Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.956.6

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Н. К. Мамадалиев

Аннотация: Получено представление обобщенного решения гиперболического уравнения второго рода, с помощью которого доказана однозначная разрешимость рассмотренных нелокальных краевых задач. Библиогр. 16.

1. Введение

Исследованию вопросов существования и единственности решения задач Коши, Дарбу посвящено много работ. При широких предположениях на заданные коэффициенты вырождающегося гиперболического уравнения Проттером [1] была доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Коши.

С. Геллерстедт [2] а затем И. С. Березин [3] отмечали, что при не выполнении условий теоремы Проттера задача Коши вообще может оказаться некорректной. Г. Хельвиг [4] привел пример корректной задачи Коши, для которой не выполняется условия теоремы Проттера. Следовательно, условия теоремы Проттера не являются необходимыми и достаточными. И. К. Бабенко [5] исследовал задачу Коши — Гурса для уравнения

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C(x,y)u = 0 \tag{1.1}$$

в классе обобщенных решений. Случай $C(x,y) = \mathrm{const}$ изучен в [2]. И. К. Бабенко получил решение задачи Коши — Гурса в форме, удобной для дальнейших исследований (например, в задаче Трикоми).

В [6] доказано, что задача Коши — Гурса для уравнения

$$y^m u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y) \tag{1.2}$$

имеет единственное решение. А. В. Бицадзе [7] для уравнения

$$y^m u_{yy} - u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y),\ 0 < m < 2,\ y > 0, \tag{1.3}$$

существенно отличающегося от уравнений (1.1) и (1.2), предложил исследовать задачу Коши с видоизмененными начальными условиями.

Задача Коши с видоизмененными начальными данными для уравнения (1.3) подробно изучена в работах [8, 9]. В частности [9], рассмотрено уравнение

$$L_\alpha u \equiv y u_{yy} + u_{xx} + \alpha u_y = 0 \tag{1.4}$$

в полуплоскости $y < 0$ в области D_2, ограниченной характеристиками уравнения (1.4)

$$AC : x - 2\sqrt{-y} = 0, \quad BC : x + 2\sqrt{-y} = 1, \quad AB : y = 0.$$

Рассмотрены все отрицательные значения α, за исключением целых. В области D_2 корректна видоизмененная задача Коши с начальными данными на линии вырождения:

$$u_\alpha(x,0)=\tau(x), \tag{1.5}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^\alpha[u_\alpha - A_n^-(\tau)]'_y=\nu(x), \tag{1.6}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные функции, $A_n^-(\tau)$ — известный оператор (будет определен ниже), причем $\tau(x)\in C^{(2(n+1))}[0;1]$, $y(x)\in C^{(2)}[0;1]$. Решение этой задачи в характеристических переменных $\xi=x-2\sqrt{-y}$, $\eta=x+2\sqrt{-y}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}u_\alpha(\xi,\eta)&=\gamma_1\sum_{k=0}^{n}N_k(\alpha,n,\delta)(\eta-\xi)^{-2\delta-1}4^{-2k}\int\limits_\xi^\eta \tau^{(2k)}(\lambda)(\lambda-\xi)^{k+\delta}(\eta-\lambda)^{k+\delta}\,d\lambda\\&\quad-(-1)^n\gamma_2 4^{2(\alpha-1)}\int\limits_\xi^\eta \nu(\lambda)(\lambda-\xi)^{1/2-\alpha}(\eta-\lambda)^{1/2-\alpha}\,d\lambda\\&\equiv A_n^-(\tau)-(-1)^n\gamma_2 4^{2(\alpha-1)}\int\limits_\xi^\eta \nu(\lambda)(\lambda-\xi)^{1/2-\alpha}(\eta-\lambda)^{1/2-\alpha}\,d\lambda,\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2+2\delta)}{\Gamma^2(1+\alpha)},\quad \gamma_2=\frac{\Gamma(1-2\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1/2-\alpha)},\quad N_k(\alpha,n,\delta)=\frac{2^{2k}C_n^k\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta+k)(\alpha)_n},$$

$$\delta=\alpha+n-3/2,\ \alpha=-n+\alpha_0,\ 0<\alpha_0<1/2,\ 1/2<\alpha_0<1,\ n=0,1,2,\dots,$$

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1).$$

Определение [10]. Функция $u(\xi,\eta)$ называется *обобщенным решением задачи Коши для уравнения* (1.4) в области D_2 из класса R, если ее можно представить в виде (1.7) и

$$\tau(x)=\int\limits_0^x T(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt, \tag{1.8}$$

где $\nu(x)$ и $T(x)$ — непрерывные на $[0;1]$ функции, $-2\beta=2n-2\delta-2$.

При $n=0$, $0<\alpha_0<1/2$ представление обобщенного решения класса R установлено М. М. Смирновым [11].

В данной работе получено новое представление обобщенного решения класса R при всех нецелых отрицательных значениях α, в котором отсутствуют производные функции $\tau(x)$. Это обстоятельство существенно облегчает исследование задач Трикоми и Геллерстедта для различных уравнений смешанного типа, включая уравнения гиперболо-параболического типа. Отметим, что вывод данного представления опирается на некоторые новые соотношения гипергеометрических функций.

2. Представление обобщенного решения класса *R*

Рассмотрим выражение (1.8). Из него непосредственно следует, что

$$\tau^{(2k)}(x)=\prod_{l=0}^{2k-1}(2n-2\delta-2-l)\int\limits_0^x T(t)(x-t)^{2n-2\delta-2-2k}\,dt. \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в формулу (1.7), находим

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1(\eta-\xi)^{-2\delta-1}J_1-J_2, \tag{2.2}$$

где

$$J_1=\int_0^{\xi} I_1(\xi;\eta;\zeta)T(\zeta)\,d\zeta+\int_{\xi}^{\eta} I_2(\xi;\eta;\zeta)T(\zeta)\,d\zeta,$$

$$J_2=(-1)^n\gamma_2 4^{2(\alpha-1)}\int_{\xi}^{\eta}\nu(t)(t-\xi)^{1/2-\alpha}(\eta-t)^{1/2-\alpha}\,dt,$$

причем

$$I_1(\xi;\eta;\zeta)=\sum_{k=0}^{n}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}\prod_{l=0}^{2k-1}(2n-2\delta-2-l)$$
$$\times\int_{\xi}^{\eta}(t-\xi)^{k+\delta}(\eta-t)^{k+\delta}(t-\zeta)^{2n-2\delta-2-2k}\,dt, \tag{2.3}$$

$$I_2(\xi;\eta;\zeta)=\sum_{k=0}^{n}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}\prod_{l=0}^{2k-1}(2n-2\delta-2-l)$$
$$\times\int_{\zeta}^{\eta}(t-\xi)^{k+\delta}(\eta-t)^{k+\delta}(t-\zeta)^{2n-2\delta-2-2k}\,dt, \tag{2.4}$$

Интегралы в (2.3) и (2.4) можно выразить через гипергеометрические функции:

$$I_1(\xi;\eta;\zeta)=(\eta-\xi)^{2\delta+1}(\eta-\zeta)^{2n-2\delta-2}\sum_{k=0}^{n}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}(2n-2\delta-2k-1)_{2k}$$
$$\times\frac{\Gamma^2(k+\delta+1)}{\Gamma(2k+2\delta+2)}Z^{2k}F(k+\delta+1,2\delta+2+2k-2n,2\delta+2k+2;Z),\quad Z=\frac{\eta-\xi}{\eta-\zeta},$$

$$I_2(\xi;\eta;\zeta)=(\eta-\xi)^{n-\delta-1}(\eta-\zeta)^{\delta+n}\sum_{k=0}^{n}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}(2\beta)_{2k}$$
$$\times\frac{\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(2n-2\delta-1-2k)}{\Gamma(2n-\delta-k)}$$
$$\times Z_1^{-k+n}F(k+\delta+1,-k-\delta,2n-\delta-k;Z_1),\quad Z_1=\frac{\eta-\zeta}{\eta-\xi}.$$

Лемма. *Справедливо тождество*

$$[2(s-k)+1][2(s-k)+3]\dots[2(s-k)+(2l-1)]$$
$$=\widehat{P}_l(s)+\widehat{P}_{l-1}(s)k+\dots+\widehat{P}_0(s)k(k-1)\dots(k-l+1), \tag{2.5}$$

где $\widehat{P}_i(s)$, $i=\overline{0,l}$, *— определенные многочлены степени* i.

Доказательство леммы проводится методом математической индукции.

Теорема 1. *Справедливы тождества*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(2\delta+2)\Gamma^2(k+\delta+1)}{\Gamma^2(\delta+1)\Gamma(2k+2\delta+1)}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}(2\beta)_{2k}Z^{2k}$$
$$\times F(k+\delta+1,2\delta+2+2k-2n,2\delta+2k+2;Z)=(1-Z)^{-\beta}, \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(-\delta)}{\Gamma(1+\delta)\Gamma(-2\delta-1)}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}(2\beta)_{2k}Z_1^{2k}$$
$$\times\frac{\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(2n-2\delta-2k-1)}{\Gamma(-k-\delta+2n)}Z_1^{-k+n}F(k+\delta+1,-k-\delta,-k-\delta+2n;Z_1)$$
$$=(-1)^n(1-Z_1)^{-\beta} \quad (2.7)$$

Остановимся подробно на доказательстве тождества (2.6). Гипергеометрические функции в левой части запишем в виде рядов. Правую часть (2.6) разложим в ряд:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(2\delta+2)\Gamma^2(k+\delta+1)}{\Gamma^2(\delta+1)\Gamma(2k+2\delta+2)}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}(2\beta)_{2k}Z^{2k}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k+\delta+1)_m(2\beta+2k)_m}{(2\beta+2n+2k)_m m!}Z^m$$
$$=1+\beta Z+\frac{\beta(\beta+1)}{2!}Z^2+\dots+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+l-1)}{l!}Z^l+\dots. \quad (2.8)$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты в левой и правой частях степенных рядов (2.8) при одинаковых степенях Z^l и $[l/2]\le n$ вычисляются по формуле

$$\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{\Gamma(2\delta+2)\Gamma^2(k+\delta+1)}{\Gamma^2(\delta+1)\Gamma(2k+2\delta+2)}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}(2\beta)_{2k}$$
$$\times\frac{(k+\delta+1)_{l-2k}(2\beta+2k)_{l-2k}}{(2\beta+2n+2k)_{l-2k}(l-2k)!}=\frac{(\beta)_l}{l!} \quad (2.9)$$

Покажем, что соотношение (2.9) является тождеством для любых натуральных значений n.

Для доказательства необходимо рассмотреть следующие случаи.

Случай A. $l=2s$. После несложных преобразований (2.9) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{s}2^{-k}C_n^k\frac{(\beta)_s(\delta+1+k+s+1)_{s-2k-1}[2\beta+2k]_{s-k}}{[2\delta+2]_s(2s-2k)!}=\frac{(\beta)_{2s}}{(2s)!}, \quad (2.10)$$

где $[a]_k=(a+1)(a+3)\dots.(a+2k-1)$.

Преобразуя (2.10) и подставляя $\delta=\beta+n-1$, получим

$$P_{2s}(\beta)\equiv\sum_{k=0}^{s}2^{-k}C_n^k\frac{(n+\beta+s)_{s-k}[2\beta+2k+1]_{s-k}}{(2s-2k)!}=\frac{(\beta+s)_s[2n+2\beta]_s}{(2s)!}. \quad (2.11)$$

Левую и правую части (2.11) можно рассматривать как полиномы относительно β.

Два полинома равны, если равны коэффициенты при старшей степени β и значения их совпадают в различных точках, число которых равно степени полинома [12]. Полином правой части равен нулю при значениях β, найденных из равенства нулю одного из множителей.

Покажем, что при найденных значениях β левая часть (2.11) также обращается в нуль. При $\beta = -s$ необходимо показать, что

$$P_{2s}(-s) \equiv 0. \tag{2.12}$$

Имеет место формула [13]

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{a-m}{k} \binom{a}{k}^{-1} = 0, \quad m < n. \tag{2.13}$$

Формулу (2.13) перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(a-k)!}{(a-m-k)!} = 0, \quad m < n. \tag{2.14}$$

Преобразуем левую часть (2.12) к виду, удобному для применения формулы (2.14):

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^{k-s} 2^{-k} C_n^k (n)_{s-k} [2(s-k)-1]!!}{(2s-2k)!} = \frac{(-1)^s n}{s! 2^s} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_s^k \frac{(n+s-k-1)!}{(n-k)!}.$$

В формуле (2.13) положим $a = n + s - 1$, $m = a - n$. Так как $s - 1 < s$, условие $m < n$ выполняется: $a - k = n + s - 1 - k$, $(a-k)! = (n+s-k-1)!$, $(a-k-m)! = (n-k)!$.

Из (2.14) вытекает (2.12).

При $\beta = -s - 1$ необходимо показать, что

$$P_{2s}(-s-1) \equiv 0. \tag{2.15}$$

Преобразуем левую часть (2.15) к более удобному виду:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{s} & \frac{(-1)^{k-s} 2^{-k} C_n^k (n-1)_{s-k} [2(s-k)+1]!!}{(2s-2k)!} \\
&= \frac{(-1)^s (n-1)}{s! 2^s} (2s+1) \sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_n^k \frac{(n+s-k-2)!}{(n-k)!} \\
&\quad + \frac{(-1)^{s+1}}{(n-2)! 2^{s-1}} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_n^k \frac{(n+s-k-2)!}{(s-k)!} k.
\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_n^k \frac{(n+s-k-2)!}{(n-k)!} = 0 \tag{2.16}$$

и

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_n^k \frac{(n+s-k-2)!}{(s-k)!} k = 0. \tag{2.17}$$

На основании (2.16), (2.17) получим формулу (2.15). В формуле (2.14) положим $a = n+s-2$, $m = s-2$. Тогда $(a-k)! = (n+s-k-2)!$, $(a-m-k)! = (n-k)!$ Так как $s-2<s$, условие $m<n$ выполняется, и из (2.14) вытекает (2.16). В левой части равенства (2.17) проведем замену переменной суммирования по формуле $k'=k-1$ и обозначим $s-1=s'$. Тогда равенство (2.17) следует из формулы (2.14), где достаточно положить $a=n+s'-2$, $m=s'-1$.

При $\beta=-s-2$ необходимо показать, что $P_{2s}(-s-2)\equiv 0$.

Выражение $P_{2s}(-s-2)$ представим в виде

$$P_{2s}(-s-2)=\frac{(-1)^s n!}{1\cdot 3(n-3)!2^s}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{(n+s-k-3)![2(s-k)+1][2(s-k)+3]}{k!(n-k)!(s-k)!}.$$

На основании леммы имеем

$$(-1)^s\frac{1\cdot 3(n-3)!2^s}{n!}P_{2s}(-s-2)=\widehat{P}_2(s)\sigma_{21}+\widehat{P}_1(s)\sigma_{22}+\widehat{P}_0(s)\sigma_{23},$$

где

$$\widehat{P}_2(s)=(2s+1)(2s+3),\ \widehat{P}_1(s)=-8s-4,\ \widehat{P}_0(s)=4,$$

$$\sigma_{21}=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{(n+s-k-3)!}{k!(n-k)!(s-k)!},\quad \sigma_{22}=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{(n+s-k-3)!}{k!(n-k)!(s-k)!}k,$$

$$\sigma_{23}=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{(n+s-k-3)!}{k!(n-k)!(s-k)!}k(k-1).$$

Нетрудно показать, что $\sigma_{21}=\sigma_{22}=\sigma_{23}\equiv 0$. Значит, $P_{2s}(-s-2)\equiv 0$.

Аналогично доказывается тождество (2.11) при $\beta=-s-3$, $\beta=-s-4\dots$. Доказательство такой серии при $\beta=-2s+1$ с применением леммы сводится к доказательству тождественного обращения в нуль всех коэффициентов при полиномах $\widehat{P}_{2s-i}(s)$, $i=\overline{3,2s}$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{1}{k!(s-k)!}=\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k=0,$$

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{k}{k!(s-k)!}=-\frac{1}{s'!}\sum_{k'=0}^{s'}(-1)^{k'}C_{s'}^{k'}=0,\quad \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{k(k-1)}{k!(s-k)!}=0 \text{ и т. д.},$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{k(k-1)\dots(k-s+2)}{k!(s-k)!}&=\sum_{k=s-1}^{s}(-1)^k\frac{1}{(k-s+1)!(s-k)!}\\&=(-1)^{s-1}\frac{1}{0!(s-s+1)!}+(-1)^s\frac{1}{1!0!}=0.\end{aligned}$$

Покажем, что как правая, так и левая части (2.11) при $2\beta+2n+2s-1=0$ обращаются в нуль. Обращение в нуль правой части (2.11) очевидно, а левая часть принимает вид

$$\sum_{k=0}^{s}C_n^k 2^{-k}\frac{\frac12\frac32\dots\frac{2s-2k-1}{2}(-2n)(-2n-2)\dots(-2n-2s+2k+2)}{(2s-2k)!}\equiv 2^sP_{2s}(-s)\equiv 0.$$

По ранее доказанному при $2n+2\beta+2s-3,\dots,2\beta+2n+1=0$ левая и правая части (2.11) обращаются в нуль тождественно.

Случай B. Перейдем к рассмотрению случая нечетных l. Пусть $l = 2s+1$. Тогда необходимо доказать тождество

$$\sum_{k=0}^{s}\frac{\Gamma(2\delta+2)\Gamma^2(k+\delta+1)}{\Gamma^2(\delta+1)\Gamma(2k+2\delta+1)}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}\prod_{l=0}^{2k-1}(-2\beta-2s-1) \\ \times\frac{(k+\delta+1)_{2s-2k+1}(2\beta+2k)_{2s-2k+1}}{(2\beta+2n+2k)_{2s-2k+1}(2s-2k+1)!}\equiv\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2s)}{(2s+1)!}$$

или

$$\sum_{k=0}^{s}C_n^k\frac{2^{-k}(n+\beta+s+1)_{s-k+1}[2\beta+2k+1]_{2s-2k-2}}{(2s-2k+1)!} \\ =\frac{(\beta+s+1)_{s-1}(2\beta+2n+1)_{2s-2}}{(2s+1)!} \tag{2.18}$$

Доказательство (2.18) аналогично доказательству тождества (2.11). Изучение коэффициентов при степенях Z^l и $[l/2] > n$ в (2.8) сводится к доказательству тождества

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(2\delta+2)\Gamma^2(k+\delta+1)}{\Gamma^2(\delta+1)\Gamma(2k+2\delta+2)}N_k(\alpha,n,\delta)4^{-2k}\prod_{l=0}^{2k-1}(-2\beta-l) \\ \times\frac{(k+\delta+1)_{l-2k}(2\beta+2k)_{l-2k}}{(2\beta+2n+2k)_{l-2k}(l-2k)!}=\frac{(\beta)_l}{l!}. \tag{2.19}$$

Доказательство (2.19) разбивается на два случая l: четных ($l = 2s$) и нечетных ($l = 2s+1$). При доказательстве пользуемся формулой (2.14). При выборе m следует поменять местами s и n, дальнейшее доказательство не отличается от случая $[l/2] \le n$.

Формула (2.7) доказывается тем же методом, что и формула (2.6). Роль формулы (2.14) играет формула [13]

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_{a+bk}^m = 0, \quad 0 < m < n.$$

Теорема доказана.

Некоторые частные случаи доказанной теоремы получены в [14]. На основании вышесформулированной теоремы выражения $I_1(\xi,\eta,\zeta)$ и $I_2(\xi,\eta,\zeta)$ запишем в виде

$$I_1(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\Gamma^2(\delta+1)}{\Gamma(2\delta+2)}(\eta-\xi)^{2\delta+1}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}, \tag{2.20}$$

$$I_2(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(-2\delta-1)}{\Gamma(-\delta)}(-1)^n(\eta-\xi)^{2\delta+1}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta}. \tag{2.21}$$

Подставив (2.20), (2.21) в (2.2), получим представление обобщенного решения класса R:

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}T(\zeta)\,d\zeta+\int_{\xi}^{\eta}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta}N(\zeta)\,d\zeta, \tag{2.22}$$

где

$$N(\zeta)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(\zeta)-(-1)^n\cdot 2^{4\beta-2}\gamma_2\nu(\zeta).$$

3. Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)u, & y \geq 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial y}; & y < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

в области $D = D_1 \cup D_2 \cup AB$, причем область D_1 ограничена при $y > 0$ отрезками AB, BB_0, A_0B_0, AA_0 прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ соответственно, а область D_2 при $y < 0$ — характеристиками

$$AC : x - 2\sqrt{-y} = 0, \quad BC : x + 2\sqrt{-y} = 1, \quad AB : y = 0$$

уравнения (3.1). Здесь $a(x,y)$, $b(x,y)$ — заданные функции, причем

$$a(x,y) \in C^{(1,h)}(\overline{D}_1), \quad b(x,y) \in C^{(0,h)}(\overline{D}_1), \quad 0 < h < 1;$$

α — известное нецелое отрицательное число. Число α всегда можно представить в виде $\alpha = -n + \alpha_0$, где α_0 подчиняется одному из неравенств $-1/2 < \alpha_0 < 0$ или $0 < \alpha_0 < 1/2$, а $n = 1, 2, 3 \dots$.

Непрерывное решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (3.1) при $y < 0$ в области D_2 с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x), \tag{3.2}$$

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha}[u - A_n^-(\tau)]'_y = (-1)^n \nu(x) \tag{3.3}$$

в характеристических переменных $\xi = x - 2\sqrt{-y}$, $\eta = x + 2\sqrt{-y}$ имеет вид [9]

$$u_\alpha(\xi,\eta) = \gamma_1 \sum_{k=0}^{n} N_k(\alpha,n,\delta)(\eta-\xi)^{-2\delta-1}4^{-2k}\int_{\xi}^{\eta} \tau^{(2k)}(t)(t-\xi)^{k+\delta}(\eta-t)^{k+\delta}\,dt$$

$$- (-1)^n \gamma_2 4^{2(\alpha-1)} \int_{\xi}^{\eta} \nu(t)(t-\xi)^{1/2-\alpha}(\eta-t)^{1/2-\alpha}\,dt, \tag{3.4}$$

где $\tau(x) \in C^{(2n)}[0,1]$, $\nu(x) \in C^2[0,1]$,

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\delta+2)}{\Gamma^2(1+\delta)}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)^{4\beta-1} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

$$N_k(\alpha,n,\delta) = \frac{2^{2k}C_n^k\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta+k)\prod_{s=0}^{k-1}(\alpha+s)}, \quad \beta = \alpha - 1/2 = \delta - n + 1$$

$$A_n^-(\tau) = \gamma_1 \sum_{k=0}^{n} N_k(\alpha,n,\delta)(-y)^k \int_0^1 \tau^{(2k)}(\lambda)[t(1-t)]^{k+\delta}\,dt, \tag{3.5}$$

$$\lambda = x - 2\sqrt{-y}(1-2t).$$

Задача N. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:

a) $u(x,y) \in C(\overline{D})$;

б) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (3.1) в области D_1 и обобщенным решением класса R в области D_2;

в) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}[u - A_n^-(\tau)]'_y = \lim_{y\to +0}\frac{\partial u}{\partial y};$$

г) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{AA_0} = \varphi_0(y), \quad u|_{BB_0} = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{3.6}$$

$$u[\theta_0(x)] = \sum_{i=0}^{2n-[2\alpha_0]+1} C_i(x)\frac{d^i}{dx^i}u(x,0) + l(x)\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=+0} + f(x), \tag{3.7}$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $C_i(x)$, $l(x)$, $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции; $\theta_0(x)$ — аффикс точки пересечения характеристики, выходящей из точки $E(x,0)$ с характеристикой AC.

Определение. Функция $u(\xi,\eta)$, определенная формулой (3.4), называется *обобщенным решением уравнения* (3.1) класса R в области D_2, если $\nu(x) \in C[0,1]$ и функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt, \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.8}$$

причем $T(t)$ — некоторая непрерывная на $[0,1]$ функция.

Обобщенное решение уравнения (3.1) класса R в области D_2 имеет согласно доказанному в предыдущем разделе вид

$$u(\xi,\eta) = \int_0^{\xi}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}T(\zeta)\,d\zeta + \int_{\xi}^{\eta}(\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta}N(\zeta)\,d\zeta, \tag{3.9}$$

где

$$N(\zeta) = \frac{1}{2\cos\pi\beta}T(\zeta) - (-1)^n\cdot 2^{4\beta-2}\gamma_2\nu(\zeta). \tag{3.10}$$

Подчиняя (3.9) условию (3.7), найдем

$$u[\theta_0(x)] = \frac{1}{2\cos\pi\beta}\int_0^x (x-\zeta)^{-\beta}\zeta^{-\beta}T(\zeta)\,d\zeta - (-1)^n 2^{4\beta-2}\gamma_2\int_0^x (x-\zeta)^{-\beta}\zeta^{-\beta}\nu(\zeta)\,d\zeta. \tag{3.11}$$

Из (3.8) следует, что

$$\frac{d^i u(x,0)}{dx^i} = \prod_{k=0}^{i-1}(-2\beta-k)\int_0^x (x-t)^{-2\beta-i}T(t)\,dt, \tag{3.12}$$

Согласно (3.7), (3.11) и (3.12) основное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, перенесенное на отрезок AB, имеет вид

$$\frac{1}{2\cos\pi\beta}\int_0^x (x-t)^{-\beta}t^{-\beta}T(t)\,dt - (-1)^n 2^{4\beta-2}\gamma_2\int_0^x (x-\zeta)^{-\beta}\zeta^{-\beta}\nu(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \sum_{i=0}^{2n-[2\alpha_0]+1} C_i(x) \prod_{k=0}^{i-1}(-2\beta-k) \int_0^x (x-t)^{-2\beta-i} T(t)\,dt + l(x)\nu(x) + f(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{3.13}$$

В соответствии с условиями задачи при $y \to +0$ из уравнения (3.1) получим соотношение

$$\tau''(x) - \nu(x) + a(x,0)\tau'(x) + b(x,0)\tau(x) = 0. \tag{3.14}$$

Из соотношения (3.14) определим функцию $\nu(x)$. Последняя с учетом (3.8) имеет вид

$$\nu(x) = 2\beta(2\beta+1)\int_0^x (x-t)^{-2\beta-2}T(t)\,dt - a(x,0)2\beta \int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}T(t)\,dt + b(x,0)\int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt. \tag{3.15}$$

Рассмотрим соотношения (3.13) и (3.15) как систему уравнений относительно функций $\nu(x)$ и $T(x)$. Исключим из уравнения (3.13) функцию $\nu(x)$ и запишем его в виде

$$\begin{aligned}
&C_{2n-[2\alpha_0]+1}(x) \prod_{k=0}^{i-1}(-2\beta-k) \int_0^x (x-t)^{-2\beta-2n+[2\alpha_0]-1} T(t)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2\cos\pi\beta}\int_0^x (x-t)^{-\beta} t^{-\beta} T(t)\,dt - (-1)^n 2^{4\beta-2}\gamma_2 \int_0^x (x-t)^{-\beta} t^{-\beta} \\
&\quad \times \Bigg[2\beta(2\beta+1)\int_0^t (t-s)^{-2\beta-2}T(s)\,ds - a(t,0)2\beta\int_0^t (t-s)^{-2\beta-1}T(s)\,ds \\
&\quad + b(t,0)\int_0^t (t-s)^{-2\beta}T(s)\,ds - \sum_{i=0}^{2n-[2\alpha_0]} C_i(x)\prod_{k=0}^{i-1}(-2\beta-k)\int_0^x (x-t)^{-2\beta-i}T(t)\,dt \Bigg] \\
&\quad - l(x)\Bigg[2\beta(2\beta+1)\int_0^x (x-t)^{-2\beta-2}T(t)\,dt - a(x,0)2\beta\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}T(t)\,dt \\
&\quad + b(x,0)\int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt \Bigg] - f(x),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

здесь $-1 < -2\beta - 2n + [2\alpha_0] - 1 < 0$.

Теорема 2. *Если* $a(x,y) \in C^{(1,h)}(\overline{D}_1)$, $b(x,y) \in C^{(0,h)}(\overline{D}_1)$, $0 < h < 1$, *кроме того,* $b(x,0)$, $C_i(x)$, $i = \overline{0, 2n-[2\alpha_0]}$, $l(x)$, $f(x)$, $C^{-1}_{2n-[2\alpha_0]+1}(x) \in C^1[0,1]$, $n = 1$, *то задача эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью.*

Следствие 1. *Решение интегрального уравнения* (3.16) *существует и единственно* [15].

Следствие 2. *Если* $\varphi_0(y), \varphi_1(y) \in C[0,h]$, *то решение задачи существует и единственно* [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Protter M. H.* The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line // Canad. J. Math. 1954. V. 6, N 4. P. 542–553.

2. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux deribees partielles du second ordre de tipe mixte: These ... doct. mathematics. Uppsala, 1935.

3. *Березин И. С.* О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линии параболичности // Мат. сб. 1949. Т. 24, № 2. С. 301–320.

4. *Hellvig G.* Anfangsuertproblem bei partiellen Differenntialgleichungen mit Singularitaten // J. Rational Mech. Anal. 1956. V. 5, N 2. P. 395–418.

5. *Бабенко И. К.* К теории уравнении смешанного типа: Дис. ... д-ра физ-мат. наук. Мат. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1952.

6. *Gellerstedt S.* Sur une equation lineare aux deriees partielles de tipe mixte // Ark. Mat., Ast, och Fysik. 1937. V. 25A, N 29. P. 3–29.

7. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

8. *Елеев В. А.* О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 46–58.

9. *Терсенов С. А.* К теории гиперболических уравнении с данными на линии вырождения типа // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 6. С. 913–935.

10. *Кароль И. Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 2. С. 197–200.

11. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1979.

12. *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра. М.: Учпедиз, 1958.

13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

14. *Мамадалиев Н. К.* Нелокальные задачи для уравнение параболо-гиперболического типа // Узб. мат. журн. 1991. № 5. С. 37–44.

15. *Трикоми Ф. О.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

16. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.

Статья поступила 30 июня 1998 г.

г. Ташкент