Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 515.12

О e–КОМПАКТИФИКАЦИЯХ И e–КОМПАКТИФИЦИРУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

К. В. Матюшичев

Аннотация: Дается внутренняя характеристика e-компактифицируемых пространств, строится частично упорядоченное множество полурегулярных e-компактификаций данного пространства. Рассматриваются также e-компактификации вполне регулярных пространств. Библиогр. 8.

Введение

В работе рассматриваются только хаусдорфовы пространства. Пусть Y — расширение X. Пространство Y называется *e-компактификацией* X, если из любого открытого покрытия Y можно выделить конечное подсемейство, покрывающее X. Пространства, обладающие e-компактификациями, называются *e-компактифицируемыми* (см.,например, [1]; в другой терминологии подобные пространства рассматривались в [2, 3]). e-Компактифицируемые пространства занимают промежуточное положение между регулярными и вполне регулярными пространствами. *Сильная регулярность* X в Y, определенная в [2], допускает такое определение (см. [3]): X *сильно регулярно в* Y, если для любой точки $y \in Y$ пространство $X \cup \{y\}$ регулярно. Известно (см. [1]), что Y — e-компактификация X в том и только в том случае, если Y H-замкнуто и X сильно регулярно в Y. Таким образом, e-компактифицируемые пространства регулярны, но обратное неверно. Так, можно показать, что регулярные не вполне регулярные пространства, приведенные в книге [4], не e-компактифицируемы. Всякое вполне регулярное пространство, очевидно, e-компактифицируемо, но обратное неверно. Примером служит совершенный прообраз вполне регулярного пространства, который не вполне регулярен (см. [5]); e-компактифицируемость при совершенных отображениях переходит к прообразу (см. [1]). В настоящей работе дана внутренняя характеристика e-компактифицируемых пространств как таких регулярных пространств, в которых существует дискретное полное семейство свободных регулярных H-систем (теорема 2). Рассматриваемая при этом связь между гиперабсолютом e-компактифицируемого пространства и его e-компактификациями позволяет получить описание всех полурегулярных e-компактификаций как фактор-множеств гиперабсолюта по e-разбиениям с топологией малых образов В. В. Федорчука (теорема 1). На множестве всех полурегулярных e-компактификаций вводится частичный порядок, который приводит к рассмотрению наибольшей e-компактификации, определенной другим способом в [1]. В [3] была определена *s-полная регулярность* X в Y: X *s-вполне регулярно в* Y, если для любой точки $y \in Y$ пространство $X \cup \{y\}$ вполне регулярно. В настоящей работе показано, что вполне регулярные пространства, для которых наибольшая e-компактификация совпадает с расширением Стоуна — Чеха, совпадают с пространствами, s-вполне регулярными в любой своей e-компактификации (теорема 3). Последний результат позволяет упростить рассуждения Харта и Вермеера из [1], где они приводят пример вполне регулярного пространства, наибольшая e-компактификация и расширение Стоуна — Чеха которого не совпадают друг с другом (см. § 3, пример).

§ 1. Критерий e-компактифицируемости. Построение всех e-компактификаций

Система $\eta = \{U\}$ открытых множеств пространства X называется *регулярной*, если для любого $U_1 \in \eta$ найдется $U_2 \in \eta$ такое, что $[U_2] \subset U_1$. Аналогично система $\xi = \{A\}$ замкнутых множеств называется *регулярной*, если для любого $A_1 \in \xi$ найдется $A_2 \in \xi$ такое, что $A_2 \subset \langle A_1 \rangle$. Если Y — расширение X и U — открытое в X множество, то $M(U)$ будет обозначать максимальное открытое в Y множество со свойством $M(U) \cap X = U$.

