Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 514

ПАРКЕТЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

Ю. Г. Никоноров

Аннотация: В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ для параллелепипеда $A = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$ рассматривается вопрос о существовании паркета из элементов, изометричных параллелепипеду $P = [0, p_1] \times [0, p_2] \times \dots \times [0, p_n]$. Задача полностью решена в двух частных случаях: когда P имеет вид $P = [0, p] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ и когда $n = 2$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой два параллелепипеда

$$A = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n], \quad P = [0, p_1] \times [0, p_2] \times \dots \times [0, p_n]$$

с натуральными a_i и p_i, $1 \leq i \leq n$. Будем говорить, что для параллелепипеда A *существует паркет из элементов типа* P, если A может быть представлен в виде конечного объединения $A = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_s$ параллелепипедов P_i, изометричных параллелепипеду P, с попарно не пересекающимися внутренностями. Нетрудно показать, что для подобного разбиения A все P_i имеют вершины в целочисленных точках и их ребра параллельны ребрам параллелепипеда A.

Можно рассмотреть задачу о нахождении всех A, допускающих паркет из элементов типа P.

Мы решим эту задачу в двух частных случаях: когда P имеет вид

$$P = [0, p] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1],$$

т. е. длины его ребер во всех измерениях, кроме, быть может, одного, равны 1, и когда $n = 2$.

Отметим, что при $n = 1$ все очевидно, хотя формально этот случай можно рассматривать как частный случай любого из двух вышеуказанных.

Теорема 1. *Параллелепипед* $A = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$ *допускает паркет из элементов типа*

$$P = [0, p] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$$

тогда и только тогда, когда одно из чисел a_i *делится нацело на* p.

Доказательство. Достаточность приведенного условия очевидна. Надо лишь рассмотреть элементы типа P, у которых наибольшие ребра параллельны ребру a_i.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–01–00436, 99–01–00543) и гранта С.-Петербург. ун-та (код проекта 97–0–1.3–63).

Докажем необходимость сформулированного в теореме условия. Для каждого $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ рассмотрим множество B_j, состоящее из целочисленных векторов $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ таких, что $1 \le b_i \le a_i$ для всех i и, кроме того, $b_1 + b_2 + \dots + b_n \equiv j (\operatorname{mod} p)$. Каждому такому набору сопоставим куб Q с ребрами единичной длины, параллельными ребрам A, и центром в точке $(b_1 - 1/2, b_2 - 1/2, \dots, b_n - 1/2)$. Объединение таких кубов совпадает с параллелепипедом A.

Если теперь рассмотреть некоторый элемент паркета P_k, то он является объединением p кубов указанного вида, причем ортогональные проекции их центров на оси координат будут одинаковы для всех осей, кроме одной, проекции же на эту особую ось (параллельную ребру длины p параллелепипеда P_k) будут образовывать множество точек на прямой, изометричное множеству $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Поэтому векторы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$, соответствующие этим кубам, обязательно принадлежат различным множествам B_j. Таким образом, если A допускает паркет из элементов типа P, то множества $B_0, B_1, \dots, B_{p-1}$ должны быть равномощны. Теперь достаточно вывести из равномощности множеств B_j утверждение о том, что для некоторого i число a_i делится на p. Это мы сделаем в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $\phi(j)$, $1 \le j \le p-1$, — количество решений сравнения $b_1 + b_2 + \dots + b_n \equiv j \ (\operatorname{mod} p)$, где b_i — целые числа, удовлетворяющие условиям $1 \le b_i \le a_i$. Тогда для выполнения равенства $\phi(0) = \phi(1) = \dots = \phi(p-1)$ необходимо и достаточно, чтобы одно из чисел a_i делилось на p.*

Доказательство. Если делится a_i на p, то для фиксированных b_k $(k \ne i)$ и различных b_i мы получим равное для всех $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ количество решений сравнений $b_1 + b_2 + \dots + b_n \equiv j (\operatorname{mod} p)$, тем самым достаточность доказана.

Докажем необходимость сформулированного условия. Для каждого m, $1 \le m \le n$, рассмотрим многочлен $S_m(z) = z + z^2 + \dots + z^{a_m}$. Отметим, что $(1-z)S_m(z) = z - z^{a_m+1} = z(1 - z^{a_m})$. Рассмотрим теперь произведение всех таких многочленов при различных m: $T(z) = S_1(z)S_2(z)\dots S_n(z)$. После приведения многочлена $T(z)$ к стандартному виду коэффициент C_s при степени z^s в точности равняется количеству решений уравнения $b_1 + b_2 + \dots + b_n = s$ при $1 \le b_i \le a_i$. Перепишем многочлен $T(z)$ специальным образом, объединяя одночлены со степенями, сравнимыми по $\operatorname{mod} p$:

$$T(z) = \left(A_0^0 z^0 + A_0^1 z^p + \dots + A_0^r z^{pr}\right) z^0$$
$$+ \left(A_1^0 z^0 + A_1^1 z^p + \dots + A_1^r z^{pr}\right) z^1 + \dots + \left(A_{p-1}^0 z^0 + A_{p-1}^1 z^p + \dots + A_{p-1}^r z^{pr}\right) z^{p-1},$$

где $r = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Очевидно, что некоторые из A_i^j равны 0.

