Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 514.13

ЗАМКНУТЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В ОДНОСВЯЗНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В. К. Ионин

Аннотация: Приводится пример n-мерного ($n \geq 3$) риманова пространства класса C^∞, в котором существует замкнутая геодезическая, несмотря на то, что пространство это диффеоморфно n-мерному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ и в каждой его точке каждая секционная кривизна не превосходит произвольного наперед заданного отрицательного числа. Библиогр. 4.

Риманово пространство с отрицательной (неположительной) секционной кривизной в каждой точке в любом двумерном направлении будем называть *пространством отрицательной* (*неположительной*) *кривизны.* Из хорошо известной теоремы Гаусса — Бонне (см., например, [1, с. 170]) следует, что в каждом пространстве неположительной (следовательно, и отрицательной) кривизны не существует замкнутой геодезической, если это пространство гомеоморфно двумерной евклидовой плоскости. В статье [2] для любого $n \geq 3$ строится пример пространства неположительной кривизны, в котором существует замкнутая геодезическая, несмотря на то, что это пространство диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через K^n класс римановых многообразий, бесконечно гладко диффеоморфных $\mathbb{R}^n$, все секционные кривизны которых не превышают -1. Здесь будет построен пример пространства класса K^n с замкнутой геодезической. Очевидно, что после этого легко привести пример пространства класса K^n с замкнутой геодезической, у которого все секционные кривизны отделены от нуля любым наперед заданным отрицательным числом.

1. Пусть Λ^m ($m \geq 2$) — m-мерное пространство Лобачевского кривизны -1. Введем в Λ^2 координаты (x, y) так, чтобы первая квадратичная форма (или линейный элемент) имела вид $ds^2 = dx^2 + \operatorname{ch}^2 x\, dy^2$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ в плоскости Λ^2 зададим кривую Γ_ε уравнениями

$$x = 2 - \frac{2}{2 - \ln \sin t}, \quad y = \varepsilon \cos t,$$

где $t \in (o, \pi)$. Продолжим кривую Γ_ε до кривой Γ, добавив к Γ_ε два луча

$$\lambda_1 = \{(x, y) \in \Lambda^2 \mid x \geq 2,\ y = -\varepsilon\}, \quad \lambda_2 = \{(x, y) \in \Lambda^2 \mid x \geq 2,\ y = \varepsilon\}.$$

Нетрудно показать, что кривая Γ гомеоморфна вещественной прямой $\mathbb{R}$ и дважды непрерывно дифференцируема (в действительности $\Gamma \in C^\infty$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00575).

Предложение. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *кривая* Γ *является выпуклой кривой.*

Доказательство. Так как $\Gamma \in C^\infty$ и в каждой точке множества $\lambda_1 \cup \lambda_2$ геодезическая кривизна кривой Γ равняется нулю, то достаточно доказать, что для достаточно малого ε в каждой точке кривой Γ_ε геодезическая кривизна кривой Γ (или, что то же самое, кривой Γ_ε) отлична от нуля. Геодезическую кривизну $\varkappa(t)$ кривой Γ_ε в точке, соответствующей параметру $t \in (0, \pi)$, будем вычислять по формуле

$$\varkappa(t) = \frac{\operatorname{ch} x}{(x'^2 + y'^2 \operatorname{ch}^2 x)^{3/2}}(x''y' - x'y'' - y'^3 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - 2x'^2 y' \operatorname{th} x),$$

полученной из формулы, приведенной в [1, с. 164] заменой u, v и G на x, y и $\operatorname{ch}^2 x$. После некоторых вычислений приходим к следующему равенству:

$$\varkappa(t) = M(N - \varepsilon^2 L),$$

где

$$M = \frac{-\varepsilon \operatorname{ch} x}{(x'^2 + y'^2 \operatorname{ch}^2 x)^{3/2}(2 - \ln \sin t)^4 \sin t} < 0,$$

$$N = 2(2 - \ln \sin t)(2 - \ln \sin t - \cos^2 t \ln \sin t) - 8 \cos^2 t \operatorname{th} x,$$

$$L = (2 - \ln \sin t)^4 \sin^4 t \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x.$$

Так как N стремится к $+\infty$ при t, стремящемся к нулю или к π, то существует такое $t_0 \in (0, \pi)$, что $N \geq 1$ для всех $t \in (0, t_0) \cup (\pi - t_0, \pi)$.

Число t_0 можно считать сколь угодно малым, поэтому подберем его так, чтобы выполнялось неравенство $2t_0 < \pi$. Это условие нам нужно для того, чтобы существовал отрезок $[t_0, \pi - t_0]$. Если $t \in [t_0, \pi - t_0]$, то $N \geq N'_0$, где

$$N'_0 = 8(1 - \operatorname{th} x_0), \quad x_0 = 2 - \frac{2}{2 - \ln \sin t_0}.$$

Так как $\operatorname{th} x_0 < 1$, то $N'_0 > 0$. Таким образом

$$N \geq N_0 = \min(1, N'_0)$$

для всех $t \in (0, \pi)$.

Обычным способом устанавливается неравенство

$$(2 - \ln \sin t) \sin t \leq 2$$

для всех $t \in (0, \pi)$. Из него вытекает, что $L \leq 8 \operatorname{sh} 2x$. А так как $1 \leq x \leq 2$, имеем $L \leq L_0 = 8 \operatorname{sh} 4$. Число ε_0 можно определить равенством $N_0 = \varepsilon_0^2 L_0$. Предложение доказано.

2. Введем в трехмерном пространстве Лобачевского Λ^3 координаты (x, y, z) так, чтобы его первая квадратичная форма имела вид

$$ds^2 = dx^2 + ch^2 x(dy^2 + \operatorname{ch}^2 y\, dz^2)$$

Будем предполагать, что двумерная плоскость, определяемая уравнением $z = 0$, совпадает с Λ^2, рассматриваемой в предыдущем пункте. Это позволяет нам считать, что кривая Γ принадлежит Λ^3.

Обозначим через A, A_1, A_ε, A_2 двумерные поверхности, полученные вращением в пространстве Λ^3 соответственно кривых Γ, λ_1, Γ_ε, λ_2 вокруг прямой

λ, задаваемой уравнениями $x = 0$, $z = 0$. Ясно, что $A = A_1 \cup A_\varepsilon \cup A_2$. Эти обозначения корректны, так как $\varepsilon < 1$, и поэтому поверхность A_ε нельзя спутать ни с A_1, ни с A_2. Оснастим каждую из этих четырех поверхностей внутренней метрикой, порожденной объемлющим пространством Λ^3.

На прямой λ существует такая точка p_0, что плоскость, проведенная через нее перпендикулярно к λ, содержит луч λ_2. Обозначим через r_0 расстояние от p_0 до начала луча λ_2. Очевидно, что расстояние от начала луча λ_1 до прямой λ также равняется r_0. Удалим из плоскости Λ^2 произвольный открытый круг радиуса r_0 и обозначим через Λ_0^2 оставшуюся часть. Оснастим Λ_0^2 внутренней метрикой, порожденной плоскостью Λ^2 (или, что то же самое, пространством Λ^3).

Предложение. *Каждая из поверхностей A_1 и A_2 изометрична Λ_0^2.*

Это предложение не нуждается в доказательстве.

3. Предложение. *Поверхность A — бесконечно дифференцируемое двумерное риманово многообразие, гауссова кривизна которого в каждой точке не превосходит -1.*

Доказательство. Так как $\Gamma \in C^\infty$, то и $A \in C^\infty$. Из предложения п. 2 вытекает, что в точках поверхностей A_1 и A_2 гауссова кривизна равняется -1. Осталось доказать, что гауссова кривизна в произвольной точке $p \in A_\varepsilon$ не превосходит -1. Так как A_ε — поверхность вращения, без ограничения общности можно считать, что $p \in \Gamma_\varepsilon$. Проведем через точку p касательную плоскость α к поверхности A_ε. В силу предложения п. 1 кривая Γ_ε (даже вся кривая Γ) лежит по одну сторону от плоскости α. По другую сторону от α находится окружность O_p, являющаяся траекторией точки p при вращении ее вокруг прямой λ. Так как, кроме того, Γ_ε и O_p лежат на поверхности A_ε, то эта поверхность является седловой в Λ^3 и поэтому имеет неположительную внешнюю кривизну. Известен (см., например, [3, с. 211]) способ вычисления гауссовой кривизны поверхности, вложенной в риманово пространство. В нашем случае этот способ приводит к следующему результату: гауссова кривизна поверхности A_ε в точке p равна сумме внешней кривизны A_ε в p и римановой кривизны двумерной площадки пространства Λ^3, проведенной через точку p касательно к поверхности A_ε. Так как кривизна этой площадки равняется -1, а внешняя кривизна неположительна, то гауссова кривизна поверхности A_ε в точке p отрицательна, более того, не превосходит -1. Предложение доказано.

4. Предложение. *Окружность γ, являющаяся пересечением поверхности A с плоскостью, определяемой уравнением $y = 0$, есть замкнутая геодезическая поверхности A.*

Доказательство. Кривая γ лежит в плоскости симметрии $y = 0$ поверхности A.

5. Введем на многообразии $B = A \times \mathbb{R}$ риманову метрику, положив, что его линейный элемент определяется равенством

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 w \, ds_A^2 + dw^2,$$

где $w \in \mathbb{R}$, а ds_A^2 и dw^2 — линейные элементы A и $\mathbb{R}$ соответственно. Риманово многообразие B получено при помощи конструкции «искривленного произведения», введенного в [4, теорема 7.5]). Из результатов [4] легко выводится следующее

Предложение. *Если A — гладкое риманово многообразие произвольной размерности, каждая секционная кривизна которого не превосходит -1, то и у многообразия B с введенной выше метрикой ds^2 также каждая секционная кривизна не превосходит -1.*

Из этого предложения и предложения п. 3 вытекает, что каждая секционная кривизна многообразия B, определенного в начале этого пункта, не превосходит -1.

6. В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначений, не будем отличать поверхности A и $A \times \{0\}$ друг от друга, т. е. будем считать, что A является подпространством B.

Предложение. *Поверхность A входит в B как вполне геодезическая поверхность.*

Доказательство.. Риманово многообразие B симметрично относительно поверхности A.

Из этого предложения и предложения п. 4 вытекает

Следствие. *Кривая γ есть замкнутая геодезическая пространства B.*

Обозначим через C одну из двух частей, на которые поверхность A разбивает пространство B. Для определенности положим $C = A \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ — множество всех неотрицательных чисел.

7. Плоскость Лобачевского Λ^2 является краем трехмерного полупространства $\Lambda^3_+ = \{(x, y, z) \in \Lambda^3 \mid z \geq 0\}$.

В силу предложения п. 2 часть плоскости Λ^2, а именно Λ^2_0, изометрична поверхности A_2, которую мы считаем частью края многообразия C. Отождествив по изометрии Λ^2_0 с A_2, получим из пространств C и Λ^3_+ некоторое новое пространство D, внутренняя метрика которого естественным образом порождается метриками пространств C и Λ^3. Ясно, что множество внутренних точек пространства D является трехмерным пространством, гомеоморфным $\mathbb{R}^3$. Край многообразия D состоит из поверхностей A_1, A_ε и замкнутого круга σ, являющегося замыканием открытого круга $\Lambda^2 \setminus \Lambda^2_0$. Этот край, т. е. поверхность $A_1 \cup A_\varepsilon \cup \sigma$, гомеоморфен $\mathbb{R}^2$. Таким образом, пространство D гомеоморфно евклидову полупространству $\mathbb{R}^3_+$. Поверхность $A_1 \cup A_\varepsilon \cup \sigma$ имеет внутреннюю метрику, которая не может быть римановой, так как граница круга σ состоит из особых точек.

8. Пусть D' — еще один экземпляр пространства D. Другими словами, D' — пространство, изометричное D, и $D \cap D' = \varnothing$. Обозначим через E пространство, полученное из D и D' отождествлением их краев по изометрии. Ясно, что E гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что поверхности A_1, A_ε и σ входят в пространство E. Удалив из E границу круга σ, получим риманово пространство с секционными кривизнами, не превосходящими -1, в котором кривая γ — замкнутая геодезическая. Однако оно не может быть искомым примером, так как не гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

Из центра круга σ (считающегося в данном случае подмножеством Λ^3_+) через произвольную внутреннюю точку пространства Λ^3_+ проведем луч μ. Его мы можем рассматривать как подмножество каждого из следующих пространств Λ^3_+, D и E. Удалив из E круг σ и луч μ, получим пространство F, гомеоморфное (даже гладко диффеоморфное) $\mathbb{R}^3$, в котором γ — замкнутая геодезическая, а все секционные кривизны не превосходят -1.

Таким образом, мы построили искомый пример в случае, когда $n = 3$.

9. Пусть дано натуральное $n \geq 4$. Для произвольного $m \in \{1, \dots, n-3\}$ в $(m+2)$-мерном многообразии $F \times \mathbb{R}^m$ введем риманову метрику следующим образом: первая квадратичная форма ds_m^2 пространства $F \times \mathbb{R}^m$ определяется формулой

$$ds_m^2 = \operatorname{ch}^2 w\, ds_{m-1}^2 + dw^2,$$

где $w \in \mathbb{R}$, а ds_0^2 и dw^2 — первые квадратичные формы поверхности F и евклидовой прямой $\mathbb{R}$ соответственно. Из предложения п. 5 вытекает, что $F \times \mathbb{R}^m$ — пространство, все секционные кривизны которого не превосходят -1.

Таким образом, мы построили пример для всех $n \geq 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
2. *Ионин В. К.* Изопериметрические неравенства в односвязных римановых пространствах неположительной кривизны // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 2. С. 282–284.
3. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
4. *Bishop R. L., O'Neill B.* Manifolds of negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. P. 1–49.

Статья поступила 22 ноября 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН