k+1} - z_k|$, $k = \overline{1, j-1}$, будут также сходиться к нулю.

В силу того, что по предположению $\sum\limits_{k=1}^{j} \beta_k = \mu - \nu > -1$, имеем

$$|F(t_1 - r/2)| = \left| \int\limits_{t_1 - r/2}^{t_1} \prod_{k=1}^{j} (t - t_k)^{\beta_k} M_j(t)\, dt \right|$$

$$\le A \int\limits_{t_1 - r/2}^{t_1} \prod_{k=1}^{j} |t - t_k|^{\beta_k} dt \to 0 \quad \text{при } r \to 0.$$

Окончательно показано, что если $r = (t_j - t_i) \to 0$, $1 \le i < j < n$, то $|\ln l_k| \to \infty$, $k = \overline{i,j}$, т. е. возникает противоречие с условиями (8) на заданные величины l_k.

Следовательно, найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $|t_j - t_i| \geq \varepsilon > 0$, $i \neq j$, и тем самым выполняются включения (13). Лемма доказана.

Замечание 1. Введение дополнительных вершин $(z_{s-2}, z_{s-1}) \in P_{s-1}$ и $(z_{s-2}, z_{s-1}) \in P_s$ с углами, равными π в окрестности $z_s = \infty$, позволило при доказательстве оценок u_k использовать только уравнения вида (5), как и в случае конечного полигона P. В частности, такой подход существенно упрощает доказательство ограниченности $|\ln K|$ в изученных в [8, гл. IV] струйных задачах при наличии на P бесконечных вершин $z_s = \infty$ с нулевым углом ($P_{s-1} \cup P_s$ — полуполоса).

5. Локальная единственность решений

Будем называть (10) *задачей типа Кирхгофа* или *типа Рябушинского*, а чаще просто *струйной задачей*, если в описанных в разд. 3 соответствующих схемах течения обтекаемый простой полигон P может иметь бесконечные вершины (ср. с разд. 1). Установленные в разд. 3 априорные оценки решений уравнения (7) справедливы, в частности, и для струйных задач.

Методом, предложенным в [8], разрешимость уравнения (7) устанавливается только на основе этих априорных оценок. Необходимые нам в дальнейшем важные свойства решений уравнения (7) имеют место в задаче (10) лишь при следующих дополнительных условиях на геометрию полигона P:

$$\sum_{j=2}^{k} (\alpha_j - 1) < 1, \quad k = \overline{2, n-1}. \tag{14}$$

В симметричных схемах типа Рябушинского выполнения предположения (14) можно требовать только для каждой из симметричных частей полигона P.

Условие (14) означает, что полное приращение угла $\theta(z)$, $z \in P$, наклона касательной к обтекаемому препятствию P (с учетом скачков в угловых и бесконечных точках) должно быть меньше π, $|\theta(z) - \theta_0| < \pi$, $\theta_0 = \text{const}$, $z \in P$.

Классические результаты М. А. Лаврентьева [4] и Ж. Лере [3] о существовании и единственности струйных течений Кирхгофа были установлены для гладких конечных обтекаемых препятствий $\Gamma = (\partial D \backslash L)$ при том же условии на $\theta(z)$, $z \in \Gamma$.

Если для геометрической характеристики $p = (l, \alpha)$ выполняется условие (8) простого полигона, то для краткости этот факт будем отмечать символически так: $(l, \alpha, p) \in G(\delta)$.

Как уже отмечалось ранее, в системе уравнений (7), соответствующих задаче (1), одно из уравнений, а именно $l_{n-1} = g_{n-1}(u, \alpha)$, можно отбросить, а u_{n-1} вместе с постоянной K фиксировать. Поэтому, чтобы унифицировать обозначения, будем в дальнейшем в задачах (1), (10) считать $(g, u) \in \mathbb{R}^{n-1}$, полагая в (1), например, $l_{n-1} = u_{n-1} = \text{const}$ (за счет выбора u_{n-1}).

