Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Т. И. Зеленяк, Н. А. Люлько

Аннотация: Рассматривается классическая задача вариационного исчисления: нахождение минимума функционала $\int\limits_0^1 F(x, y, y_x)dx$ в пространстве гладких функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Теорема о существовании абсолютного минимума доказывается с помощью теории квазилинейных параболических уравнений второго порядка. Приводятся примеры, на которых анализируются условия, наложенные в теореме. Библиогр. 11.

В задаче о нахождении экстремумов функции $f(x)$ хорошо известна роль уравнения [1, с. 429]

$$x_t = -\operatorname{grad} f(x).$$

В вариационном исчислении параболическое уравнение

$$u_t = \frac{d}{dx} F_{u_x}(x, u, u_x) - F_u(x, u, u_x) \tag{1}$$

играет аналогичную роль для задачи о нахождении минимума функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 F(x, y, y_x)\,dx \tag{2}$$

в пространстве функций $y(x) \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющих одному из условий:

(а) $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$;

(б) $y(0) = \alpha$;

(в) $y(x) \in C^1[0, 1]$.

Здесь $F(x, \xi, \eta)$ — заданная функция, определенная на множестве

$$G = \{0 \le x \le 1,\ -\infty < \xi, \eta < +\infty\},$$

$F_{\eta\eta} > 0$; α, β — произвольные вещественные числа.

Задача о нахождении минимума функционала (2) в классе абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию (а), подробно исследована в работе Л. Тонелли [2]. Он доказал ряд теорем о достижении абсолютного минимума в этом классе при условии, что для любого числа $M > 0$ найдутся константы $Y > 0$, $\gamma > 0$ такие, что $F(x, y, y_x) > |y_x|^{1+\gamma}$ при $0 \le x \le 1$, $|y| \le M$, $|y_x| \ge Y$ [2, с. 376]. При наличии такой оценки на F теорема существования абсолютного минимума этой вариационной задачи в пространстве гладких функций доказана в работе [3]. В [4, 5] исследуются свойства абсолютно непрерывных функций, доставляющих минимум рассматриваемому функционалу.

Л. Тонелли [2] рассмотрел и особый случай, когда $\gamma = 0$ в оценке на функцию F. Для задачи

$$\min_y \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y_x)\,dx, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \tag{3}$$

им доказана [2, с. 370]

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, \xi, \eta)$ определена, дважды непрерывно дифференцируема по всем переменным на множестве G и для нее справедливо неравенство*

$$F \geq \delta|\eta| - K, \tag{4}$$

где $\delta > 0$, K — постоянные.

Тогда через любые две точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), где $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, проходит экстремаль задачи (3), *на которой достигается абсолютный минимум рассматриваемой задачи в классе абсолютно непрерывных функций, если выполнено одно из следующих условий:*

(i) *для любого числа $M > 0$ существуют константы $m_1 > 0$, $m_2 \geq 0$ такие, что*

$$\left|\frac{F_\xi - F_{x\eta} - \eta F_{\xi\eta}}{F_{\eta\eta}}\right| \leq m_1|\eta|^2 + m_2, \tag{5}$$

где $0 \leq x \leq 1$, $|\xi| \leq M$,

(ii) *если $F(x, \xi, \eta) \equiv F(\xi, \eta)$, то для любого числа $M > 0$ найдется функция $\chi(\eta)$, $\chi(\eta) \underset{|\eta|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, такая, что*

$$|F - \eta F_\eta| \geq \chi(\eta), \tag{6}$$

где $|\xi| \leq M$.

Здесь под экстремалью вариационной задачи понимается непрерывно дифференцируемая функция, являющаяся решением соответствующей краевой задачи для уравнения Эйлера.

Обозначим

$$\Phi(x, v, v_x, v_{xx}) = \frac{d}{dx} F_{v_x}(x, v, v_x) - F_v(x, v, v_x)$$

и предположим, что существует инвариант $\phi(x, \xi, \eta)$ уравнения Эйлера

$$\Phi(x, v, v_x, v_{xx}) = 0 \tag{7}$$

(т. е. $\frac{d}{dx}\phi(x, v(x), v_x(x)) \equiv 0$ для любого регулярного решения $v(x)$ этого уравнения), определенный и непрерывный в G, а также обладающий свойством:

$$\inf_{0\leq x\leq 1,\, |\xi|\leq N} |\phi(x, \xi, \eta)| = \Theta_N(\eta) \to \infty \tag{8}$$

для каждого N при $|\eta| \to \infty$.

Нетрудно заметить, что смысл неравенств (5), (6) и соотношения (8) заключается в том, что ограниченные решения уравнения Эйлера имеют ограниченные производные на всем промежутке своего существования.

Пусть функция $F(x, \xi, \eta)$ трижды непрерывно дифференцируема на множестве G, удовлетворяет оценке (4) и обладает свойством (8). При этих предположениях в настоящей работе доказывается

Теорема 2. *Для краевых условий в случае* (а) *и* (б) *существуют начальные данные* $u_0(x) = u(x,0)$ *и соответствующее им решение* $u(x,t)$ *уравнения* (1), *а также решение* $v(x)$ *уравнения Эйлера* (7), *доставляющее абсолютный минимум функционалу* (2) *в классе непрерывно дифференцируемых функций, такие, что*

$$\|u(x,t) - v(x)\|_{C^2[0,1]} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \tag{9}$$

В случае условий (в) *справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *указанные функции* $u(x,t)$, $v(x)$ *существуют;*

2) *для функционала* (2) *существует минимизирующая последовательность* $v_n(x) \in C^1[0,1]$ *такая, что* $\min\limits_{0\le x\le 1} |v_n(x)| \to \infty$, $J(v_n) \to \inf\limits_{y} J(y)$ *при* $n \to \infty$*;*

3) *утверждения* 1 *и* 2 *реализуются одновременно.*

Для граничных условий, указанных в случае (а), существование абсолютного минимума функционала (2), по существу, установлено в работе [2] (см. сформулированную выше теорему 1). Нами предлагается новое доказательство как утверждения Тонелли (случай (а)), так и приведенного утверждения для случаев (б) и (в), основанное на аналоге метода наискорейшего спуска.

После доказательства теоремы рассматривается ряд примеров, на которых анализируется роль наложенных в теореме 2 условий (4), (8).