Заметим, что для $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$

$$A_j^0 + A_j^1 + \dots + A_j^r = \phi(j)$$

— количество решений сравнения $b_1 + b_2 + \dots + b_n \equiv j (\operatorname{mod} p)$ при $1 \le b_i \le a_i$. Теперь рассмотрим равенство

$$(1-z)^n T(z) = z^n (1 - z^{a_1})(1 - z^{a_2}) \dots (1 - z^{a_n}),$$

получающееся путем перемножения равенств

$$(1-z)S_m(z) = z - z^{a_m+1} = z(1 - z^{a_m}).$$

Пусть $\alpha = e^{2\pi i/p}$. Тогда $\alpha^{ps} = 1$ для любого натурального s и для всех $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ получаем

$$A_j^0\alpha^0 + A_j^1\alpha^1 + \cdots + A_j^r\alpha^{pr} = A_j^0 + A_j^1 + \cdots + A_j^r = \phi(j).$$

Следовательно,

$$T(\alpha) = \phi(0)\alpha^0 + \phi(1)\alpha^1 + \cdots + \phi(p-1)\alpha^{p-1}.$$

Если же все $\phi(j)$ равны между собой, т. е. $\phi(0) = \phi(1) = \cdots = \phi(p-1) = L$, то $T(\alpha) = L(1 + \alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{p-1})$ и

$$(1-\alpha)^n T(\alpha) = L(1-\alpha)^{n-1}(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{p-1}) = L(1-\alpha)^{n-1}(1-\alpha^p) = 0.$$

Но тогда и

$$\alpha^n(1-\alpha^{a_1})(1-\alpha^{a_2})\ldots(1-\alpha^{a_n}) = 0,$$

таким образом, существует i, для которого $\alpha^{a_i} = 1$, а это равносильно тому, что a_i делится нацело на p.

Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Теперь рассмотрим случай паркетов на плоскости.

Теорема 3. *Прямоугольник $A = [0, a_1] \times [0, a_2]$ допускает паркет из элементов типа $P = [0, p_1] \times [0, p_2]$ только в одном из двух случаев:*

1) *существует перестановка σ пары $(1, 2)$ такая, что $a_{\sigma(1)}$ делится на p_1 и $a_{\sigma(2)}$ делится на p_2;*

2) *существует перестановка σ пары $(1, 2)$ такая, что $a_{\sigma(1)}$ делится на p_1 и на p_2, а $a_{\sigma(2)} = cp_1 + dp_2$, где c и d — неотрицательные целые числа.*

Доказательство. Достаточность в первом случае очевидна, во втором — можно разделить прямоугольник A на два со сторонами cp_1, dp_2 по $a_{\sigma(2)}$-й координате и свести тем самым все к первому случаю.

Покажем необходимость условий теоремы. Рассмотрим сначала взаимно простые числа p_1 и p_2. Очевидно, что если A допускает паркет из элементов типа P, то A допускает также паркет из элементов типа $P_1 = [0, p_1] \times [0, 1]$ и типа $P_2 = [0, p_2] \times [0, 1]$. Следовательно, по теореме 1 одно из чисел a_i должно делиться на p_1 и одно из чисел a_i должно делиться на p_2. Если на p_1 и p_2 делятся различные a_i, то как раз получаем первый случай теоремы. Если же на p_1 и p_2 делится одно и то же число a_i, то достаточно доказать существование неотрицательных целых чисел c и d таких, что $a_j = cp_1 + dp_2$, $j \neq i$. Рассмотрим разбиение A на элементы типа P. Проведем параллельную a_j прямую l, пересекающую A и не проходящую через целочисленные точки. Прямая l пересекается с A по отрезку длины a_j, при этом пересекает несколько элементов паркета P_k по отрезкам длины либо p_1, либо p_2. Достаточно в качестве c взять количество отрезков первого типа, а в качестве d — второго. Для взаимно простых p_1 и p_2 необходимость обоснована.

Пусть теперь u — наибольший общий делитель p_1 и p_2. Тогда $p_1 = u\tilde{p}_1$ и $p_2 = u\tilde{p}_2$. Таким образом, A допускает паркет из элементов типа $P_* = [0, u] \times [0, u]$. Значит, a_1 и a_2 делятся на u, $a_1 = u\tilde{a}_1$ и $a_2 = u\tilde{a}_2$. Из существования паркета для A из элементов типа P следует существование паркета для $\widetilde{A}$ из элементов типа $\widetilde{P} = [0, \tilde{p}_1] \times [0, \tilde{p}_2]$ (достаточно масштабного уменьшения в u раз). Так как $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ взаимно просты, по доказанному ранее должен выполняться один из двух случаев.

1. Существует перестановка σ такая, что $\tilde{a}_{\sigma(1)}$ делится на $\tilde{p}_1$, $\tilde{a}_{\sigma(2)}$ делится на $\tilde{p}_2$. Это означает, что $a_{\sigma(1)} = u\tilde{a}_{\sigma(1)}$ делится на $p_1 = u\tilde{p}_1$ и $a_{\sigma(2)} = u\tilde{a}_{\sigma(2)}$ делится на $p_2 = u\tilde{p}_2$.

2. Существует перестановка σ такая, что $\tilde{a}_{\sigma(1)}$ делится на $\tilde{p}_1$ и на $\tilde{p}_2$, а $\tilde{a}_{\sigma(2)} = c\tilde{p}_1 + d\tilde{p}_2$ для неотрицательных целых c, d. Тогда $a_{\sigma(1)} = u\tilde{a}_{\sigma(1)}$ делится на $p_1 = up_1$ и на $p_2 = u\tilde{p}_2$ и $a_{\sigma(2)} = cp_1 + dp_2$.

Таким образом, необходимость условия теоремы 3 установлена.

Было бы интересно найти критерий существования паркета из элементов некоторого типа P для параллелепипеда A произвольной размерности.

Статья поступила 11 января 1999 г.

г. Рубцовск Алтайского края
Рубцовский индустриальный институт, ул. Тракторная, 2/6, 658207 Рубцовск
rub_in@rub-gus.altai.su