*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5*

*УДК 517.597*

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ГРАНИЦЕЙ

**Е. Г. Григорьева**

**Аннотация:** Пусть $\Phi(x,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, выпуклая и однородная по переменной $\xi$. Определяется пространство $\mathscr{F}$ как $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, в котором скалярный квадрат вектора $\chi = (y_1, \dots, y_n, t)$, приложенного в точке $(x, z) = (x_1, \dots, x_n, z)$, определяется по формуле

$$|\chi|^2_{\mathscr{F}} = -t^2 + \Phi^2(x, y).$$

Вводится понятие пространственноподобных поверхностей в $\mathscr{F}$, и ставится задача описания условий на границу некоторой наперед заданной поверхности, при которых существует пространственноподобная поверхность с тем же краем. Приводятся необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи. Библиогр. 8.

**1.** При изучении многообразий, несомненно, представляют интерес их глобальные свойства, в частности, типы экстремальных поверхностей, которые они допускают. В римановых многообразиях это минимальные поверхности (мыльные пленки и их обобщения на высшие размерности), которые и по сей день остаются объектом многочисленных исследований. Аналогичные поверхности в пространствах-времени, т. е. многообразиях с лоренцевой метрикой, суть так называемые «максимальные» поверхности. Эти поверхности возникают при решении задач на максимум площади и являются поверхностями нулевой средней кривизны. Стоит отметить и многочисленные физические приложения максимальных поверхностей, см., например, [1].

В пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{n+1}_1$, т. е. $(n+1)$-мерном вещественном пространстве с метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, уравнение максимальных поверхностей имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f / \partial x_i}{\sqrt{1 - |\nabla f(x)|^2}} \right) = 0, \quad |\nabla f(x)| < 1.$$

Условие $|\nabla f(x)| < 1$ означает, что поверхность $t = f(x)$ пространственноподобна, т. е. на ней индуцируется риманова метрика.

В работах Р. Бартника и Л. Саймона [2] и Н. Куэна [3] выявлена тесная связь разрешимости задачи Дирихле для уравнения максимальных поверхностей с задачей о существовании функции $t = f(x)$ с пространственноподобным

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00414) и гранта INTAS (№ 10170).

графиком и с заданными граничными значениями (в общем случае — о существовании пространственноподобной поверхности с заданным краем).

В работе В. М. Миклюкова и А. А. Клячина [4] найдены необходимые и достаточные условия на граничную функцию $t = \varphi(x) : \partial D \to \mathbb{R}$ для существования пространственноподобной поверхности, заданной графиком липшицевой функции $t = f(x) : D \to \mathbb{R}$ такой, что

$$f(x)|_{\partial D} = \varphi(x).$$

Аналогичные условия получены и для поверхностей, заданных графиком функции $t = f(x)$ в искривленных лоренцевых произведениях, где метрика имеет вид

$$ds^2 = -\delta(x)\, dt^2 + dx^2, \quad \delta(x) > 0.$$

Настоящая работа посвящена задаче существования пространственноподобной поверхности произвольной коразмерности (не являющейся, вообще говоря, графиком функции) с заданной границей в некоторых обобщениях лоренцевых пространств. Как и в пространстве Минковского, данная задача тесно связана с задачей Дирихле для экстремалей функционала площади в соответствующем пространстве.

**2.** Пусть в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ задана непрерывная неотрицательная функция $\Phi(\cdot,\cdot)$, обладающая следующими свойствами:

1) для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \geq 0$ выполнено равенство $\Phi(x, \lambda\xi) = \lambda\Phi(x, \xi)$;

2) $\Phi(x, \xi)$ выпукла по переменой $\xi$;

3) существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1|\xi| \leq \Phi(x, \xi) \leq c_2|\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathscr{F}$ пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, в котором скалярный квадрат $|\chi|^2$ любого вектора $\chi = (y_1, \dots, y_n, \tau)$, приложенного в точке $z = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$, вычисляется по формуле

$$|\chi|^2_{\mathscr{F}} = -\tau^2 + \Phi^2(x, y). \tag{1}$$

Интересны следующие примеры таких пространств.

Пространство-время Минковского $\mathbb{R}^{n+1}_1$ получается при выборе функции

$$\Phi(x, \xi) \equiv |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2},$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Если же положить

$$\Phi(x, \xi) = \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \right)^{1/2},$$

где $a_{ij}(x)$ — измеримые в $\mathbb{R}^n$ функции, образующие в каждой точке положительно определенную квадратичную форму $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, то метрика (1) представляет собой метрику лоренцева пространства [5].

Отметим, что даже в этих частных случаях приводимые ниже результаты являются новыми.

Определение 1. Ненулевой вектор $\chi$ называется *пространственноподобным, времениподобным* или *светоподобным* в пространстве $\mathscr{F}$, если $|\chi|^2_{\mathscr{F}} > 0$, $|\chi|^2_{\mathscr{F}} < 0$ или $|\chi|^2_{\mathscr{F}} = 0$ соответственно.

Пусть $\chi = (y, \tau)$ — невремениподобный вектор, приложенный в точке $z = (x, t)$. Определим величину

$$\operatorname{ch}\theta^*(\chi, z) = \frac{\Phi(x, y)}{|\chi|_{\mathscr{F}}}.$$

Заметим справедливость неравенства $\operatorname{ch}\theta^*(\chi, z) \geq 1$, которое следует из (1) и определения пространственноподобности вектора $\chi$. Кроме этого, в случае приведенных примеров пространств $\mathscr{F}$ величина $\operatorname{ch}\theta^*(\chi, z)$ совпадает со значением косинуса гиперболического угла между вектором $\chi$ и его проекцией на горизонтальную составляющую в произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Определение 2. Пусть поверхность $\mathscr{M}$ задана $C^1$-погружением

$$z(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u), t(u)) \tag{2}$$

области $D \subset \mathbb{R}^k$. Поверхность $\mathscr{M}$ называется *пространственноподобной*, если каждый касательный к ней вектор является пространственноподобным (см. [6]).

Предлагаемая статья посвящена вопросу существования пространственноподобных поверхностей в классе не $C^1$ -гладких, но липшицевых поверхностей. Поэтому понятие пространственноподобной поверхности необходимо распространить и на липшицевы поверхности.

Определение 3. Поверхность $\mathscr{M}$, заданная погружением (2) области $D \subset \mathbb{R}^k$, $k \leq n$, с локально липшицевыми координатными функциями называется *пространственноподобной*, если для любого компакта $K \subset D$

$$0 < \operatorname*{ess\,sup}_{u \in K} \operatorname{ch}\theta(u) = \inf_{L \subset K \subset D} \sup_{u \in K \setminus L} \operatorname{ch}\theta(u) < +\infty,$$

где точная нижняя грань берется по всем множествам $L$ нулевой меры Лебега, расположенным в компакте $K$. Здесь $\theta(u) = \sup \theta^*(\chi(u))$, где точная верхняя грань берется по всем касательным векторам $\chi$, если точка $(x(u), t(u))$ является точкой регулярности для поверхности $\mathscr{M}$, и $\theta(u) = 0$ в остальных точках.

Легко проверить, что это условие эквивалентно данному выше определению пространственноподобной поверхности, если та является $C^1$-гладкой.

Обратимся теперь непосредственно к формулировке задачи.

Пусть $L$ — $(k-1)$-мерная липшицева поверхность в $\mathscr{F}$. Предположим, что существует хотя бы одна $k$-мерная липшицева поверхность $\mathscr{M}_1$, заданная радиус-вектором

$$z_1(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u), f(u)) : D \to \mathscr{F}, \quad D \subset \mathbb{R}^k,$$

и имеющая в качестве своей границы поверхность $L$. Причем для любого компакта $K \subset D$ выполнено

$$\operatorname*{ess\,inf}_{u \in K} \det G(u) = \sup_{L \subset K \subset D} \inf_{u \in K \setminus L} \det G(u) > 0,$$

где $G = \{g_{ip}\}_{k,k}$ — матрица размера $k \times k$ с элементами

$$g_{ip}(u) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial u_i}(u) \frac{\partial x_l}{\partial u_p}(u),$$

и точная верхняя грань берется по всем множествам $L$ нулевой меры Лебега, расположенным в компакте $K$.

Приведенное условие означает, что у поверхности $\mathscr{M}_1$ отсутствуют касательные плоскости, параллельные оси времени $0t$.

Поскольку матрица $G$ является матрицей Грама для проекций касательных векторов к поверхности $\mathscr{M}_1$ на $\mathbb{R}^n$ и, кроме того, ее определитель почти всюду не равен нулю, она почти всюду обратима и коэффициенты обратной матрицы $G^{-1}$ будем обозначать через $\{g^{ij}\}$.

Цель статьи — описать необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять поверхность $L$, чтобы существовала $k$-мерная пространственноподобная в пространстве $\mathscr{F}$ поверхность $\mathscr{M}$, имеющая $L$ своей границей.

Решение задачи ищется в виде (2), где $x_i(u)$ — первые $n$ координатных функций для поверхности $\mathscr{M}_1$, а функция $t(u)$ совпадает с $f(u)$ на границе области $D$.

Совпадение функций $f(u)$ и $t(u)$ на границе автоматически предполагает совпадение границ поверхностей $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}_1$.

Задача, таким образом, сводится к нахождению такой функции $t(u)$, чтобы полученная поверхность была пространственноподобной.

Положим

$$\rho(w,v) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \Phi\left(x(u(l)), \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x}{\partial u_i}(u(l)) \cdot g^{ij}(u(l)) \cdot \frac{du_j}{dl}\right) dl,$$

где точная нижняя грань берется по всем локально спрямляемым кривым $\gamma = \{u(l) : 0 \le l \le 1\} \subset D$, соединяющим точки $w$, $v \in D$.

Нетрудно показать, что функция $\rho(w,v)$ задает метрику в области $D$ (см., например, [7]).

Обозначим через $D_\rho$ пополнение области $D$ по этой метрике. Как и в [4], будем предполагать, что пополнение $D_\rho$ компактно. Это заведомо выполнено, если граница $\partial D$ является кусочно-гладкой, а область $D$ ограничена. Если дополнительно граница $\partial D$ не имеет кратных точек, то $\partial D = \partial D_\rho = D_\rho \setminus D$.

Пусть также

$$\Gamma(w,v) = \{w' \in D_\rho : \rho(w,v) = \rho(w,w') + \rho(w',v)\}.$$

Результатом работы является следующая

**Теорема.** *При сделанных предположениях для существования $k$-мерной пространственноподобной липшицевой поверхности $\mathscr{M}$ в $\mathscr{F}$ с границей $L$ необходимо и достаточно выполнения двух условий*

$$|t(w) - t(v)| \le \rho(w,v) \quad \forall w, v \in \partial D_\rho,$$

$$|t(w) - t(v)| < \rho(w,v) \ \forall w, v \in \partial D_\rho \quad \text{и} \quad \Gamma(w,v) \setminus \partial D_\rho \neq \varnothing.$$

Замечание. Хотя в определении внутренней метрики $\rho(w,v)$ участвует вспомогательная поверхность $\mathscr{M}_1$, легко видеть, что для гиперповерхностей построенная метрика локально не зависит от выбора вспомогательной поверхности, но зависит от топологического строения поверхности $\mathscr{M}_1$.

**3.** Основная идея доказательства теоремы заключается в том, чтобы переписать условие пространственноподобности поверхности $\mathscr{M}$ в форме условия Липшица для функции $t(u)$ в метрике $\rho$ области $D$.

Введем функцию $H(\cdot,\cdot)$, двойственную к функции $\Phi(\cdot,\cdot)$ (см. например [8]):

$$H(u,\eta)=\sup_{\xi\neq 0}\frac{\langle \eta,\xi\rangle}{\Phi(x(u),\xi)}.$$

Отметим для примера, что если

$$\Phi(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j,$$

то

$$H(x,\eta)=\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\eta_i\eta_j,$$

где $\|a^{ij}\|$ — матрица, обратная к матрице $\|a_{ij}\|$.

В дальнейшем нам потребуется следующая

**Лемма.** *Пусть липшицева поверхность* $\mathscr{M}$ *задана радиус-вектором*

$$\mathscr{M}(u)=(x_1(u),x_2(u),\dots,x_n(u),t(u)):D\subset\mathbb{R}^k\to\mathscr{F}.$$

*Допустим, что для любого компакта* $K\subset D$ *выполнено*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{u\in K}\det G(u)>0.$$

*Тогда условие пространственноподобности поверхности* $\mathscr{M}$ *может быть записано в виде*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{u\in K}H\left(x(u),\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial x}{\partial u_i}(u)g^{ij}(u)\frac{\partial t}{\partial u_j}\right)<1\quad\forall K\subset D. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно данному нами определению поверхность $\mathscr{M}$ пространственноподобна тогда и только тогда, когда

$$0<\operatorname*{ess\,sup}_{u\in K}\operatorname{ch}\theta(u)<\infty.$$

По определению существенного супремума и функции $\theta(u)$ для любого компакта $K\subset D$ существует постоянная $0<C<\infty$ такая, что для всех точек $u\in K$, за исключением множества меры нуль, неравенство

$$0<\frac{\Phi(x(u),y(u))}{|\chi(u)|_{\mathscr{F}}}<C$$

выполнено для любого касательного вектора $\chi(u)=(y_1(u),\dots,y_n(u),\tau(u))$, приложенного в точке $(x_1(u),\dots,x_n(u),t(u))$. Значит, справедливо почти всюду и такое неравенство:

$$0<\frac{1}{C^2}<\frac{|\chi|^2_{\mathscr{F}}}{\Phi^2(x,y)}<\infty.$$

Поскольку всякий касательный к поверхности $\mathscr{M}$ вектор представим в виде

$$\chi(u)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial z}{\partial u_i}(u),\quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^k,$$

и согласно (1)

$$|\chi(u)|^2_{\mathscr{F}} = -\left[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial t}{\partial u_i}(u)\right]^2 + \Phi^2\left(x(u), \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial x}{\partial u_i}\right),$$

записанное выше условие принимает вид

$$0 < \frac{1}{C^2} < 1 - \frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial t}{\partial u_i}(u)\right]^2}{\Phi^2\left(x(u), \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)} < \infty.$$

С помощью элементарных преобразований можно переписать это неравенство следующим образом:

$$\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial t}{\partial u_i}(u)\right]^2}{\Phi^2\left(x(u), \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial x}{\partial u_i}(u)\right)} < 1 - \frac{1}{C^2}.$$

Это неравенство должно выполняться при всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ таких, что $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 \neq 0$. Следовательно, оно равносильно неравенству

$$\sup_{\alpha}\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial t}{\partial u_i}(u)\right]^2}{\Phi^2\left(x(u), \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)} \le 1 - \frac{1}{C^2}. \tag{4}$$

Рассмотрим вектор

$$\eta = \sum_{i,p=1}^{k} g^{ip}(u)\frac{\partial x}{\partial u_i}(u)\frac{\partial t}{\partial u_p}(u).$$

Тогда

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_l}{\partial u_i}(u)\eta_l = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j,p=1}^{k} g^{jp}\frac{\partial x_l}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial t}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial u_i} = \sum_{j,p=1}^{k} g^{jp}g_{ji}\frac{\partial t}{\partial u_p} = \frac{\partial t}{\partial u_i}.$$

Поэтому для любого набора чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ таких, что $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 \neq 0$, имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\frac{\partial t}{\partial u_i} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\eta_l\frac{\partial x_l}{\partial u_i}(u)\alpha_i.$$

Последнее равенство и определение функции $H(\cdot,\cdot)$ позволяет переписать (4) в виде

$$H^2(x(u), \eta) \le 1 - \frac{1}{C^2}.$$

Полученное неравенство выполнено почти всюду на компакте $K \subset D$. Следовательно, на основании определения существенного супремума заключаем, что условие пространственноподобности эквивалентно неравенству

$$\operatorname*{ess\,sup}_{u\in K} H\left(x(u), \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial x}{\partial u_i}(u)g^{ij}(u)\frac{\partial t}{\partial u_j}\right) < 1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу доказанной леммы для доказательства теоремы требуется найти необходимые и достаточные условия существования липшицевой функции $t(u)$ такой, что

$$t(u) = f(u) \quad \text{на } \partial D,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{u \in K} H\left(x(u), \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x}{\partial u_i}(u) \cdot g^{ij}(u) \frac{\partial t}{\partial u_j}\right) < 1 \quad \forall K \subset D.$$

Используя теорему 2 из [4], заключаем, что требуемые условия имеют вид

$$|t(w) - t(v)| \le \rho(w, v) \quad \forall w, v \in D_\rho$$

и

$$|t(w) - t(v)| < \rho(w, v), \quad \text{если } \Gamma(w, v) \setminus \partial D_\rho \neq \varnothing,$$

где величины $\rho(w, v)$ и $\Gamma(w, v)$ определены выше. Теорема доказана.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность своему научному руководителю профессору В. М. Миклюкову за постановку задачи и полезные замечания при подготовке статьи.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Суперструны — новый подход к теории фундаментальных взаимодействий // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150, № 4. С. 489–524.
2. *Bartnik R., Simon L.* Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature // Comm. Math. Phys. 1982. V. 87, N 1. P. 131–152.
3. *Quien N.* Plateau's problem in Minkowski space // Analysis. Munchen: R. Oldenbourg Verl. 1985. N 5. P. 43–60.
4. *Клячин А. А., Миклюков В. М.* Следы функций с пространственноподобными графиками и задача о продолжении при ограничениях на градиент // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 7. С. 49–64.
5. *Бим Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1985.
7. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
8. *Рокафеллер Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

*Статья поступила 30 июня 1998 г.,*
*окончательный вариант — 2 сентября 1999 г.*

*г. Волгоград*
*Волгоградский гос. университет,*
*кафедра математического анализа и теории функций*
e_grigoreva@mail.ru