Постоянно будет использоваться описание абсолюта и гиперабсолюта регулярного пространства, данное в [6]. Напомним основные определения. *H-системой* регулярного пространства X называется всякая система $\xi = \{A\}$ непустых канонических замкнутых множеств пространства X, направленная по включению. Максимальные H-системы называются *H-концами*. *Гиперабсолют* регулярного пространства X, обозначаемый HX, определяется как множество всех H-концов с базой, состоящей из множеств $O_A = \{p \in HX : A \in p\}$. В HX выделяется подпространство hX, называемое *абсолютом* регулярного пространства X, состоящее из H-концов с непустым пересечением. Определяется естественное отображение $\pi_X : hX \to X$ по правилу $\pi(p) = x$, если $\{x\} = \cap\{A : A \in p\}$. Доказывается, что HX — индуктивно нульмерный компакт, π_X неприводимо и совершенно. Также постоянно будут использоваться свойства H-концов, приведенные в [6].

1. Пусть Y — e-компактификация регулярного пространства X. H-конец $p = \{A\}$ пространства X порождает центрированную систему открытых в Y множеств $\{M(\langle A \rangle) : A \in p\}$. Так как Y H-замкнуто, то $\cap\{[M(\langle A \rangle)]_Y : A \in p\} \neq \varnothing$. Последнее пересечение не может содержать более одной точки, ибо $y \in \cap\{[M(\langle A \rangle)]_Y : A \in p\}$ в том и только в том случае, если $p \supset \{[Oy \cap X]_X : Oy$ — окрестность y в $Y\}$. Эту единственную точку мы ставим в соответствие H-концу p. Естественное отображение $\pi_Y : HX \to Y$ определяется, таким образом, по правилу: $\pi_Y(p) = y$ тогда и только тогда, когда $p \supset \{[Oy \cap X]_X : Oy$ — окрестность y в $Y\}$. Легко видеть, что естественное отображение $\pi_Y : HX \to Y$ является отображением «на», θ-непрерывно, компактно и замкнуто как θ-непрерывное отображение компакта [7]. Отображение π_Y неприводимо, так как $\pi_Y^{\#}(O_A) = M(\langle A \rangle)$, где $O_A = \{p \in HX : A \in p\}$. На абсолюте hX отображение π_Y совпадает с естественным отображением $\pi_X : hX \to X$. Естественное отображение $\pi_Y : HX \to Y$ порождает разбиение $\left\{\pi_Y^{-1}(y) : y \in Y\right\}$ гиперабсолюта HX на компакты, содержащее в себе разбиение $\left\{\pi_X^{-1}(x) : x \in X\right\}$ абсолюта hX пространства X. В дальнейшем всякое разбиение HX на компакты, являющееся объединением разбиения $\left\{\pi_X^{-1}(x) : x \in X\right\}$ абсолюта hX и разбиения $HX \setminus hX$ на какие-нибудь непустые компакты, назовем *естественным*.

2. Пусть X — регулярное пространство, R — естественное разбиение HX на компакты, HX/R — соответствующее фактор-множество и $\pi : HX \to HX/R$ — естественная проекция. Следуя В. В. Федорчуку [7], введем на фактор-множестве HX/R топологию, открытую базу которой составляют все множества вида $\pi^{\#}(U)$, где U открыто в HX. Семейство $\{\pi^{\#}(O_A)\}$, где A — произвольное непустое каноническое замкнутое подмножество X, также является базой введенной выше топологии. Из предложений, доказанных в [7], легко следует, что пространство HX/R хаусдорфово, полурегулярно и H-замкнуто, а проекция π является θ-непрерывным неприводимым замкнутым компактным отображением. При этом подпространство $\pi(hX)$ пространства HX/R всюду плотно в нем и гомеоморфно X, так как биекция g, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} hX \arrow[rr, "\pi|_{hX}"] \arrow[dr, "\pi_X"'] & & \pi(hX) \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd},$$

переводит $\{\pi|_{hX}^{\#}(O_A \cap hX)\}$, базу в $\pi(hX)$, в $\{\langle A\rangle\}$, базу в X, т. е.

$$g\bigl(\pi|_{hX}^{\#}(O_A \cap hX)\bigr) = \langle A\rangle,$$

где A — произвольное непустое каноническое замкнутое подмножество пространства X.

Таким образом, всякое естественное разбиение HX порождает H-замкнутое полурегулярное расширение HX/R пространства X. В следующем пункте будет показано, какое условие надо наложить на естественное разбиение HX, чтобы пространство HX/R было e-компактификацией пространства X, и доказано, что так может быть получена любая полурегулярная e-компактификация e-компактифицируемого пространства.