Отметим, что для рассматриваемых вариационных задач, чей лагранжиан $F(x,y,y_x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, в случае граничных условий (а) отсутствует эффект, названный именем М. А. Лаврентьева в связи с его работой [6]. Действительно, из теорем 1, 2 следует, что в этом случае минимум функционала (2) в классе непрерывно дифференцируемых и в классе абсолютно непрерывных функций достигается на гладкой функции, являющейся решением соответствующего уравнения Эйлера.

Поиск абсолютного минимума функционала в классе гладких функций (задача (3)) является классической задачей вариационного исчисления. Если $F(x,\xi,\eta)$ дважды непрерывно дифференцируема в G, $F_{\eta\eta} > 0$ и лагранжиан F ограничен снизу для всех значений переменных из G, то инфимум значений функционала всегда существует. Но до сих пор остается открытым вопрос о том, в каком классе функций достигается этот экстремум.

Одним из простых и интересных примеров является пример С. Н. Бернштейна [3, с. 202–203] вариационной задачи (3) с лагранжианом

$$F(x,y,y_x) = y^2 + \sqrt{1+y_x^2},$$

который показал, что если $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $y_2 = 2$, то соответствующее уравнение Эйлера решений вообще не имеет, хотя, очевидно, $F \ge |y_x|$.

Во второй части нашей работы мы подробно исследуем вариационную задачу (2) с этим лагранжианом и убедимся, что в случае граничных условий (а) при $\alpha = 0$, $\beta > 1$ минимизирующая последовательность $z_n(x)$ сходится поточечно к разрывной функции, но существует решение уравнения Эйлера $z(x)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\|z_n(x) - z(x)\|_{C[0,1-\varepsilon]} \to 0$ при $n \to \infty$, причем $z(0) = 0$, $z_x(1-0) = +\infty$.

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим в полуполосе $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$ следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered} u_t = \frac{d}{dx} F_{u_x}(x,u,,u_x) - F_u(x,u,u_x), \\ u(0,t) = \alpha, \quad u(1,t) = \beta, \quad u(x,0) = u_0(x). \end{gathered} \tag{10}$$

В силу условий теоремы 2 для решений данной задачи справедливы свойства, которые следуют из теорем 7.1, 7.2 работы [7, с. 84–95]. Сформулируем эти свойства в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение задачи* (10) *для* $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le T$, *причем*

$$\sup_{0\le x\le 1, 0\le t\le T} |u(x,t)| \le K(T).$$

Тогда

$$\sup_{0\le x\le 1, 0\le t\le T} |u_x(x,t)| \le K_1(K(T), \|u_0(x)\|_{C^1[0,1]}),$$

где функция K_1 *зависит от коэффициентов задачи.*

Пусть $v_n(x) \in C^1[0,1]$ — минимизирующая последовательность рассматриваемой вариационной задачи (2) в случае граничных условий (а) или (б), или (в). Существование ее следует из ограниченности снизу функционала F, так как $J(y) \ge -K$ (см. (4)). Обозначим

$$d = \inf_y J(y) = \lim_{n\to\infty} J(v_n).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что при $n > N$

$$d \le J(v_n) < d + \varepsilon.$$

В силу оценки (4) имеем

$$|v_n(x) - v_n(0)| = \left| \int_0^x v_{nx}(x)\, dx \right| \le \int_0^1 |v_{nx}(x)| dx \le \frac{K + d + \varepsilon}{\delta} = K_2. \tag{11}$$

Итак, для рассматриваемой вариационной задачи (2) в случае граничных условий (а), (б) минимизирующая последовательность всегда равномерно ограничена в норме $C[0,1]$. В случае же условий (в) возможна, кроме этого, еще ситуация, что $\min\limits_{0\le x\le 1} |v_n(x)| \to \infty$ при $n \to \infty$, хотя $J(v_n) \to d$, т. е. справедливо утверждение 2 теоремы.

Рассмотрим случай, когда $\max |v_n(x)| \le M$. Каждой функции $v_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, поставим в соответствие решение $u_n(x,t)$ параболической задачи (10), где в качестве начальных данных возьмем соответствующую функцию $v_n(x) \in C^1[0,1]$ и положим $u_n(0,t) = v_n(0)$, $u_n(1,t) = v_n(1)$. В силу условий теоремы 2 к задаче (10) можно применить теорему о существовании решений параболических уравнений в малом. Поэтому решение $u_n(x,t)$ будет существовать в малом, т. е. на отрезке $[0, T_n]$, и принадлежать пространству $C_{x,t}^{2+\varkappa,\, 1+\varkappa/2}$, $0 < \varkappa < 1$. Из вида параболического уравнения в (10) нетрудно проверить выполнение соотношения

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 F(x, u_n(x,t), u_{nx}(x,t)) dx = - \int_0^1 u_{nt}^2(x,t) dx,$$

откуда следует для всех значений $t \in [0, T_n]$ справедливость неравенства

$$\int_0^1 F(x, u_n(x,t), u_{nx}(x,t)) dx \le \int_0^1 F(x, v_n(x), v_{nx}(x)) dx. \tag{12}$$

Из неравенства (12) в силу оценки (4) при $n > N$ имеем

$$\int_0^1 |u_{nx}(x,t)|dx \le K_2.$$

Рассуждая так же, как после получения оценки (11), отсюда при данных n получаем равномерную ограниченность решений $u_n(x,t)$

$$\max_{0\le x\le 1} |u_n(x,t)| \le K_3, \quad t \in [0, T_n],$$

а следовательно, в силу леммы 1 имеем ограниченность производных, т. е.

$$\max_{0\le x\le 1} |u_{nx}(x,t)| \le M_n,$$

где $M_n = K_1(K_3, \|v_n(x)\|_{C^1[0,1]})$.

Наличие этих оценок гарантирует существование решений $u_n(x,t)$ в целом, т. е. для всех $t > 0$. Кроме того, из теоремы о стабилизации ограниченных решений параболических уравнений [7] следует существование стационарных решений $w_n(x) \in C^{2+\varkappa}[0,1]$ указанных задач (10), для которых справедливо

$$\|u_n(x,t) - w_n(x)\|_{C^{2+\varkappa}[0,1]} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Перейдем в левой части неравенства (12) к пределу при $t \to \infty$. Получаем, что $w_n(x)$ образуют также минимизирующую последовательность соответствующей вариационной задачи. Для функций $w_n(x)$ справедливо соотношение (11) и те выводы, которые можно из него сделать.

Рассмотрим случай, когда последовательность $w_n(x)$ равномерно ограничена в норме $C[0,1]$, и докажем ее предкомпактность в пространстве $C^1[0,1]$. Ввиду свойств функции F, указанных в условиях теоремы 2, из теоремы 7.1 работы [7] вытекает существование гладкой функции $\widetilde{\Phi}(x,u,u_x)$, $\widetilde{\Phi}_{u_x u_x} \ge 1$, такой, что стационарные решения параболической задачи (10) будут удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}_{u_x}(x,u,u_x) - \widetilde{\Phi}_u(x,u,u_x) = 0. \tag{13}$$

Покажем равномерную ограниченность $w_n(x)$ в норме $C^1[0,1]$, тогда ограниченность вторых производных будет следовать из того, что функции $w_n(x)$ для каждого рассматриваемого n являются решениями уравнения (13).

Предположим, что функции $w_{nx}(x)$ не ограничены равномерно на отрезке $[0,1]$. Тогда найдется подпоследовательность n' такая, что $|w_{n'x}(x_{n'})| \to \infty$, $n' \to \infty$. Так как последовательность $x_{n'}$ ограничена, у нее существует предельная точка $x_0 \in [0,1]$. Тогда для некоторой подпоследовательности n_k будет справедливо свойство $|w_{n_k x}(x_0)| \to \infty$, $n_k \to \infty$. В противном случае мы бы пришли к противоречию со свойством непрерывной зависимости решения задачи Коши для уравнения второго порядка, разрешенного относительно старшей производной, от начальных данных. В силу условия (8) для инварианта уравнения Эйлера $\phi(x,\xi,\eta)$ получаем

$$\phi(x, w_{n_k}(x), w_{n_k x}(x)) \equiv \phi(x_0, w_{n_k}(x_0), w_{n_k x}(x_0)) \to \infty, \quad n_k \to \infty,$$

т. е. $|w_{n_k x}(x)| \to \infty$ в каждой точке $x \in [0,1]$ при $n_k \to \infty$. Тогда

$$\int_0^1 |w_{n_k x}(x)|dx \le K_2$$

и $|w_{n_k x}(x)| \to \infty$ для $x \in [0,1]$, что противоречит свойству сходимости измеримых функций [8, с. 125, теорема Фату].

Итак, $\max\limits_{0\le x\le 1} |w_{nx}(x)| \le M$, откуда следует существование подпоследовательности $w_{n_l}(x)$ и гладкой функции $v(x)$ таких, что $\|w_{n_l}(x) - v(x)\|_{C^1[0,1]} \to 0$ и $J(w_{n_l}) \to J(v)$ при $n_l \to \infty$.

Так как все $w_{n_l}(x)$ удовлетворяют уравнению (13), функция $v(x)$ также будет решением этого уравнения, т. е. $v(x) \in C^2[0,1]$. Из классической теории вариационного исчисления [9] следует, что поскольку на гладкой функции $v(x)$ достигается минимум вариационной задачи (2), в случае граничных условий (а) функция $v(x)$ есть стационарное решение параболической задачи (1) с краевыми условиями

$$u(0,t) = \alpha,$$

в случае граничных условий (б) — с краевыми условиями

$$u(0,t) = \alpha, \quad F_{u_x}(x,u,u_x)|_{x=1} = 0;$$

в случае граничных условий (в) — с краевыми условиями

$$F_{u_x}(x,u,u_x)|_{x=0} = F_{u_x}(x,u,u_x)|_{x=1} = 0.$$

Тогда из теории квазилинейных параболических уравнений вытекает существование таких начальных данных $u_0(x)$, что нестационарное решение $u(x,t) \in C^{2+\varkappa,\,1+\varkappa/2}_{x,t}$ соответствующей параболической краевой задачи будет удовлетворять соотношению (9).

Для вариационной задачи (2) в случае (в) возможна ситуация существования одновременно двух минимизирующих последовательностей, одна из которых равномерно ограничена, а другая — нет. Итак, утверждение 3, а тем самым и теорема 2 доказаны.

Проанализируем роль наложенных в теореме условий на нескольких примерах:

1) $F = \sqrt{y^2 + y_x^2}$,
2) $F = y^2 + \sqrt{1 + y_x^2}$,
3) $F = \frac{y_x^2}{1+\sqrt{1+x^2 y_x^2}}$,
4) $F = y_x^2 + y^4$,
5) $F = y_x^2 - y^4$,
6) $F = y_x^2 + \frac{y^2}{1+y^4}$.

В случае лагранжианов (1)–(3) имеется линейный рост $F(x,y,y_x)$ по y_x, $F_{y_x y_x} > 0$, но не выполнено условие (8) для инвариантов $\varphi(x,\xi,\eta)$. Действительно, имеем соответственно

1) $\varphi(x,\xi,\eta) = \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$,
2) $\varphi(x,\xi,\eta) = \xi^2 + \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$,
3) $\varphi(x,\xi,\eta) = \frac{\eta}{\sqrt{1+x^2\eta^2}}$.

Рассмотрим для этих лагранжианов вариационную задачу (2) в случае граничных условий (а).

При $\alpha = 0$, $\beta > 1$ уравнение Эйлера для примеров (2), (3) решения вообще не имеет (пример (3) исследован в работе [10]). Минимизирующие последовательности $z_n(x)$ для этих задач поточечно сходятся к разрывной в точке $x = 1$ функции, причем существует решение $z(x)$ соответствующего уравнения

Эйлера такое, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\|z_n(x) - z(x)\|_{C[0,1-\varepsilon]} \to 0$ при $n \to \infty$. Абсолютно непрерывная функция $z(x)$ удовлетворяет условиям $z(0) = 0$, $z_x(1-0) = +\infty$.

Возможно и другое поведение минимизирующих последовательностей в случае отсутствия решений уравнения Эйлера. Это видно на примере (1), для которого при $\alpha = -1$, $\beta = 1$ соответствующая краевая задача для уравнения (7) не имеет решения. Минимизирующая последовательность

$$z_n(x) = \begin{cases} nx - 1, & 0 \le x \le 1/n, \\ 0, & 1/n \le x \le 1 - 1/n, \\ 1 + (x-1)n, & 1 - 1/n \le x \le 1, \end{cases}$$

поточечно стремится к нулю для $x \in (0,1)$, хотя минимум функционала равен 2.

В случае примера (4) справедлива теорема 2, хотя уравнение Эйлера (7)

$$v_{xx} - 2v^3 = 0$$

имеет семейство решений $v(x) = (x-a)^{-1}$, разрушающихся при $x = a$. В этом примере задача Коши (14) не всегда разрешима в целом, но если существует ограниченное решение уравнения Эйлера, то и производная его будет также ограничена, так как $\varphi(x,\xi,\eta) = \xi^4 - \eta^2$.

Для примера (5) условие (8) выполнено, поскольку $\varphi(x,\xi,\eta) = \xi^4 + \eta^2$, но не выполнено условие ограниченности снизу лагранжиана (неравенство (4)). Это приводит к отсутствию конечной нижней грани у функционала (2) в случае (в), что видно на последовательности $v_n(x) = n$.

В примере (6) реализуется утверждение 3 из теоремы 2. У соответствующей вариационной задачи (2) в случае (в) абсолютный минимум 0 достигается на функции $v(x) = 0$, а также существует минимизирующая последовательность $v_n(x) = n$, $F(x, v_n, v_{nx}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для полноты картины приведем некоторые факты из теории параболических уравнений, которые вместе с теоремой 2 позволяют предложить алгоритм для нахождения как абсолютного минимума функционала (2), так и его локального сильного экстремума.

Пусть $v(x, x_0, y_0, y_1)$ — решение задачи Коши

$$v|_{x=x_0} = y_0, \quad v_x|_{x=x_0} = y_1 \tag{14}$$

для уравнения Эйлера, записанного в виде

$$v_{xx} = \frac{F_v - F_{xv_x} - v_x F_{vv_x}}{F_{v_x v_x}}.$$

Предположим в дальнейшем, что рассматриваемая задача Коши разрешима в целом, т. е. ее решение $v(x, x_0, y_0, y_1)$ определено для всех $x, x_0 \in [0,1]$, $y_0, y_1 \in (-\infty, +\infty)$ и регулярно.

Будем также предполагать, что для вариационной задачи (2) в случае граничных условий (б) существует гладкая функция $\psi(v)$, для которой $F_\eta(1, v, \psi(v)) \equiv 0$, а в случае (в) дополнительно существует гладкая функция $\chi(v)$ такая, что $F_\eta(0, v, \chi(v)) \equiv 0$.

Рассмотрим параболическое уравнение (1) при граничных условиях:

(А) $u(0,t) = \alpha$, $u(1,t) = \beta$;

(Б) $u(0,t) = \alpha$, $u_x(1,t) = \psi(u)|_{x=1}$;

(В) $u_x(0,t) = \chi(u)|_{x=0}$, $u_x(1,t) = \psi(u)|_{x=1}$.

Обозначим через $M(v)$ множество функций $u_0(x) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющих граничному условию, соответствующему рассматриваемой вариационной задаче, таких, что $\|u(x,t) - v(x)\|_{C^2[0,1]} \to 0$ при $t \to \infty$, где $u(x,t)$ — решение задачи (1), $u(x,0) = u_0(x)$. Имеет место [11]

Теорема 3. *Пусть $v(x)$ доставляет абсолютный минимум функционалу* (2) *в одном из рассматриваемых случаев* (а), (б) *или* (в). *Тогда $v(x)$ устойчиво по Ляпунову в норме $C^1[0,1]$ как решение соответствующей нестационарной задачи* (1). *Если $v(x)$ асимптотически устойчиво, то часть $M(v)$ может быть описана с помощью одного из следующих утверждений.*

I. *Существуют стационарные решения $v_1(x), v_2(x)$ задачи* (1) *такие, что*

$$T_I = \{u_0 \mid v_1 < u_0 < v_2 \text{ для } 0 < x < 1\} \cap C^1[0,1] \subset M(v).$$

II. *Существует стационарное решение $v_1(x)$ задачи* (1) *такое, что*

$$T_{II} = \{u_0 \mid v_1 < u_0 \text{ для } 0 < x < 1\} \cap C^1[0,1] \subset M(v).$$

III. *Существует стационарное решение $v_2(x)$ задачи* (1) *такое, что*

$$T_{III} = \{u_0 \mid u_0 < v_2 \text{ для } 0 < x < 1\} \cap C^1[0,1] \subset M(v).$$

IV. $T_{IV} = \{u_0 \in C^1[0,1]\} \subset M(v)$.

При этом в случае граничных условий (а) *$u_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям* (А), *в случае* (б) *— граничным условиям* (Б), *в случае* (в) *— граничным условиям* (В), *где $t = 0$.*

Проиллюстрируем теорему 3 на примере [7, с. 146], показывающем, что область притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения задачи (1) может определяться неоднозначно.

Пусть

$$G(x,\xi,\eta,\zeta) = \zeta + \xi e^{N(\sin^2 x - \xi^2)}.$$

Так как задача Коши (14) для уравнения

$$v_{xx} = -v e^{N(\sin^2 x - v^2)}$$

разрешима в целом, найдется достаточно гладкая функция $F(x,\xi,\eta)$ такая, что уравнение $G(x,v,v_x,v_{xx}) = 0$ можно считать уравнением Эйлера для соответствующего лагранжиана $F(x,v,v_x)$.

Итак, рассмотрим уравнение (1) с данной функцией G и краевыми условиями $u(-\pi) = 0$, $u(\pi) = 0$.

Доказано, что по любым начальным данным $u_0(x) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющим условиям согласования, решение этой задачи будет стабилизироваться к стационарному решению. Очевидно, что, в частности, стационарными решениями являются $v(x) = 0$, $v_\pm(x) = \pm\sin x$. Если в качестве начальных данных взять четную неотрицательную функцию $u_0(x) \geq |\sin x|$, то можно показать, что соответствующее решение параболической задачи (1) будет стабилизироваться к четному асимптотически устойчивому стационарному решению $\tilde{v}_+(x) > |\sin x|$, $|x| \neq \pi$. Аналогично устанавливается существование отрицательного четного асимптотически устойчивого решения $\tilde{v}_-(x) < -|\sin x|$, $|x| \neq \pi$. Непосредственно убеждаемся, что линеаризованная на $v(x) = 0$ рассматриваемая задача имеет положительное собственное число, а стационарные решения $v_\pm(x) = \pm\sin x$, наоборот, при достаточно больших $N > 0$ асимптотически устойчивы. Из теоремы 3 вытекает существование стационарных решений $w_1^{\pm}(x)$, $w_2^{\pm}(x)$, определяющих границы областей устойчивости стационарных решений $\pm \sin x$, а именно

$$\left\{u_0 \mid w_1^{\pm}(x) < u_0 < w_2^{\pm}(x)\right\} \subset M(\pm \sin x).$$

Так как $v(x) = 0$ — неустойчивое решение, в области устойчивости рассматриваемых решений не могут попасть функции, сохраняющие знак, поэтому $w_k^{\pm}(x)$, $k = 1, 2$, обязательно меняют знак. Из соображений симметрии и того, что $w_1^{\pm}(x) < \pm \sin x < w_2^{\pm}(x)$ для $|x| \neq \pi$, можно считать, что $w_1^{\pm}(x) = -w_2^{\mp}(x)$. Тогда

$$\{u_0 \mid 0 \leq u_0 \leq \tilde{v}_+(x)\} \subset M(\tilde{v}_+), \quad \{u_0 \mid -w_1^+ \leq u_0 \leq \tilde{v}_+\} \subset M(\tilde{v}_+),$$
$$\{u_0 \mid -w_1^- \leq u_0 \leq \tilde{v}_+\} \subset M(\tilde{v}_+).$$

Итак, нижняя граница области притяжения решения $\tilde{v}_+(x)$ определяется с помощью трех неустойчивых стационарных решений задачи (1).

Приведем утверждение, позволяющее оценить число стационарных решений параболического уравнения (1), удовлетворяющих одному из краевых условий (А), (Б) или (В).

Положим $y_1(x, \gamma) = v(x, 1, 0, \gamma)$, $y_2(x, \gamma) = v(x, 1, \gamma, \psi(\gamma))$. Из результатов работы [7, с. 135] следует, что справедлива

Теорема 4. *Пусть нуль является асимптотически устойчивым решением задачи* (1), *для которого выполняется одно из краевых условий* (А), (Б) *или* (В), *и для некоторых значений* $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ *справедливо* $y_1(\xi_i, \gamma_1) = 0$, $y_2(\eta_j, \gamma_2) = 0$, *где* $0 \leq \xi_1 < \cdots < \xi_n < 1$, $0 \leq \eta_1 < \cdots < \eta_m < 1$. *Тогда существует не менее чем* $n + 1$ *стационарных решений уравнения* (1) *в случае граничных условий* (А), *не менее чем* $m + 1$ *решений в случае граничных условий* (Б) *и не менее чем* m *решений в случае граничных условий* (В).

Исследование примера С. Н. Бернштейна

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(x_2, y(x)) = \int_0^{x_2} F(y, y_x)\, dx, \tag{15}$$

где $x_2 > 0$ и $F(y, y_x) = y^2 + \sqrt{1 + y_x^2}$. Минимум функционала будем искать в классе абсолютно непрерывных на отрезке [0,1] функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(0) = 0, \quad y(x_2) = y_2, \tag{16}$$

где $y_2 > 0$. Справедливо

Утверждение 1. *Минимум вариационной задачи* (15), (16) *может достигаться лишь на монотонной функции.*

Доказательство. Можно считать, что минимум рассматриваемой задачи достигается лишь на неотрицательной функции. Действительно, пусть у функции $f(x)$ из рассматриваемого класса существует точка $x_0 \in (0, x_2)$ такая, что $f(x_0) < 0$. Тогда в силу непрерывности $f(x)$ найдется точка $\xi \in (x_0, x_2)$ такая, что $f(\xi) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \in (\xi, x_2]$. Определим функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \xi, \\ f(x), & \xi \le x \le x_2. \end{cases}$$

Очевидно, что неотрицательная функция $f_1(x)$ принадлежит рассматриваемому классу и $I(x_2, f(x)) \ge I(x_2, f_1(x))$.

Итак, пусть минимум функционала (15) достигается на невозрастающей неотрицательной функции $z(x)$, т. е. существуют точки ξ_1, ξ_2 такие, что $0 < \xi_1 < \xi_2 \le x_2$ и $z(\xi_1) > z(\xi_2)$. Функция $z(x)$ на отрезке $[0, \xi_1]$ принимает все значения из отрезка $[0, z(\xi_1)]$. Так как $z(\xi_1) > z(\xi_2)$, найдется точка $\xi_0 \in [0, \xi_1)$ такая, что $z(\xi_0) = z(\xi_2)$. Построим функцию

$$z_1(x) = \begin{cases} z(x), & x \in [0, \xi_0] \cup [\xi_2, x_2], \\ z(\xi_2), & x \in [\xi_0, \xi_2]. \end{cases}$$

На интервале (ξ_0, ξ_2) справедливо, что $z_x^2(x) \ge z_{1x}^2(x) = 0$ и $z(x) \ge z_1(x)$, а вне этого интервала функции $z(x)$ и $z_1(x)$ совпадают, поэтому $I(x_2, z(x)) \ge I(x_2, z_1(x))$, т. е. утверждение доказано.

Для задачи (15), (16) уравнение Эйлера (7) имеет вид

$$2y - \frac{y_{xx}}{\left(1 + y_x^2\right)^{3/2}} = 0. \tag{17}$$

Инвариант или первый интеграл этого уравнения можно записать в виде

$$y^2 + \frac{1}{\sqrt{1 + y_x^2}} = C, \quad C = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Утверждение 2. *Абсолютно непрерывная функция $y(x)$, являющаяся решением краевой задачи* (17), (16), *существует тогда и только тогда, когда найдется константа $C > 0$, удовлетворяющая равенству*

$$x_2 = \int\limits_0^{y_2} \frac{C - \xi^2}{\sqrt{1 - (C - \xi^2)^2}}\, d\xi. \tag{19}$$

Доказательство. Функция $y(x)$ при $x \in [0, x_2]$ есть решение уравнения Эйлера (17) тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что для всех рассматриваемых значений x выполнено соотношение (18). Из (18) следует, что $y(x)^2 \le C$ при $x \in [0, x_2]$, поэтому производная $y_x(x)$ будет удовлетворять равенству

$$y_x = \frac{\sqrt{1 - (C - y^2)^2}}{C - y^2}, \tag{20}$$

откуда в силу краевых условий (16) мы и получаем для нахождения константы C уравнение (19). Утверждение доказано.

Замечание 1. Из равенств (20), (17) следует, что рассматриваемое решение уравнения Эйлера будет монотонно возрастающей выпуклой функцией на отрезке $[0, x_2]$.

Замечание 2. В дальнейшем абсолютно непрерывную функцию $y(x)$, являющуюся решением уравнения Эйлера (17) и удовлетворяющую условиям (16), будем называть экстремалью вариационной задачи (15), (16).

Замечание 3. В силу утверждения 1 будем считать, что допустимыми функциями для задачи (15), (16) являются монотонные абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие краевым условиям (16).

Утверждение 3. *Для любого числа $x_2 > 0$ существует число $y_* = y_*(x_2)$, удовлетворяющее уравнению*

$$x_2 = \int\limits_0^{y_*} \frac{y_*^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - \left(y_*^2 - \xi^2\right)^2}}\, d\xi, \tag{21}$$

и обладающее свойствами:

(А) *если $y_2 > y_*$, то экстремали рассматриваемой вариационной задачи не существует,*

(Б) *если $0 < y_2 \le y_*$, то существует единственная экстремаль вариационной задачи* (15), (16).

Доказательство основано на исследовании уравнения (19) относительно константы C, которое запишем в виде

$$x_2 = q(y_2, C), \tag{22}$$

где $q(y_2, C)$ — правая часть равенства (19). Непосредственными вычислениями получим

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = \frac{1}{D}, \quad \frac{\partial C}{\partial y_2} = \frac{-1}{D}\, \frac{C - y_2^2}{\sqrt{1 - (C - y_2^2)^2}}, \tag{23}$$

где

$$D = \frac{\partial q}{\partial C} = \int\limits_0^{y_2} \frac{d\xi}{(1 - (C - \xi^2)^2)^{3/2}}.$$

Заметим, что из соотношения (18) для решения уравнения Эйлера, удовлетворяющего краевым условиям (16), следует, что $C \ge y_2^2$, поэтому при фиксированном значении x_2 производная $\frac{\partial C}{\partial y_2}$ не больше 0. Значение y_2, при котором эта производная обращается в нуль, обозначим через $y_* = y_*(x_2)$. В этом случае $C = y_*^2$ и для нахождения y_* верно уравнение (21), полученное из равенства (19).

Обозначим через $G(y_*)$ правую часть уравнения (21), запишем его в виде

$$x_2 = G(y_*)$$

и докажем, что при $x_2 > 0$ существует единственное решение y_* этого уравнения. Имеем

1) $\lim\limits_{y_* \to 0+0} G(y_*) = 0$,

2) $\lim\limits_{y_* \to 1-0} G(y_*) = +\infty$,

3) $\frac{dG(y_*)}{dy_*} > 0$, $\frac{d^2 G(y_*)}{dy_*^2} > 0$ при $y_* > 0$.

Из этих соотношений следует, что уравнение (21) задает неявную функцию $y_*(x_2)$, определенную при $x_2 > 0$ и обладающую следующими свойствами:

$$0 < y_*(x_2) < 1, \quad \frac{dy_*}{dx_2} > 0, \quad \frac{d^2 y_*}{dx_2^2} < 0. \tag{24}$$

Итак, пусть $x_2 > 0$ — фиксированное число, а y_2 — произвольное положительное число. Обозначим через $C = C(y_2)$ решение уравнения (22), если оно существует.

Докажем свойство (А). Пусть $y_2 = y_{2_0}$, где $y_{2_0} > y_*$, $y_* = y_*(x_2)$. Предположим, что существует экстремаль $y(x)$ рассматриваемой вариационной задачи.

Тогда для $y(x)$ справедливо соотношение (18), откуда следует, что $C(y_2) \geq y_2^2$. В силу единственности решения уравнения (21) при фиксированном x_2 имеем, что $C(y_{2_0}) \neq C(y_*) = y_*^2$, так как $y_{2_0} \neq y_*$. Поэтому $C(y_{2_0}) > y_{2_0}^2$. Но тогда из соотношения (23) для производной $\frac{\partial C}{\partial y_2}$ получаем

$$\left.\frac{dC}{dy_2}\right|_{y_2=y_{2_0}} < 0, \tag{25}$$

т. е. $C(y_{2_0}) < C(y_*) = y_*^2 < y_{2_0}^2$. Противоречие показывает, что решения $C(y_2)$ уравнения (21) для рассматриваемого значения y_2 не существует. Таким образом, в силу утверждения 2 справедливость свойства (А) доказана.

Докажем свойство (Б). Пусть $y_2 = y_{2_0}$, где $y_{2_0} < y_*$ (если $y_{2_0} = y_*$, то выше было показано существование решения уравнения (19) $C = y_*^2$). Для доказательства существования единственного решения $C = C(y_2)$ уравнения (19) покажем, что если решение C существует, то оно удовлетворяет соотношению

$$y_*^2 < C(y_2) \leq 1. \tag{26}$$

Действительно, если C — решение уравнения (19), то с необходимостью выполнено условие

$$|C - \xi^2| \leq 1 \quad \text{для всех } \xi \in [0, y_{2_0}],$$

откуда

$$y_{2_0}^2 - 1 \leq C \leq 1, \tag{27}$$

т. е. выполнена правая часть соотношения (26). С другой стороны, для решения $C(y_2)$ справедливо неравенство (25), поэтому

$$C(y_{2_0}) > C(y_*) = y_*^2 > y_{2_0}^2.$$

Отсюда и следует справедливость левой части соотношения (26). Найдем значения функции $q(y_{2_0}, C)$ (см. (22)) при $C = y_*^2$ и при $C \to 1 - 0$. Имеем

$$\lim_{C \to 1-0} q(y_{2_0}, C) = +\infty,$$

$$q(y_{2_0}, y_*^2) = \int\limits_0^{y_{2_0}} \frac{y_*^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - (y_*^2 - \xi^2)^2}}\, d\xi = x_2 - \int\limits_{y_{2_0}}^{y_*} \frac{y_*^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - \left(y_*^2 - \xi^2\right)^2}}\, d\xi < x_2.$$

Ввиду непрерывности и строгой монотонности функции $q(y_2, C)$ (см. (23)) по переменной C при фиксированном значении $y_2 = y_{2_0}$ отсюда и следует существование единственного решения $C = C(y_{2_0})$ уравнения (22) или (19). В силу утверждения 2 свойство (Б) выполнено. Утверждение доказано.

Замечание 4. Рассмотрим задачу (17), (16) в случае $y_2 = y_* = y_*(x_2)$. Из утверждения 3 вытекает существование единственной функции $z(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$z^2 + \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2}} = y_*^2.$$

Отсюда и из замечания 1 имеем, что для функции $z(x)$

$$z(x_2) = y_*, \quad z_x(x_2 - 0) = +\infty.$$

Утверждение 4. *Пусть $x_2 > 0$ и $y_2 \le y_*$, где $y_* = y_*(x_2)$. Тогда минимум вариационной задачи* (15), (16) *достигается на экстремали $y(x)$ и*

$$\inf_f I(x_2, f(x)) = I(x_2, y(x)) = Cx_2 + \int\limits_0^{y_2} \sqrt{1-(C-\xi^2)^2}\, d\xi, \tag{28}$$

где константа C определяется из уравнения (19).

Доказательство. Согласно замечанию 3 считаем, что допустимые функции $f(x)$ рассматриваемой вариационной задачи монотонны. Из утверждения 3 следует существование экстремали $y(x)$ этой задачи, задаваемой уравнением (18) с константой C, определяемой из уравнения (19).

Для этой экстремали введем обозначение:

$$u = u(y) = y_x = \frac{\sqrt{1-(C-y^2)^2}}{C-y^2}, \quad y \in [0, y_2], \tag{29}$$

и рассмотрим функцию Вейерштрасса [9]

$$E(f, f_x) = F(f, f_x) - F(f, u) - (f_x - u)F_{f_x}(f, u), \tag{30}$$

где положим $u = u(f)$. Функция E определена на всех допустимых функциях $f(x)$ задачи (15), (16). Получаем

$$E(f, f_x) = f^2 + \sqrt{1+f_x^2} - (C + f_x\sqrt{1-(C-f^2)^2}). \tag{31}$$

Из вида (30) следует, что

$$E_{f_x}(f, f_x)|_{f_x=u(f)} = 0, \quad E_{f_x f_x}(f, f_x) = F_{f_x f_x}(f, f_x) = \left(1+f_x^2\right)^{-3/2} > 0.$$

Так как $E(f, f_x)$ обращается в нуль только при $f_x = u(f)$, то из этих свойств получаем, что в классе всех допустимых функций $f(x)$ функция $E(f, f_x)$ достигает абсолютного нулевого минимума только на экстремали $y(x)$. При этом справедливо неравенство

$$E(f, f_x) \ge 0 \tag{32}$$

для всех допустимых функций $f(x)$ рассматриваемой задачи. Следовательно, в силу равенства (31) имеем

$$I(x_2, f(x)) \ge \int\limits_0^{x_2} (C + f_x\sqrt{1-(C-f^2)^2})\, dx = Cx_2 + \int\limits_0^{y_2} \sqrt{1-(C-\xi^2)^2}\, d\xi. \tag{33}$$

Поскольку из соотношений (18), (29) получаем

$$I(x_2, y(x)) = \int\limits_0^{x_2} \left(y^2 + \sqrt{1+y_x^2}\right) dx$$

$$= \int\limits_0^{x_2} \left(y^2 + \left(1+y_x^2\right)^{-1/2} - \left(1+y_x^2\right)^{-1/2} + \sqrt{1+y_x^2}\right) dx = \int\limits_0^{x_2} \left(C + \frac{y_x^2}{\sqrt{1+y_x^2}}\right) dx$$

$$= \int\limits_0^{x_2} (C + y_x\sqrt{1-(C-y^2)^2})\, dx = Cx_2 + \int\limits_0^{y_2} \sqrt{1-(C-y^2)^2}\, dy, \tag{34}$$

то из оценок (33), (34) и следует требуемое соотношение (28). Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Пусть* $x_2 > 0$, $y_2 > y_*$, *где* $y_* = y_*(x_2)$. *Тогда*

$$\inf_f I(x_2, f(x)) = I(x_2, z(x)) + y_2 - y_*, \tag{35}$$

где $z(x)$ — *экстремаль вариационной задачи* (15) *с краевыми условиями*

$$y(0) = 0, \quad y(x_2) = y_*. \tag{36}$$

Доказательство начнем с получения оценки

$$I(x_2, f(x)) \ge I(x_2, z(x)) + y_2 - y_* \tag{37}$$

для любой допустимой функции $f(x)$ рассматриваемой вариационной задачи.

В силу непрерывности функции $f(x)$ найдется точка ξ такая, что $0 < \xi < x_2$, $f(\xi) = y_*$. Представим рассматриваемый функционал в виде

$$I(x_2, f(x)) = I(\xi, f(x)) + \int\limits_\xi^{x_2} \bigl(f^2 + \sqrt{1 + f_x^2}\bigr)\, dx. \tag{38}$$

Так как $f(x) \ge y_*^2$ при $x \ge \xi$, имеем

$$\int\limits_\xi^{x_2} \bigl(f^2 + \sqrt{1 + f_x^2}\bigr)\, dx \ge y_*^2(x_2 - \xi) + y_2 - y_*. \tag{39}$$

С другой стороны, в прямоугольнике $[0, x_2] \times [0, y_*]$ определена функция Вейерштрасса E с константой $C = y_*^2$. Получаем

$$\begin{gathered} I(\xi, f(x)) = \int\limits_0^\xi \bigl(f^2 + \sqrt{1 + f_x^2}\bigr)\, dx \\ = \int\limits_0^\xi \Bigl(f^2 + \sqrt{1 + f_x^2} - \Bigl(y_*^2 + f_x \sqrt{1 - \bigl(y_*^2 - f^2\bigr)^2}\Bigr)\Bigr)\, dx \\ + \int\limits_0^\xi \Bigl(y_*^2 + f_x \sqrt{1 - \bigl(y_*^2 - f^2\bigr)^2}\Bigr)\, dx = \int\limits_0^\xi E(g, g_x)\, dx + y_*^2 \xi + \int\limits_0^{y_*} \sqrt{1 - \bigl(y_*^2 - \xi^2\bigr)^2}\, d\xi, \end{gathered} \tag{40}$$

где

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \xi], \\ y_*, & x \in [\xi, x_2]. \end{cases}$$

Монотонная функция $g(x)$ является допустимой функцией вариационной задачи (15) с краевыми условиями (36), поэтому в силу оценки (32) $E(g, g_x) \ge 0$ для всех $x \in [0, x_2]$. С учетом формулы (24) для функции $z(x)$ имеем

$$I(x_2, z(x)) = y_*^2 x_2 + \int\limits_0^{y_*} \sqrt{1 - \bigl(y_*^2 - \xi^2\bigr)^2}\, d\xi.$$

Но тогда из представления (38) с учетом соотношений (39), (40) следует оценка (37).

Для завершения доказательства формулы (35) построим последовательность допустимых функций $z_n(x)$ рассматриваемой задачи, удовлетворяющую неравенству

$$I(x_2, z_n(x)) \le I(x_2, z(x)) + y_2 - y_* + \delta_n, \tag{41}$$

где $\delta \ge 0$, $\delta_n \to 0$.

Введем обозначения: $x_n = x_2 - 1/n$, где $n > N_0$, $x_{N_0} > 0$ и

1) $y_{*n} = y_*(x_n)$,

2) $g_n(x) = y_{*n} + n(y_2 - y_{*n})(x - x_n)$ — прямая, проходящая через точки (x_n, y_{*n}) и (x_2, y_2),

3) $y_n(x)$ — экстремаль вариационной задачи (15) с краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(x_n) = y_{*n}$.

Докажем, что искомой последовательностью являются функции

$$z_n(x) = \begin{cases} y_n(x), & x \in [0, x_n], \\ g_n(x), & x \in [x_n, x_2]. \end{cases}$$

Очевидно, что $z_n(x)$ являются допустимыми функциями рассматриваемой вариационной задачи и

$$I(x_2, z_n(x)) = I(x_n, y_n(x)) + \int\limits_{x_n}^{x_2} \left(g_n^2 + \sqrt{1 + g_{nx}^2}\right) dx.$$

Оценим последнее слагаемое:

$$\int\limits_{x_n}^{x_2} \left(g_n^2 + \sqrt{1 + g_{nx}^2}\right) dx \le y_2^2(x_2 - x_n) + \frac{\sqrt{1 + (y_2 - y_{*n})^2 n^2}}{n}.$$

Тогда

$$I(x_2, z_n(x)) \le I(x_n, y_n(x)) + \frac{y_2^2}{n} + (y_2 - y_{*n})\sqrt{1 + \frac{1}{(n(y_2 - y_{*n}))^2}}.$$

Так как

$$I(x_n, y_n(x)) = y_{*n}^2 x_n + \int\limits_0^{y_{*n}} \sqrt{1 - \left(y_{*n}^2 - \xi^2\right)^2}\, d\xi,$$

где $y_{*n} = y_*(x_n)$, изучим подробнее выражение

$$i(x) = y_*^2 x + \int\limits_0^{y_*} \sqrt{1 - \left(y_*^2 - \xi^2\right)^2}\, d\xi,$$

где $y_* = y_*(x)$.

В силу свойств (24) функции $y_*(x)$ получим

$$\frac{di}{dx} = \frac{dy_*}{dx} + y_*^2 > 0,$$

т. е. $I(x_n, y_n(x)) \le I(x_2, z(x))$, ибо $x_n < x_2$. Поэтому

$$I(x_2, z_n(x)) \le I(x_2, z(x)) + (y_2 - y_*)\sqrt{1 + \frac{1}{(n\gamma)^2}} + (y_* - y_{*n})\sqrt{1 + \frac{1}{(n\gamma)^2}} + \frac{y_2^2}{n}.$$

Здесь $y_2 - y_{*n} > y^2 - y_* = \gamma > 0$.

Из свойств (24) функции $y_*(x)$ следует существование константы $K > 0$ такой, что

$$y_* - y_{*n} = y_*(x_2) - y_*(x_n) = \frac{dy_*(x)}{dx}\bigg|_{x=\xi_n}(x_2 - x_n) \leq \frac{K}{n}, \quad \xi_n \in (x_n, x_2).$$

Так как

$$\sqrt{1 + \frac{1}{(n\gamma)^2}} = 1 + \frac{1}{2(n\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

окончательно имеем

$$I(x_2, z_n(x)) \leq I(x_2, z(x)) + y_2 - y_* + \tau/n, \quad \tau > 0.$$

Таким образом, формула (41) доказана с $\delta_n = O(1/n)$, $\delta_n \geq 0$. Но тогда из соотношений (37) и (41) и следует справедливость утверждения 5.

Замечание 5. В ходе доказательства утверждения 5 построена минимизирующая последовательность $z_n(x)$ допустимых функций такая, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\|z_n(x) - z(x)\|_{C[0,x_2-\varepsilon]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов С. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
2. *Tonelli L.* Fondamenti di calcolo delle variazioni. Bologna: Zanichelli, 1923. V. 2.
3. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 3.
4. *Clarke F. H., Vinter R. B.* Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 289, N 1. P. 74–98.
5. *Davi A. M.* Singular minimisers in the calculus of variations in one dimension // Arch. Ration. Mech. Anal. 1988. V. 101, N 2. P. 161–177.
6. *Lavrentiev M.* Sur quelques problems du calcul des variations // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1926. V. 4. P. 7–28.
7. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: НГУ, 1975.
8. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехтеоретиздат., 1950.
9. *Коша А.* Вариационное исчисление. М.: Высш. шк., 1983.
10. *Зеленяк Т. И., Люлько Н. А.* К вопросу о разрешимости в целом смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 317–328.
11. *Акрамов Т. А., Зеленяк Т. И.* О числе стационарных решений и областях неустойчивости квазилинейных уравнений параболического типа // Математические проблемы химии. Новосибирск: Наука, 1975. Т. I. С. 144–150.

Статья поступила 10 мая 2000 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
zel@math.nsc.ru