Лемма 2. *Пусть существует решение $u \in \Omega$ уравнения* (7), *соответствующее задачам* (1), (10), *для простого полигона $P \in G(\delta)$.*

Тогда $g(u, \alpha) \in C^2[\Omega \times G]$ и решение уравнения (7), *отвечающее задаче* (1), *локально единственно, т. е.*

$$\left| \frac{Dg(u, \alpha)}{Du} \right| = \{g_{ij}\} \neq 0, \infty; \quad g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}, \quad (u, \alpha) \in (\Omega \times G). \tag{15}$$

В задаче (10) *свойство* (15) *имеет место при выполнении условия* (14).

Доказательство дифференцируемости $l_k = g_k(u, \alpha)$ по аргументам в случае их представления в виде (5) проведено в [8, с. 119].

Если $l_k = g_k(u, \alpha)$ представляются в виде (6), то, поскольку в точке t_{k+1} функция $\frac{dz}{d\zeta}$ не имеет особенности (по условию $\alpha_{k+1} = 1$), дифференцируемость $g_k(u, \alpha)$ проверяется аналогично представлению (5).

С целью доказательства соотношения (15) для задачи (1) вычислим вариацию δl вектора $l \in \mathbb{R}^{n-2}$ через вариацию δu искомого решения $u \in \mathbb{R}^{n-2}$ уравнения (7) при фиксированном $\alpha \in G(\delta)$: $\delta l = \frac{Dg}{Du}\delta u$. Предположим, что $\delta u \neq 0$ при $\delta l = 0$, и, связывая вариации отображений $z : E \to D$ и $\zeta : D \to E$, получим $\delta z + \frac{dz}{d\zeta}\delta\zeta = 0$. Поскольку при $\zeta = t$, $\operatorname{Im} t = 0$ имеем $\operatorname{Im}\delta t = 0$ и в граничном условии (1) $\delta h(t) = 0$, то $\delta z(t) = -\frac{dz}{dt}\delta t$ удовлетворяет однородной краевой задаче (1), общее решение которой представляется в виде

$$\delta z = \Pi(\zeta)Q_s(\zeta), \quad Q_s = \sum_{k=0}^{s} c_k\zeta^k.$$

С другой стороны, вычислим δz из представления отображения $z : E \to D$:

$$z = \int_{-1}^{\zeta} \Pi(\zeta)M(\zeta)\, d\zeta, \quad \delta z = \int_{-1}^{\zeta} \Pi(\zeta)\Phi(\zeta, \delta u)\, d\zeta,$$

$$\Phi = \sum_k \left[(1 - \alpha_k)(\zeta - t_k)^{-1}M(\zeta) + \frac{\partial M}{\partial t_k}\right]\delta t_k; \quad |\delta z(\infty)| < \infty.$$

Сравнивая найденные δz и $\frac{d}{d\zeta}(\delta z)$ в окрестности t_k с их значениями из решения краевой задачи, окончательно получим

$$\delta z = \prod_{k=1}^{n}(\zeta - t_k)^{\alpha_k - \varepsilon_k}Q_m(\zeta), \quad Q_m = \sum_{k=0}^{m} c_k\zeta^k.$$

Здесь $\varepsilon_k = 0$, если $\delta t_k = 0$ и $\varepsilon_k = 1$ при $\delta t_k \neq 0$.

Поскольку $\delta t_1 = \delta t_n = 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = \sum_{k=2}^{n-1}\varepsilon_k \leq n - 2.$$

Тогда в окрестности $\zeta = \infty$ имеем $|\delta z| \leq M|\zeta|^s$, где $s = \sum_1^n(\alpha_k - \varepsilon_k) + m \geq (n - 1) - (n - 2) \geq 1$, что невозможно ввиду ограниченности $|\delta z(\infty)|$. Итак, $\delta z = 0$, откуда в представлении для δz и $\Phi(\zeta, \delta u) = 0$, что, в свою очередь, влечет за собой равенство $\delta u = 0$, а вместе с ним и соотношения (15).

Переходя к установлению (15) для задачи (10), отметим, что структура представлений (3), (11) и (3), (12) ее решений для схем Кирхгофа и Рябушинского отличается лишь наличием в $\frac{dz}{d\zeta}$ для последней схемы симметричного сомножителя $M_0(\zeta, -T)$, $T = (t_1, \dots, t_n)$. Поэтому ограничимся доказательством (15) для схемы Кирхгофа.

Как и выше, из представления

$$z = \int_{-1}^{\zeta} \frac{dz}{d\zeta}\, d\zeta$$

вычислим вариацию δz при фиксированном ζ через вариации δt_k и δK:

$$\delta z = \int\limits_{-1}^{\zeta} \frac{dz}{d\zeta}\left[\frac{\delta K}{K} + i\mu(\zeta)\right] d\zeta, \quad \mu = \sqrt{\zeta^2 - 1}\sum_k \frac{(1-\alpha_k)\delta t_k}{(\zeta - t_k)\sqrt{1-t_k^2}}.$$

Поскольку $\delta t_1 = \delta t_n = 0$, из равенства $\delta z + \delta\zeta z_\zeta = 0$ находим, что $\delta z(\pm 1) = 0$. Итак,

$$\delta z = \prod_{k=2}^{n-1} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1 + \varepsilon_k}(\zeta^2 - 1)R(\zeta), \quad |R(\zeta)| \leq \infty,$$

где $\varepsilon_k \geq 0$ — целые числа ($\varepsilon_k > 0$ только при $\delta t_k \neq 0$).

Введем аналоги функций Вайнштейна [8, с. 154]:

$$\Lambda = \zeta^2\delta K - 2K\zeta\delta z(z_\zeta)^{-1}, \quad F = \Lambda_\zeta + \Lambda[z_{\zeta\zeta}(z_\zeta)^{-1} - \zeta^{-1}]$$

и заметим, что с учетом представления для δz имеем

$$F = -\zeta\delta K - 2iK\zeta\mu(\zeta) + \zeta^2\delta K z_{\zeta\zeta}(z_\zeta)^{-1}.$$

Пусть $\zeta = t$ и $z_t = |z_t|e^{i\theta}$. Тогда

$$z_{tt}(z_t)^{-1} = (\ln z_t)_t = t^{-1} + i\theta_t, \quad |t| \geq 1,$$

откуда $F = it(t\theta_t\delta K - 2K_\mu)$. Поскольку $\operatorname{Im}\mu(t) = 0$, $|t| \geq 1$, то

$$\operatorname{Re} F = \operatorname{Re}(\Lambda_t + i\theta_t\Lambda) = 0, \quad |t| \geq 1.$$

В результате простых преобразований полученных соотношений приходим к следующей краевой задаче для гармонической в $E = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ функции $p(\zeta) = \operatorname{Im}\Lambda(\zeta)$:

$$p(t) = 0, \quad |t| \leq 1; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} - \theta_t p = 0, \quad |t| \geq 1 \quad (\eta = \operatorname{Im}\zeta).$$

Отметим, что в силу представления $\Lambda(\zeta)$ гармоническая функция $p(\zeta) = \operatorname{Im}\Lambda(\zeta)$ ограничена вместе с первыми производными в точках $\zeta = \pm 1$ и имеет на бесконечности порядок не выше второго. В точках $\zeta = \pm 1$ функция $p(\zeta)$ не может принимать экстремальных значений, так как $\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\theta_t p = 0$ при $t = \pm 1$. Следовательно, из точек $t = \pm 1$ начинаются линии $\Gamma^{\pm}$ уровня ($p = 0$) гармонической функции $p(\zeta)$. Если $\Gamma^{\pm}$ вместе с отрезком $[-1, 1]$ образуют некоторую область, то в силу принципа максимума $p \equiv 0$ в E.

Поэтому остается рассмотреть только случай, когда по крайней мере одна из линий $\Gamma^{\pm}$, например Γ^{+}, оканчивается в конечной точке $t^* \in (1, \infty)$, и пусть $\partial\Omega = \Gamma^{+} \cup \Gamma^{*}$, $\Gamma^{*} = [1, t^*]$, ограничивает область $\Omega \subset E$.

По построению гармоническая в области Ω функция $p(\zeta)$ удовлетворяет следующей краевой задаче на $\partial\Omega = \Gamma^{+} \cup \Gamma^{*}$:

$$p(\zeta) = 0, \ \zeta \in \Gamma^{+}; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} - \theta_t p = 0, \ t \in [1, t^*].$$

Покажем, что $p(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in \Omega$. Рассмотрим гармоническую функцию $\theta(\zeta) = -\operatorname{Im}[\ln w_\zeta(\zeta)]$, где $w(\zeta)$ — комплексный потенциал течения. При выполнении условия (14), очевидно, существует такой угол α, что $0 < |\theta(t) - \alpha| < \pi$, $|t| \leq 1$, $\theta(t)$ — угол наклона касательной полигона P с OX.