3. Пусть X — регулярное пространство.

Определение. Непустой компакт $y \subset HX$ назовем *e-компактом*, если $\cap\{p : p \in y\}$ — регулярная в X система. Естественное разбиение гиперабсолюта HX на компакты назовем *e-разбиением*, если оно состоит из e-компактов.

Предложение 1. *Пусть регулярное пространство X таково, что существует e-разбиение R гиперабсолюта HX. Тогда X e-компактифицируемо и HX/R является его полурегулярной e-компактификацией.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\pi(hX)$, отождествляемое с X (см. п. 2), сильно регулярно в HX/R. Пусть $y \in HX/R$. Имеем $y \in \pi^{\#}(O_A) \Leftrightarrow y \subset O_A \Leftrightarrow A \in \cap\{p : p \in y\}$ (здесь A — произвольное непустое каноническое замкнутое подмножество X). Таким образом, $\{\pi^{\#}(O_A) : A \in \cap\{p : p \in y\}\}$ — база окрестностей точки y в HX/R. Регулярность пространства $\{y\} \cup \pi(hX)$ следует теперь из регулярности системы $\{\pi^{\#}(O_A) \cap \pi(hX) : A \in \cap\{p : p \in y\}\}$ открытых множеств пространства $\pi(hX)$. Регулярность последней системы устанавливается с помощью гомеоморфизма $g : \pi(hX) \to X$ (см. п. 2) следующим образом: так как $\pi^{\#}(O_A) \cap \pi(hX) = \pi|_{hX}^{\#}(O_A \cap hX)$ и $g\bigl(\pi|_{hX}^{\#}(O_A \cap hX)\bigr) = \langle A\rangle$ (см. п. 2), то система $\{\pi^{\#}(O_A) \cap \pi(hX) : A \in \cap\{p : p \in y\}\}$ регулярна в $\pi(hX)$ тогда и только тогда, когда система $\{\langle A\rangle : A \in \cap\{p : p \in y\}\}$ регулярна в X, т. е. когда $\cap\{p : p \in y\}$ — регулярная система, что верно, ибо y — e-компакт. Итак, подпространство $\{y\} \cup \pi(hX)$ пространства HX/R регулярно для любой точки $y \in HX/R$, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 2. *Если Y — полурегулярная e-компактификация пространства X, то Y гомеоморфно пространству HX/R, где $R = \{\pi_Y^{-1}(y) : y \in Y\}$ — e-разбиение (здесь $\pi_Y : HX \to Y$ — естественное отображение, см. п. 1).*

Доказательство. Установим сначала, что R — e-разбиение. Для этого достаточно показать, что для любой точки $y \in Y$ выполняется равенство $\cap\{p : p \in \pi_Y^{-1}(y)\} = \{[Oy \cap X]_X : Oy$ — окрестность y в $Y\}$. Включение $\supset$ следует из определения отображения π_Y. Докажем обратное включение. Пусть $A \in \cap\{p : p \in \pi_Y^{-1}(y)\}$. Тогда $O_A \supset \pi_Y^{-1}(y) = \cap\{O_{[Oy\cap X]_X} : Oy$ — окрестность y в $Y\}$. Так как множества O_A открыто-замкнуты (см. [6]), найдется такая окрестность Oy точки y, что $O_A \supset O_{[Oy\cap X]_X}$, откуда $A \supset [Oy \cap X]_X$ и $\langle A\rangle \supset Oy \cap X$. Следовательно, $Oy \subset M(\langle A\rangle)$ и $M(\langle A\rangle)$ является окрестностью точки y, т. е. $A = [\langle A\rangle]_X = [M(\langle A\rangle) \cap X]_X \in \{[Oy \cap X]_X : Oy$ — окрестность y в $Y\}$.

Докажем теперь, что Y и HX/R гомеоморфны. Пусть α — биекция, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} HX \arrow[r, "\pi|_Y"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ & HX/R \end{tikzcd} .$$

Поскольку $\pi = \alpha \circ \pi_Y$, имеем

$$\pi^{\#} = \alpha \circ \pi_Y^{\#}, \quad \pi^{\#}(O_A) = \alpha\big(\pi_Y^{\#}(O_A)\big) = \alpha(M(\langle A\rangle))$$

(см. п. 1). Отображение α переводит, таким образом, систему $\{M(\langle A\rangle)\}$, являющуюся базой пространства Y в силу его полурегулярности, в базу $\{\pi^{\#}(O_A)\}$ пространства HX/R (здесь A, как всегда, произвольное непустое каноническое замкнутое множество пространства X), т. е. является гомеоморфизмом между Y и HX/R. □

Из предложений 1 и 2 следует

Теорема 1. *Все полурегулярные e-компактификации e-компактифицируемого пространства X исчерпываются пространствами HX/R, где R — произвольное e-разбиение гиперабсолюта HX.* □

Замечание 1. В [3] показано, что для описания всех e-компактификаций достаточно найти все полурегулярные e-компактификации.

4. Пусть X — регулярное пространство. H-систему ξ непустых канонических замкнутых подмножеств пространства X будем называть *свободной*, если $\cap\{A : A \in \xi\} = \varnothing$. Семейство $\Xi = \{\xi\}$ свободных регулярных H-систем назовем *дискретным*, если для любых $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ найдутся $A_1 \in \xi_1$, $A_2 \in \xi_2$ такие, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, и *полным*, если для любого свободного H-конца $p \in HX$ найдется $\xi \in \Xi$ такая, что $\xi \subset p$.

Теорема 2. *Регулярное пространство e-компактифицируемо в том и только в том случае, если в нем существует дискретное полное семейство свободных регулярных H-систем.*

Лемма. *Если $z \subset HX$ — компакт, то $z = \cap\{O_A : A \in \cap\{p : p \in z\}\}$.*

Доказательство. Включение $\subset$ очевидно. Пусть теперь $p_0 \in \cap\{O_A : A \in \cap\{p : p \in z\}\}$. Тогда $p_0 \supset \cap\{p : p \in z\}$. Если $p_0 \notin z$, то найдется $A_0 \in p_0$ такое, что $O_{A_0} \cap z = \varnothing$. Тогда $A_0 \notin p$ для любого $p \in z$, откуда (см. [6])

$[X\setminus A_0]_X \in p$, т. е. $[X\setminus A_0]_X \in \cap\{p : p\in z\} \subset p_0$. Но H-конец p_0 не может содержать одновременно A_0 и $[X\setminus A_0]_X$. Полученное противоречие доказывает включение $\supset$. $\square$

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть регулярное пространство X обладает e-компактификацией Y. Тогда (см. п. 3) разность $HX\setminus hX$ можно представить в виде дизъюнктной суммы e-компактов: $HX\setminus hX = \cup\{\pi_Y^{-1}(y) : y\in Y\setminus X\}$. Докажем, что семейство $\big\{\cap\{p : p\in\pi_Y^{-1}(y)\} : y\in Y\setminus X\big\}$ и является дискретным полным семейством свободных регулярных H-систем. Это вытекает из следующих утверждений.

1. Если z — непустой e-компакт в HX, то $\cap\{p : p\in z\}$ — регулярная H-система. Очевидно.

2. Если z — непустой e-компакт в HX и $z\cap hX=\varnothing$, то $\cap\{p : p\in z\}$ — свободная H-система. Действительно, если $x\in\cap\{A : A\in\cap\{p : p\in z\}\}$, то $x\in\cap\{\langle A\rangle : A\in\cap\{p : p\in z\}\}$ в силу регулярности $\cap\{p : p\in z\}$. Учитывая, что каноническое замкнутое множество A принадлежит H-концу p в том и только в том случае, если $B\cap\langle A\rangle\neq\varnothing$ для любого $B\in p$ (см. [6]), имеем $\cap\{p : p\in z\}\subset p_x$, где p_x — произвольный H-конец такой, что $p_x\in\pi_X^{-1}(x)$, откуда $\pi_X^{-1}(x)\subset z = \cap\{O_A : A\in\cap\{p : p\in z\}\}$; противоречие с условием $z\cap hX=\varnothing$.

3. Если z_1 и z_2 — непустые e-компакты в HX с пустым пересечением, то найдутся $A_1\in\cap\{p : p\in z_1\}$ и $A_2\in\cap\{p : p\in z_2\}$ с пустым пересечением. Действительно, если $A_1\cap A_2\neq\varnothing$ для любых $A_1\in\cap\{p : p\in z_1\}$ и $A_2\in\cap\{p : p\in z_2\}$, то и $\langle A_1\rangle\cap\langle A_2\rangle\neq\varnothing$, так как $\cap\{p : p\in z_1\}$ и $\cap\{p : p\in z_2\}$ — регулярные системы. Но тогда

$$\big\{\big[\langle A_1^1\rangle\cap\dots\cap\langle A_1^m\rangle\cap\langle A_2^1\rangle\cap\dots\cap\langle A_2^n\rangle\big] \\ : A_1^1,\dots,A_1^m\in\cap\{p : p\in z_1\}, A_2^1,\dots,A_2^n\in\cap\{p : p\in z_2\}\big\}$$

— H-система, дополнив которую до H-конца p_0, имеем $p_0\supset\cap\{p : p\in z_1\}$ и $p_0\supset\cap\{p : p\in z_0\}$, откуда $p_0\in z_1=\cap\{O_A : A\in\cap\{p ; p\in z_1\}\}$ и $p_0\in z_2=\cap\{O_A : A\in\{p : p\in z_2\}\}$, т. е. $z_1\cap z_2\neq\varnothing$. Противоречие.

4. Семейство $\{\cap\{p : p\in\pi_Y^{-1}(y)\} : y\in Y\setminus X\}$ полно. Очевидно.

Достаточность. Пусть регулярное пространство таково, что в нем существует дискретное полное семейство свободных регулярных H-систем $\Xi=\{\xi\}$. Докажем, что семейство $\{\cap\{O_A : A\in\xi\} : \xi\in\Xi\}$ компактов из HX представляет собой разбиение $HX\setminus hX$ на e-компакты, откуда (см. п. 3) следует e-компактифицируемость пространства X.

Доказательство состоит из следующих пунктов.

1. Если ξ — регулярная H-система, то $z=\cap\{O_A : A\in\xi\}$ — e-компакт. По лемме $z=\cap\{O_A : A\in\cap\{p : p\in z\}\}$, значит, $\xi\subset\cap\{p : p\in z\}$. Пусть $A_0\in\cap\{p : p\in z\}$. Тогда $\cap\{O_A : A\in\xi\}=z\subset O_{A_0}$ и найдутся множества $A_1,\dots,A_n\in\xi$ такие, что $O_{A_1}\cap\dots\cap O_{A_n}=O_{[\langle A_1\rangle\cap\dots\cap\langle A_n\rangle]}\subset O_{A_0}$, откуда $[\langle A_1\rangle\cap\dots\cap\langle A_n\rangle]\subset A_0$ и $\langle A_1\rangle\cap\dots\cap\langle A_n\rangle\subset\langle A_0\rangle$. В силу регулярности ξ найдутся $B_1,\dots,B_n\in\xi\subset\cap\{p : p\in z\}$ такие, что $B_i\subset\langle A_i\rangle, i=1,\dots,n$, тем самым $B_1\cap\dots\cap B_n\subset\langle A_0\rangle$ и, следовательно, $[\langle B_1\rangle\cap\dots\cap\langle B_n\rangle]\subset\langle A_0\rangle$. Так как $B_1,\dots,B_n\in\cap\{p : p\in z\}$, то и $[\langle B_1\rangle\cap\dots\cap\langle B_n\rangle]\in\cap\{p : p\in z\}$ (см. [6]), т. е. для любого $A_0\in\cap\{p : p\in z\}$ найдется $B_0=[\langle B_1\rangle\cap\dots\cap\langle B_n\rangle]\in\cap\{p : p\in z\}$ такой, что $B_0\subset\langle A_0\rangle$. Итак, z — e-компакт.

2. Для различных элементов ξ_1 и ξ_2 семейства Ξ компакты $\cap\{O_A : A\in\xi_1\}$ и $\cap\{O_A : A\in\xi_2\}$ дизъюнктны в силу дискретности Ξ.

