Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.54

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ПОНИЖАЮЩИЕ L_p–НОРМУ

С. Л. Крушкаль

Аннотация: Построены нового типа квазиконформные деформации комплексной плоскости, которые конформны в заданных областях и не увеличивают норму голоморфных функций, принадлежащих, например, пространствам Харди H^p, Бергмана B^p в круге и другим. Выполняются и другие заданные условия. Это удается сделать, например, в случае четных натуральных значений p. Такие деформации полезны при решении вариационных проблем в банаховых пространствах голоморфных функций. Библиогр. 2.

Посвящается памяти М. А. Лаврентьева,
одного из создателей теории
квазиконформных отображений

Стандартные методы решения вариационных проблем в банаховых пространствах голоморфных функций в круге (как и в других областях на плоскости) существенно используют интегральные представления этих функций посредством соответствующих мер, и их применение обычно связано с большими трудностями (особенно когда задача допускает несколько локальных экстремумов).

В данной работе предлагается другой подход, позволяющий во многих случаях обходить такие трудности. Он основан на построении нового типа квазиконформных деформаций h комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Мы проиллюстрируем его на примере пространств $L_p(E)$, $E \subset \mathbb{C}$, и покажем, что существуют такие вариации h, что $\|h \circ f\|_p \leq \|f\|_p$ для соответствующих $f \in L_p(E)$ и выполняются некоторые другие заданные условия. Это удается сделать, например, в случае четных натуральных значений p. Положим

$$A_p(E) = \{f \in L_p(E) : f \text{ голоморфна на } E\}, \quad \|f\|_p = \|f\|_{A_p}, \quad 1 < p < \infty,$$

где E — кольцевая область, ограниченная некоторой кривой $L \subset \Delta$ и единичной окружностью $S^1 = \partial\Delta$. Вырожденные случаи $E = \Delta \setminus \{0\}$ и $E = S^1$ соответствуют пространствам Бергмана B^p и Харди H^p. Пусть еще $\mathbf{d}^0 = (1, 0, \dots, 0) = \left(d_k^0\right) \in \mathbb{R}^n$, а $|\mathbf{x}|$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^l$.

Теорема. *Для любой функции* $f_0(z) = \sum\limits_j^\infty c_k^0 z^k \in L_{2m} \cap L_\infty(E)$ ($c_j^0 \neq 0$, $0 \leq j < n$, $m \in \mathbb{N}$) *не являющейся полиномом степени* $n_1 \leq n$, *существует число* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для всякой точки* $\mathbf{d}' = \left(d'_{j+1}, \dots, d'_n\right) \in \mathbb{C}^{n-j}$ *и любого* $a \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющего неравенствам*

$$|\mathbf{d}'| \leq \varepsilon, \quad |a| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon < \varepsilon_0,$$

найдется квазиконформный автоморфизм h римановой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$, который конформен в круге $D_0 = \{w : |w - c_0^0| < \sup_\Delta |f_0| + |c_0^0| + 1\}$ и удовлетворяет условиям

(i) $h^{(k)}(c_0^0) = k!d_k = k!(d_k^0 + d_k'),\ k = j+1, \dots, n$,

(ii) $\|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} = \|f_0\|_{2m}^{2m} + a$.

Отображение h может быть выбрано так, чтобы его коэффициент Бельтрами $\mu_h = \partial_{\overline{w}} h/\partial_w h$ удовлетворял неравенствам $\|\mu_h\|_\infty \le M\varepsilon$. Величины ε_0 и M зависят только от f_0, m и n.

В частности, теорема обеспечивает существование квазиконформных гомеоморфизмов h с $\|h \circ f_0\|_{2m} \le \|f_0\|_{2m}$, и при этом в силу (i) можно независимо менять вполне определенное конечное число тейлоровских коэффициентов h и f_0.

Доказательство. Зафиксируем $R > \sup\limits_\Delta |f_0| + |c_0^0| + 1$ и выберем кольцо $B = \{w : R < |w - c_0^0| < R+1\}$. Определим на $L_p(B)$, $p \ge 2$, операторы

$$T\rho = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_B \frac{\rho(\zeta)\, d\xi d\eta}{\zeta - w}, \quad \Pi\rho = \partial_w T = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_B \frac{\rho(\zeta)\, d\xi d\eta}{(\zeta - w)^2}$$

(второй интеграл существует в смысле главного значения). Будем искать требуемый автоморфизм $h = h^\mu$ в виде

$$h(w) = w - \frac{1}{\pi} \iint\limits_B \frac{\rho(\zeta)\, d\xi d\eta}{\zeta - w} = w + T\rho(w) \tag{1}$$

с коэффициентом Бельтрами $\mu = \mu_h$, равным нулю вне B, и с $\|\mu\|_\infty < \kappa < 1$. Подставив (1) в уравнение Бельтрами $\partial_{\overline{w}} h = \mu \partial_w h$, получим $\rho = \mu + \mu\Pi\mu + \mu\Pi(\mu\Pi\mu) + \dots$. Этот ряд сходится в $L_p(B)$ при $2 < p < p_0(k)$, и на основании известных свойств операторов T и Π для любого круга $\Delta_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$, $0 < R < \infty$, имеем

$$\|\rho\|_{L_p(\Delta_R)}, \quad \|\Pi\rho\|_{L_p(\Delta_R)} \le M_1(\kappa, R, p)\|\mu\|_\infty; \quad \|h\|_{C(\overline{\Delta}_R)} \le M_1(\kappa, R, p)\|\mu\|_\infty.$$

Кроме того, если $t \mapsto \mu(z;t)$ есть C^1-гладкая $L_\infty(\mathbb{C})$-функция параметра t, действительного или комплексного, то производные $\partial_w h^{\mu(\cdot,t)}$ и $\partial_{\overline{w}} h^{\mu(\cdot,t)}$ непрерывно $\mathbb{R}$-дифференцируемы (соответственно $\mathbb{C}$-дифференцируемы) по t в L_p-норме, а функция $t \mapsto h^{\mu(\cdot,t)}(z)$ имеет C^1-гладкость как элемент пространства $C(\overline{\Delta}_R)$, см., например, [1; 2, гл. 2]. В частности,

$$h(w) = w + T\mu(w) + \omega(w), \quad \|\omega\|_{C(\Delta_R)} \le M_1(\kappa, R)\|\mu\|_\infty^2. \tag{2}$$

Положим

$$\langle \nu, \varphi \rangle = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_B \nu(\zeta)\varphi(\zeta)\, d\xi d\eta, \quad \nu \in L_\infty(B),\ \varphi \in L_1(B).$$

Тогда представление (2) принимает вид

$$h(w) = w + \sum_0^\infty \langle \mu, \varphi_k \rangle (w - c_0^0)^k + \omega(w), \quad \varphi_k(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - c_0^0)^{k+1}}. \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3) с условием (i), получаем первую группу равенств для определения нужного μ:

$$k!d_k = \langle \mu, \varphi_k \rangle + \omega^{(k)}\big(c_0^0\big) = \langle \mu, \varphi_k \rangle + O\big(\|\mu\|_\infty^2\big), \quad k = j+1, \dots, n. \tag{4}$$

С другой стороны, (2) и (ii) дают

$$\|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} = \big\|f_0 + T\rho \circ f_0\big\|_{2m}^{2m} = \int\limits_E |f_0(z) + T\mu \circ f_0(z)|^{2m}\, dE_z + O\big(\|\mu\|_\infty^2\big)$$

$$= \int\limits_E [|f_0(z)|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{f_0(z)}T\mu \circ f_0(z)) + |T\mu \circ f_0(z)|^2]^m\, dE_z + O\big(\|\mu\|_\infty^2\big)$$

$$= \|f_0\|_{2m}^{2m} + \frac{m}{\pi}\operatorname{Re}\Bigg[\iint\limits_B \mu(\zeta)\, d\xi d\eta \int\limits_E \frac{|f_0(z)|^{2m-2}\overline{f_0(z)}}{f_0(z) - \zeta}\, dE_z\Bigg] + O_m\big(\|\mu\|_\infty^2\big).$$

Положив

$$\phi(\zeta) = -m\int\limits_E \frac{|f_0(z)|^{2m-2}\overline{f_0(z)}}{f_0(z) - \zeta}\, dE_z, \tag{5}$$

предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m} = \operatorname{Re}\langle \mu, \phi \rangle + O_m\big(\|\mu\|_\infty^2\big). \tag{6}$$

Установим некоторые нужные нам свойства функции ϕ. Она голоморфна в диске $D_R^* = \big\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : \big|w - c_0^0\big| > R\big\}$, принадлежит подпространству A_{2m}^0, образованному в $A_{2m}(B)$ функциями φ, голоморфными в D_R^*, и $\phi(z) \not\equiv 0$. Последнее вытекает из того, что при больших $|\zeta|$ имеем $\phi(\zeta) = \sum\limits_1^\infty b_k \zeta^{-k}$ с $b_2 = m\|f_0\|_{2m}^{2m} > 0$.

Лемма. *В условиях теоремы функция ϕ отлична от линейной комбинации дробей $\varphi_0, \dots, \varphi_l$ с $l \le n$.*

Доказательство. Для упрощения записи проведем рассуждения в случае, когда $c_1^0 \neq 0$ и $c_{s-1}^0 \neq 0$.

Допустив противное, т. е. что

$$\phi(\zeta) = \sum_0^l b_k \big(\zeta - c_0^0\big)^{-k-1}, \quad l \le n,$$

получим, что для любого коэффициента Бельтрами $\mu \in L_\infty(B)$ с малой нормой $\|\mu\| \le \varepsilon < 1$ и такого, что $\langle \mu, \varphi_k \rangle = 0$, $k = 0, 1, \dots, l$, в силу (6) должно быть

$$\|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m} = O(\varepsilon^2). \tag{7}$$

С другой стороны, учитывая, что разложение f_0 содержит степени z^s с $s > n$, фиксируем такое s и рассмотрим (замкнутое) линейное подпространство $\mathscr{A}_{l,s}(B)$ в $L_1(B)$, порожденное линейными комбинациями функций $\varphi_k|B$ с $0 \le k \le l$ и $k > s$. Тогда

$$\inf\{\|\varphi_s - \varphi\|_{L_1(B)} : \varphi \in \mathscr{A}_{l,s}(B)\} = d > 0.$$

По теореме Хана — Банаха существует такой $\mu_0 \in L_\infty(B)$, что

$$\langle \mu_0, \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in \mathscr{A}_{l,s}(E); \quad \langle \mu_0, \varphi_s \rangle = 1, \quad \|\mu_0\|_\infty = d.$$

Тогда квазиконформный гомеоморфизм $h^{\alpha\mu_0}$ с $|\alpha| = \varepsilon$ согласно (2) и (3) принимает вид $h^{\alpha\mu_0}(w) = w + \alpha\big(w - c_0^0\big)^s + O(\varepsilon^2)$.

Заменив $\varphi_s(\zeta)$ на $\varphi_{s,c}(\zeta) = 1/(\zeta - c)^s$, получим (при малом $|c - c_0^0|$) систему

$$\varphi_k(\zeta), \quad k = 0, 1, \dots, k \neq s; \quad \varphi_{s,c}(\zeta) = 1/(\zeta - c)^s,$$

которая также образует базис в A_{2m}^0. Перейдя к соответствующему отображению

$$h_\beta^{\alpha\mu_0}(w) := w + \alpha(w - c)^s + O(\varepsilon^2) = w + \alpha\bigl(w - c_0^0 - \beta\bigr)^s + O(\varepsilon^2) \tag{8}$$

с тем же остаточным членом, что и у $h^{\alpha\mu_0}$, и $\beta = c - c_0^0$, будем иметь

$$h_\beta^{\alpha\mu_0} \circ f_0(z) := \sum_0^\infty c_k^{\alpha,\beta} z^k = \sum_0^{s-2} c_k^0 z^k + \bigl[c_{s-1}^0 - s\alpha\beta\bigl(c_1^0\bigr)^{s-1}\bigr] z^{s-1} + \bigl[c_s^0 + \alpha\bigl(c_1^0\bigr)^s\bigr] z^s + \dots + O\bigl(\varepsilon_1^2\bigr),$$

где $\varepsilon_1 = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$.

Применение равенства Парсеваля к функциям

$$\bigl[h_\beta^{\alpha\mu_0} \circ f_0(z)\bigr]^m = \sum_0^\infty c_{k,m}^{\alpha,\beta} z^k, \quad f_0(z)^m = \sum_0^\infty c_{k,m}^0 z^k$$

дает

$$\bigl\|h_\beta^{\alpha\mu_0} \circ f_0\bigr\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m} = \bigl\|\bigl[h_\beta^{\alpha\mu_0} \circ f_0\bigr]^m\bigr\|_2^2 - \bigl\|f_0^m\bigr\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty r_k^2 \bigl(\bigl|c_{k,m}^{\alpha,\beta}\bigr|^2 - \bigl|c_{k,m}^0\bigr|^2\bigr), \tag{9}$$

где $r_k^2 = \pi/(k+1)$. Правая часть (9) — непостоянная в силу (8) вещественно-аналитическая функция от α и β, и поскольку

$$c_{k,m}^{\alpha,\beta} = c_{k,m}^0 + \alpha g_{k,m}(\beta) = c_{k,m}^0 + O_k(\alpha) + O_k(|\alpha\beta|),$$

где $O_k(\varepsilon)/\varepsilon \asymp d$ и оценка зависит только от $\|f_0\|_\infty$, то

$$\|h^{\alpha\mu_0} \circ f_0\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m} = O(\varepsilon_1), \quad O(\varepsilon_1)/\varepsilon_1 \asymp d,$$

что противоречит (7) при подходящем выборе $\varepsilon = |\alpha| \to 0$ и $\beta \to 0$. Тем самым лемма доказана в указанном случае.

Если же $c_{s-1}^0 = 0$, то выражение (8) следует заменить выражением

$$h_\beta^{\alpha\mu_0}(w) = w + \alpha(w - c)^{s+1} + O(\varepsilon^2).$$

Тогда разложение $h_\beta^{\alpha\mu_0} \circ f_0$ в Δ будет содержать член $\bigl[c_s^0 - (s+1)\alpha\beta\bigl(c_1^0\bigr)^s\bigr] z^s$, линейный относительно β.

Если еще $c_1^0 = 0$ и $f_0(z) = c_0^0 + c_{j_0} z^{j_0} + \dots$ ($c_{j_0} \neq 0$, $1 < j_0 < n$), то вместо (8) следует взять

$$h_\beta^{\alpha\mu_0}(w) = w^{j_0} + \alpha(w - c)^{s+1} + O(\varepsilon^2).$$

Остальные аргументы остаются в силе. Это завершает доказательство леммы.

Таким образом, согласно лемме разложение ϕ в ряд в D_R^* должно содержать степени $\bigl(\zeta - c_0^0\bigr)^{-k-1}$ с $k > n$, а значит, разность

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta) - \sum_j^n b_k\bigl(\zeta - c_0^0\bigr)^{-k-1} = \left(\sum_0^{j-1} + \sum_s^\infty\right) b_k\bigl(\zeta - c_0^0\bigr)^{-k-1}, \quad s \geq n+1,$$

отлична от нуля в D_R^*, при этом $b_j \neq 0$.

Будем теперь искать требуемый коэффициент Бельтрами μ в виде

$$\mu = \sum_j^n \xi_k \overline{\varphi}_k + \tau\bar{\psi}, \quad \mu|\mathbb{C} \setminus B = 0, \tag{10}$$

с неизвестными постоянными $\xi_j, \dots, \xi_n$, τ, которые можно определить из уравнений (4) и (6).

Подставляя выражение (10) в (4) и (6) и учитывая взаимную ортогональность функций φ_k на B, получаем для определения ξ_k и τ нелинейные уравнения

$$k!d_k = \xi_k r_k^2 + O(\|\mu\|^2), \quad k = j+1, \dots, n;$$

$$\|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m} = \operatorname{Re}\left\langle \sum_j^n \xi_k \overline{\varphi}_k + \tau\bar{\psi}, \phi \right\rangle + O(\|\mu\|^2). \tag{11}$$

Постоянные $\operatorname{Re}\xi_j$, $\operatorname{Im}\xi_j$, $\operatorname{Re}\tau$, $\operatorname{Im}\tau$ связаны лишь последним равенством. Чтобы выделить единственное решение, добавим к (11) еще три действительных уравнения. Потребуем, чтобы для ξ_j выполнялось равенство

$$\left\langle \sum_j^n \xi_k \overline{\varphi}_k, \quad \sum_0^n b_k \varphi_k \right\rangle = 0,$$

которое приводится к равенству

$$\sum_{j+1}^n \xi_k b_k r_k^2 = -\xi_j b_j r_j^2. \tag{12}$$

Тогда для τ получаем уравнение

$$\|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m} = \operatorname{Re}\langle \tau\bar{\psi}, \phi \rangle + O(\|\mu\|^2),$$

которое, если считать τ действительным, принимает вид

$$\|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m} = \tau\varkappa + O(\|\mu\|^2), \quad \varkappa \neq 0. \tag{13}$$

Отделив действительные и мнимые части в равенствах (11) и (12) и добавив к ним (13), получим $2(n-j)+3$ действительных равенств, которые определяют нелинейное C^1-гладкое (на самом деле $\mathbb{R}$-аналитическое) отображение

$$\mathbf{y} = W(\mathbf{x}) = W'(\mathbf{0})\mathbf{x} + O(|\mathbf{x}|^2)$$

точек $\mathbf{x} = (\operatorname{Re}\xi_j, \operatorname{Im}\xi_j, \dots, \operatorname{Re}\xi_n, \operatorname{Im}\xi_n, \tau)$ из достаточно малой окрестности начала координат в $\mathbb{R}^{2(n-j)+3}$, принимающее значения

$$\mathbf{y} = \left(\operatorname{Re} d_j, \operatorname{Im} d_j, \dots, \operatorname{Re} d_n, \operatorname{Im} d_n, \|h \circ f_0\|_{2m}^{2m} - \|f_0\|_{2m}^{2m}\right)$$

также вблизи начала координат в $\mathbb{R}^{2(n-j)+3}$.

Его линеаризация $\mathbf{y} = W'(\mathbf{0})\mathbf{x}$ определяет линейное отображение $\mathbb{R}^{2(n-j)+3} \to \mathbb{R}^{2(n-j)+3}$ с якобианом, отличающимся от $r_j^2 \dots r_n^2 \varkappa \neq 0$ лишь постоянным множителем. Следовательно, $\mathbf{x} \mapsto W'(\mathbf{0})\mathbf{x}$ — линейный изоморфизм пространства $\mathbb{R}^{2(n-j)+3}$ на себя, и к W можно применить теорему об обратном отображении, из которой и следует утверждение нашей теоремы.

Замечание. Условие ограниченности функции f_0 может быть ослаблено, однако в общем случае невырожденность ковектора (5) приходится предполагать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L. V., Bers L.* Riemann's mapping theorem for variable metrics // Ann. of Math (2). 1960. V. 72. P. 385–401.
2. *Krushkal S. L.* Quasiconformal mappings and Riemann surfaces. New York: Wiley, 1979.

Статья поступила 24 ноября 1999 г.

г. Рамат Ган, Израиль
Исследовательский институт по математическим наукам университета Бар-Илан,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
kruskal@macs.biu.ac.il