На прообразе $\{|t| \geq 1\}$ свободной границы L, где $q(t) = \mathrm{Re}(\ln w_t) = 1$ и тем самым
$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln q) = 0,$$
гармоническая функция $\theta(\zeta)$ не может достигать экстремумов. Таким образом, неравенство $|\theta(t) - \alpha| < \pi$ справедливо при всех $t \in (-\infty, \infty)$, а значит, и всюду в E. Тогда гармоническая функция $f(\zeta) = \mathrm{Im}(e^{i\alpha} w_\zeta) = q(\zeta)\sin(\alpha - \theta)$ не обращается в нуль при $\zeta \in \overline{E}$, за исключением, возможно, конечного числа точек $t_k \in [-1, 1]$, и удовлетворяет следующему легко проверяемому граничному условию:
$$\frac{\partial f}{\partial \eta} - \theta_t f = 0, \quad |t| \geq 1.$$

Функция $f(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы Фридрихса — Вайнштейна [8, с. 155], согласно которой $p(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in \overline{E}$, откуда и $\Lambda(\zeta) \equiv 0$ при $\zeta \in \overline{E}$, ибо $\Lambda(0) = 0$.

Поскольку $\delta z(\pm 1) = 0$, из определения $\Lambda(\zeta)$ находим $\delta K = \Lambda(\pm 1) = 0$ и оттуда же $\delta z = (K\zeta)^{-1} z_\zeta \Lambda(\zeta) = 0$. Тогда из тождества $(\delta z)_\zeta = i z_\zeta \mu(\zeta) = 0$ следуют равенства $\delta t_k = 0$, $k = \overline{2, n-1}$, завершающие доказательство леммы.

Преобразуем уравнение (7) к эквивалентной форме:
$$u = f(u, p); \quad f_k = u_k l_k^{-1} g_k(u, \alpha), \quad u \in \Omega, \quad p \in G(\delta). \tag{16}$$
Заметим, что $\bar{g}_k = g_k l_k^{-1} = f_k u_k^{-1} u$ и, очевидно, $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n-1})$ удовлетворяет (15), при этом
$$\bar{g}_{ij} = u_i^{-1} f_{ij}, \ i \neq j; \quad \bar{g}_{ii} = u_i^{-1}(f_{ii} - 1).$$
Следовательно,
$$\left|\frac{D\bar{g}}{Du}\right| = \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-1} \left|\frac{Df}{Du} - I\right| \neq 0, \quad u \in \Omega,$$
I — единичная матрица, что в силу непрерывности $\frac{Df}{Du}$ приводит к следующему утверждению, аналогичному лемме 2.

Лемма 3. *Преобразование $f(u, p)$ принадлежит $C^2(\Omega \times G)$, причем*
$$\left\| \left(I - \frac{Df}{Du} \right)^{-1} \right\| \leq d(\varepsilon, \delta) < \infty, \quad \frac{Df}{Du} = \{f_{ij}\}, \quad f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, \tag{17}$$
где $\|A\| = \sup\limits_{|v|=1} |Av|$, $A = \{a_{ij}\}$.

6. Метод непрерывности

Лемма 4. *Пусть отображение* (7) $l = g(u, \alpha)$, $u \in \Omega$, *непрерывно дифференцируемо; прообраз ограниченного замкнутого множества $G(\delta)$ определенного в* (8) *лежит в Ω (априорная оценка* (13)); *в точках $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$ разрешимости уравнения* (7) *решение $u \in \Omega$ локально единственно (соотношения* (15)).

Тогда уравнение (7) *имеет по крайней мере одно решение $u \in \Omega$.*

Если дополнительно к предыдущим условиям найдется вектор $p^0 = (l^0, \alpha^0) \in G(\delta)$, для которого решение u^0 уравнения (7) *единственно, то уравнение* (7) *однозначно разрешимо для любых $p \in G(\delta)$.*

Доказательство леммы проводится с помощью следующего вариационного метода непрерывности, предложенного в [8, с. 121, 122].

В задаче (1) рассмотрим отрезок прямой $P^0 = \{x, y \mid y = y^0, x_n < x < x_1\}$, а в (10) — $P^0 = \{x, y \mid x = x^0, y_1 < y < y_n\}$, где $z_k = x_k + iy_k, k = 1, n$ концы исходного полигона P, а постоянные y^0 и x^0 выбраны так, что $P^0 \cap P = 0$.

Зафиксируем произвольно точки $z_k^0 \subset P^0$, $k = \overline{2, n-1}$, $z_k^0 \neq z_{k+1}^0$, и будем рассматривать P^0 как полигон с вершинами z_k^0, $k = \overline{2, n-1}$. Для P^0 имеем $\alpha_k^0 = 1$, $k = \overline{2, n-1}$, и в уравнениях (7) функция $\left|\frac{dz^0}{dt}\right|$ не зависит от t_k^0 — прообразов вершин z_k^0, $k = \overline{2, n-1}$. Поэтому последовательно из уравнения (7) однозначно определяются u_k^0, $k = \overline{1, n-1}$.

Соединим точки z_k^0 с вершинами $z_k \in P$, $k = \overline{1, n}$, гладкими жордановыми кривыми $S_k : z = Z_k(\nu_k) \in C^2[0,1]$ таким образом, чтобы $|Z_k(\nu_k) - Z_j(\nu_j)| \geq \delta > 0$, $k \neq j$, где $\nu_k = \sigma_k|\sigma_k|^{-1}$, σ_k — натуральный параметр кривой S_k, $\left|\frac{dZ_k}{d\sigma_k}\right| = 1$. Выберем на S_k произвольно точки $z_k^{\nu_k} = Z_k(\nu_k)$, $\nu_k \in [0,1]$, $k = \overline{1, n}$, и проведем через них полигон P^ν, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, с геометрической характеристикой $p^\nu = (l^\nu, \alpha^\nu)$, $l^\nu = \left(l_1^{\nu_1}, \dots, l_{n-1}^{\nu_{n-1}}\right)$ — вектор длин сторон P^ν, $\alpha^\nu = \left(\alpha_1^{\nu_1}, \dots, \alpha_n^{\nu_n}\right)$, $\alpha_k^{\nu_k}$ — углы в точках $z_k^{\nu_k}$, $k = \overline{1, n}$.

По построению P^ν удовлетворяет условию (8) простого полигона с постоянной $\delta > 0$, не зависящей от ν. Далее метод непрерывности заключается в последовательном доказательстве однозначной разрешимости уравнения (7) с помощью теоремы о неявных функциях для непрерывно деформируемых полигонов P^ν начиная с P^0.

Следствие. *Для задачи* (1) *при условии* (4) *и задачи* (10) *при условии* (14) *уравнение* (7) *однозначно разрешимо.*

В самом деле, для этих задач согласно леммам 1, 2 выполняются предположения леммы 4 и для P^0 уравнения (7) однозначно разрешимы.

7. Сходимость циклического метода непрерывности

Процесс непрерывной деформации (вариации) начального полигона P^0 в заданный $P = P^e$, $e = (1, \dots, 1)$, с помощью семейства $\{P^\nu\}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_k \in [0,1]$, предложенный в разд. 6, может быть разбит на конечное число шагов (*циклов*).

С этой целью рассмотрим два полигона $(P^\lambda, P^\mu) \subset \{P^\nu\}$ с близкими геометрическими характеристиками p^λ, p^μ:

$$0 < |p^\lambda - p^\mu| \leq q \ll 1; \quad 0 \leq \lambda_k \leq \mu_k, \quad |\mu - \lambda| > 0, \tag{18}$$

где постоянная q — *мера деформации* P^λ в P^μ — будет фиксирована ниже. Пусть решение $u = f(u, p)$ $(u \equiv u^\lambda, p \equiv p^\lambda)$ уравнения (16) для P^λ построено, а $\bar{u} = f(\bar{u}, \bar{p})$ $(\bar{u} \equiv u^\mu, \bar{p} \equiv p^\mu)$ ищется.

Вычтем обе части уравнений (16) для $(\bar{u}, u) \in \Omega$ друг из друга и результат представим в виде

$$v - \Delta_u \bar{f}[v] = f(u, \bar{p}) - f(u, p) \equiv \Delta_p f, \quad v = \bar{u} - u, \tag{19}$$

где $\Delta_u \bar{f}[v] = \bar{f}(u + v) - \bar{f}(u)$, $\bar{f}(u) = f(u, \bar{p})$, $(f, u) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Введем обозначения:

$$\xi_k = (u_1, \dots, u_{k-1}),\ k = \overline{2, n-1}; \quad \eta_k = (u_{k+1}, \dots, u_{n-1}),\ k = \overline{1, n-2};$$

$$u = (\xi_k, u_k, \eta_k),\ \bar{u} = (\bar{\xi}_k, \bar{u}_k, \bar{\eta}_k), \quad k = \overline{2, n-2}.$$

Применим к каждой из компонент $\bar{f}_m$, $k = \overline{1, n-1}$, вектора $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1})$ следующие формулы конечных приращений:

$$\Delta_1 \bar{f}_m = \bar{f}_m(\bar{u}_1, \bar{\eta}_1) - \bar{f}_m(u_1, \bar{\eta}_1) = \bar{f}_{m_1}(u + \theta_{m_1} v) v_1;$$

$$\Delta_{n-1}\bar{f}_m = \bar{f}_m(\bar{\zeta}_{n-1}, \bar{u}_{n-1}) - \bar{f}_m(\bar{\zeta}_{n-1}, u_{n-1}) = \bar{f}_{mn-1}(u + \theta_{mn-1}v)v_{n-1};$$
$$\Delta_k\bar{f}_m = \bar{f}_m(\bar{\zeta}_k, \bar{u}_k, \bar{\eta}_k) - \bar{f}_m(\bar{\zeta}_k, u_k, \bar{\eta}_k) = \bar{f}_{mk}(u + \theta_{mk}v)v_k; \quad k = \overline{2, n-2}.$$

Здесь $\bar{f}_{mk} = \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial u_k}$, $\theta_{mk}v = \left(\theta^1_{mk}v_1, \dots, \theta^{n-1}_{mk}v_{n-1}\right)$, $|\theta^i_{mk}| \le 1$. В результате элементарных выкладок приходим к соотношениям

$$\Delta_u\bar{f}_m = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial u_k}(u + \theta_{mk}v)v_k,$$

откуда для $\Delta_u\bar{f} = (\Delta_u\bar{f}_1, \dots, \Delta_u\bar{f}_{n-1})$ находим

$$\Delta_u\bar{f} = \frac{D\bar{f}}{Du}(u + \theta v) \cdot v, \quad \frac{D\bar{f}}{Du}(u + \theta v) \equiv \{\bar{f}_{mk}(u + \theta_{mk}v)\}.$$

Отметим, что в силу леммы 3 $\Delta_u\bar{f}[v] \in C^2(\Omega)$ при фиксированных $(u, \bar{p}) \in \Omega \times G(\delta)$. Представим оператор $\Delta_u\bar{f}[v]$ в виде

$$\Delta_u\bar{f} = \frac{D\bar{f}(u)}{Du}v + A(v); \quad A = \left[\frac{D\bar{f}(u + \theta v)}{Du} - \frac{D\bar{f}(u)}{Du}\right] \cdot v, \tag{20}$$

где $\theta v = (\theta_1 v_1, \dots, \theta_{n-1}v_{n-1})$. Поскольку $\frac{D\bar{f}(u)}{Du}$ не зависит от v, то вместе с $\Delta_u\bar{f}$ пространству $C^2(\Omega)$ будет принадлежать и $A(v)$, причем

$$|A(\bar{v}) - A(v))| \le M\max(|v|, |\bar{v}|)|\bar{v} - v|, \quad (\bar{v}, v) \in \Omega, \tag{21}$$

$M = \sup\limits_{p\in G}\|f\|_{C^2(\Omega)}$. С учетом (20) уравнение (19) принимает вид

$$v = \Phi(v); \quad \Phi = \left(I - \frac{D\bar{f}(u)}{Du}\right)^{-1} A(v) + F(u, \bar{p}). \tag{22}$$

Здесь $F = \left(I - \frac{D\bar{f}(u)}{Du}\right)^{-1}\Delta_p f$ — вектор-функция, не зависящая от v, при этом

$$|F| \le dM_0|\bar{p} - p|, \quad M_0 = \sup_{u\in\Omega}\|f(u, p)\|_{C^1(G)}. \tag{23}$$

В силу оценок (17), (21) оператор $\Phi(v)$ обладает свойством

$$|\Phi(\bar{v}) - \Phi(v)| \le N|\bar{v} - v|, \tag{24}$$

где $N = Md\max(|v|, |\bar{v}|)$.

Зафиксируем постоянную q в (18) и выберем область изменения v:

$$|\bar{p} - p| \le q = \frac{1}{2dM_0}; \quad \Omega_\rho = \left\{v \,\middle|\, |v| \le \rho = \frac{1}{2Md}\right\}, \tag{25}$$

где d, M и M_0 — постоянные в неравенствах (17), (21), (23). Тогда при $v \in \Omega_\rho$ в неравенстве (24) $N = 1/2$ и тем самым оператор $\Phi(v)$ является сжимающим. Кроме того, в силу (25) имеем

$$|\Phi(v)| \le dM_0|\bar{p} - p| + Md|v|^2 \le \rho \quad \text{при } v \in \Omega_\rho,$$

т. е. Φ: $\Omega_\rho \to \Omega_\rho$.

Таким образом, при условии (25) малой деформации (вариации) P^λ в P^μ к уравнению (19) на множестве Ω_ρ применим принцип сжатых отображений, согласно которому сходится следующий итерационный процесс:

$$v^{(m+1)} = \Phi(v^{(m)}), \quad m = 0, 1, \dots. \tag{26}$$

Поскольку шаг деформации $q \ll 1$ не зависит от начального полигона P^λ, для которого разрешимость уравнения (16) доказана, за конечное число циклов деформаций начиная с простейшего полигона P^0 (см. разд. 5) построим решение уравнения $u = f(u, p)$ для произвольного заданного простого полигона $P \subset G(\delta)$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Метод непрерывности за конечное число циклов деформаций (вариаций) полигонов* P^ν *начиная с* P^0 *сходится к единственному решению уравнения* (16) *для заданного простого полигона* $P \subset \{P^\nu\}$. *На каждом цикле деформаций близких полигонов* P^λ, P^μ *это решение может быть построено с помощью метода итераций* (26) *для эквивалентного* (16) *уравнения* (19).

Замечание 2. Отметим, что на каждом цикле деформаций полигона P^λ, в P^μ, $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^n$ решение u^μ уравнения (16) фактически строится методом продолжения по векторному параметру $(\mu - \lambda) \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 3. В монографии [8 , гл. III, IV] обоснован предельный переход в задачах (1), (10) для семейства простых полигонов $P^{(m)}$ к решению этих задач для криволинейной границы $\Gamma = \lim\limits_{m\to\infty} P^{(m)}$, справедливый и в случае бесконечных полигонов $P^{(m)}$. Однако в предельном случае единственность решений не гарантируется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weinstein A.* Ein hydrodynamischer Unitatsatz // Math. Z. 1924. Bd 19. S. 265–274.
2. *Leray J., Weinstein A.* Sur un probleme de representation conforme pose par la theorie de Helmholtz // Comp. Rend. de l'Ac. des Sc. 1934. V. 198. P. 430–433.
3. *Leray J.* Les problemees de representation conform d'Helmholts theories des sillages et de proues // Comm. Math. Helvetici. 1935–1936. V. 8, N 2. P. 149–180; 250–263.
4. *Лаврентьев М. А.* О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй // Мат. сб. 1938. Т. 4. С. 391–458.
5. *Лаврентьев М. А.* О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций // Мат. сб. 1936. Т. 1. С. 815–846.
6. *Serrin J. B.* Existences theorems for some hydrodynamical free boundary problems // J. Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. P. 1–48.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
8. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
9. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: ГИТТЛ, 1952.

Статья поступила 3 апреля 2000 г.

г. Новосибирск
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН