Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СМЕЙЛА

Э. А. Томберг, В. А. Якубович

Аннотация: Исправлена ошибка, допущенная авторами в статье «Условия автоколебаний в нелинейных системах», Сиб. мат. журн. 1989. Т. 39, № 4. С. 180–194, в примере, решающем поставленную Смейлом задачу. Библиогр. 2.

В 1989 г. опубликована наша статья [1], где в одном из примеров допущена ошибка, на которую нам указал А. Погромский. Поскольку пример 2.2 из [1], о котором идет речь, не просто иллюстрировал доказанные в [1] теоремы, но и решал одну из задач, поставленных в [2], нам бы хотелось исправить допущенную ошибку.

Напомним кратко суть вопроса, сохраняя обозначения из [1]. В [2] Смейл предложил пример системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть интерпретирована как модель химической кинетики биологической клетки
$$\frac{dx}{dt} = \mathscr{R}(x), \tag{1}$$
где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_k \leq 0$, $\mathscr{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Уравнение (1) имеет единственное состояние равновесия, которое глобально асимптотически устойчиво (отдельная клетка «мертва»). При объединении двух таких клеток они начинают взаимодействовать путем диффузии через мембрану, пытаясь выровнять концентрации ферментов. И тем не менее при определенных условиях концентрации веществ в каждой клетке начинают осциллировать неограниченно долго (клетки «оживают»). Именно, система дифференциальных уравнений для двух клеток:
$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= \mathscr{R}(x^{(1)}) + \mathscr{D}(x^{(2)} - x^{(1)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= \mathscr{R}(x^{(2)}) + \mathscr{D}(x^{(1)} - x^{(2)}), \end{aligned} \tag{2}$$
является глобальным осциллятором. Здесь $\mathscr{D}$ — постоянная $(n \times n)$-матрица, подобная положительной диагональной, которая характеризует мембранную диффузию.

Смейл в связи со своим примером ставит две задачи. Во-первых, найти условия на отображения $\mathscr{R}$ и матрицу $\mathscr{D}$, при которых для (1) и (2) имеет место описанная выше ситуация. Ответ дает теорема 1.1 из [1]. Во-вторых, уменьшить число ферментов в клетке, т. е. порядок системы уравнений (1), с сохранением указанных свойств систем (1), (2). В примере Смейла число ферментов n равно 4 так же, как в примере 2.1 из [1], несколько обобщающем пример Смейла.

В примере 2.2 из [1] число ферментов n в клетке равно 3. Однако передаточная функция W_{P-2D} в этом примере найдена не верно (допущена ошибка в знаке). К сожалению, изменение знака W_{P-2D} приводит к тому, что условие 4 теоремы 1.3 не выполняется. Таким образом, система (2.7) примера 2.2 из [1] не обладает нужными свойствами, и задача о снижении числа ферментов в [1] остается не решенной.

Тем не менее число ферментов n может быть уменьшено до 3. Ниже приводится соответствующий пример систем (1), (2), для которых имеет место описанное выше поведение, решающий задачу Смейла.

Рассмотрим систему (1) вида

$$\frac{dx}{dt} = Px + qf(s), \quad s = r^*x, \tag{3}$$

и соответственно систему (2) вида

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= Px^{(1)} + qf(r^*x^{(1)}) + D(x^{(2)} - x^{(1)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= Px^{(2)} + qf(r^*x^{(2)}) + D(x^{(1)} - x^{(2)}), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$P = \begin{Vmatrix} -a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad D = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2b & -2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad q = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad r = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Будем предполагать, что $a > 1$. Отметим, что, как и требуется, матрица D подобна положительной диагональной матрице. Положим

$$M = \min_{0 \le z \le a+1} [(az-1)^2 + z(1-z)^2]. \tag{6}$$

Считаем, что f принадлежит C^1 и является ограниченной функцией, причем $f(0) = 0$. Кроме того, пусть для всех $s \neq 0$ и некоторого μ_0 выполнено соотношение

$$0 < \frac{f(s)}{s} < \mu_0, \tag{7}$$

а также

$$0 < 4(a+1) - \frac{b-a+3}{a+1} < f'(0) < \mu_0 < \frac{4M}{(a-1)(a+3)}. \tag{8}$$

Будем также предполагать, что $\lim\limits_{|s|\to\infty} sf(s) = +\infty$.

Покажем, что для систем (3), (4) с матрицами (5) выполнены заключения теоремы 1.3 из [1]. Из (5) имеем

$$W_p(\lambda) = \frac{1-\lambda}{\Delta_P(\lambda)}, \quad W_{P-2D}(\lambda) = \frac{-\lambda}{\Delta_{P-2D}(\lambda)}, \tag{9}$$

где $\Delta_P = \det(\lambda I - P) = \lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda + 1$, $\Delta_{P-2D} = \det(\lambda I - P + 2D) = \lambda^3 + 2(a+1)\lambda^2 + 4(a+1)\lambda + 2(b-a+3)$. Матрица P гурвицева, так как $a > 1$. Матрица $P - 2D$ также гурвицева, поскольку для $\Delta_{P-2D}(\lambda)$ условия Гурвица $0 < 2(b-a+3) < 8(a+1)^2$ выполняются в силу первого из цепочки неравенств (8). Из невырожденности передаточных функций (d) легко следуют все необходимые свойства [1] матриц P, $P-2D$, q, r.

Проверим условия 1, 2а, 2б, 2в, 3, 4 теоремы 1.3 из [1].

1. Воспользовавшись (9), запишем соотношение (1.17) из [1] в виде

$$\pi_1(\omega) = 1 + \mu_0 \operatorname{Re} W_P(i\omega) = 1 + \frac{\mu_0[\omega^4 - (a+1)\omega^2 + 1]}{(a\omega^2 - 1)^2 + \omega^2(1-\omega^2)^2} > 0. \tag{10}$$

Справедливость этого неравенства не очевидна лишь для тех $z=\omega^2$, которые расположены в области $\Omega=\{z: z^2-(a+1)z+1\le 0\}\subset[0,a+1]$. Для таких z левая часть (10) может быть оценена так:

$$\pi_1(\omega)\ge 1-\frac{\mu_0\max\limits_{\Omega}|z^2-(a+1)z+1|}{\min\limits_{[0,a+1]}(az-1)^2+z(1-z)^2]}\ge 1-\frac{\mu_0}{M}(a-1)(a+3)>0.$$

Это неравенство выполнено в силу последнего соотношения в цепочке неравенств (8).

2а. Поскольку $f(s)$ — ограниченная функция, то (1.18) из [1] будет выполнено при $k_1=0$, $k_2>0$, причем k_2 можно взять сколь угодно малым за счет увеличения ρ. Предельное соотношение (1.19) из [1] в данном случае таково:

$$\lim_{|s|\to\infty}(k_2sf(s)-f^2(s))=+\infty.$$

Оно действительно выполняется, ибо по предположению $sf(s)\to+\infty$, а второе слагаемое ограничено.

2б. Выше показано, что $P-2D$ — гурвицева матрица, поэтому, положив $k=k_1=0$, получаем, что $P-2D+kqr^*$ также гурвицева.

2в. Соотношение (1.20) из [1] записывается в рассматриваемом случае в виде одного неравенства

$$\pi_2(\omega)=1+k_2\operatorname{Re}W_{P-2D}(i\omega)>0\quad\forall\omega\in\mathbb{R}^1.$$

Согласно тому, что $W_{P-2D}(i\omega)$ — ограниченная функция, при достаточно малом k_2 это неравенство будет выполнено.

3. Характеристический полином матрицы $P-2D+f'(0)qr^*$ имеет вид $\lambda^3+2(a+1)\lambda^2+[4(a+1)-f'(0)]\lambda+2(b-a+3)$. Условия Гурвица $(a+1)[4(a+1)-f'(0)]>b-a+3$ для этого полинома нарушаются в силу (8), и, следовательно, у него найдется по крайней мере один корень справа от мнимой оси.

4. Из (9) находим $W_p(0)=1$, $W_{P-2D}(0)=0$. В то же время $(-1/M_0)<0$, а значит, все неравенства в условии 4 теоремы 1.3 из [1] имеют место.

Таким образом, в силу теоремы 1.3 из [1] системы (3), (4) с матрицами (5) обладают поведением, описанным выше для систем (1), (2).

Авторы признательны А. Погромскому, обнаружившему указанную ошибку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Томберг Э. А., Якубович В. А.* Условия автоколебаний в нелинейных системах // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 180–194.
2. *Смейл С.* Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнения Тьюринга // Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

Статья поступила 21 октября 1998 г.

г. Санкт-Петербург