3. Для любого элемента $\xi \in \Xi$ компакт $\cap\{O_A : A \in \xi\}$ лежит в $HX \setminus hX$. Если найдется $x \in X$ такой, что $\pi_X(p) = x$ и $p \in \cap\{O_A : A \in \xi\}$, то $\xi \subset p$ и $x \in \cap\{A : A \in p\} \subset \cap\{A : A \in \xi\}$, что невозможно, ибо ξ — свободная H-система.

4. $\cup\{\cap\{O_A : A \in \xi\} : \xi \in \Xi\} = HX \setminus hX$, так как семейство Ξ полно. $\square$

Замечание 2. В [1] отмечалось, что всякое некомпактное регулярное пространство, не имеющее отличных от него регулярных расширений, не e-компактифицируемо. Легко видеть, что для таких пространств невозможно удовлетворить требованию полноты: в $HX \setminus hX$ непустых e-компактов не содержится. В связи с этим возникает

Вопрос 1. Существует ли регулярное пространство, обладающее полным семейством свободных регулярных H-систем, но не e-компактифицируемое?

§ 2. Частично упорядоченное множество полурегулярных e-компактификаций e-компактифицируемого пространства

В этом параграфе под e-компактификацией будет пониматься полурегулярная e-компактификация.

1. Пусть e_1X и e_2X — две e-компактификации пространства X. Будем говорить, что они *связаны отношением* $\geq$: $e_1X \geq e_2X$, если существует θ-непрерывное отображение $\varphi : e_1X \to e_2X$, тождественное на X. В предложении 4 будет показано, что φ обязательно отображение «на».

Предложение 3. *Пусть f_1 и f_2 — два θ-непрерывных отображения пространства A в пространство B, A_1 — всюду плотное подмножество A, B_1 — всюду плотное подмножество B, сильно регулярное в B. Пусть $f_1(A_1) = f_2(A_1) = B_1$ и $f_1|_{A_1} = f_2|_{A_1}$. Тогда $f_1 = f_2$.*

Доказательство. Предположим, что $f_1 \neq f_2$, и пусть точка $a \in A$ такова, что $f_1(a) = b_1 \neq b_2 = f_2(a)$. Сильная регулярность B_1 в B влечет существование таких окрестностей Ob_1 и Ob_2 точек b_1 и b_2 соответственно, что $[Ob_1 \cap B_1]_{B_1} \cap [Ob_2 \cap B_1]_{B_1} = \varnothing$. Так как f_1 и f_2 θ-непрерывны, найдется окрестность Oa точки a такая, что $f_1(Oa) \subset [Ob_1]_B$ и $f_2(Oa) \subset [Ob_2]_B$. Пусть $c \in A_1 \cap Oa$. Поскольку $f_1|_{A_1} = f_2|_{A_1}$, имеем $f_1(c) = f_2(c)$. С другой стороны, $f_1(c) \in B_1 \cap [Ob_1]_B = [Ob_1 \cap B_1]_{B_1}$ и $f_2(c) \in B_1 \cap [Ob_2]_B = [Ob_2 \cap B_1]_{B_1}$, что противоречит дизъюнктности $[Ob_1 \cap B_1]_{B_1}$ и $[Ob_2 \cap B_1]_{B_1}$. $\square$

Пусть e_1X — e-компактификация X и $f_1 : HX \to e_1X$ — естественное отображение, порождающее на HX e-разбиение $R_1 = \{f_1^{-1}(y) : y \in e_1X\}$. Аналогичные обозначения вводим для e-компактификации e_2X. Вписанность R_1 в R_2 будем обозначать так: $R_1 \geq R_2$.

Предложение 4. $e_1X \geq e_2X \Leftrightarrow R_1 \geq R_2$.

Доказательство. Пусть $e_1X \geq e_2X$, т. е. найдется θ-непрерывное отображение $\varphi : e_1X \to e_2X$, тождественное на X. Имеем

$$HX \xrightarrow{f_1} e_1X \xrightarrow{\varphi} e_2X.$$

Композиция $\varphi \circ f_1$ является θ-непрерывной, и $(\varphi \circ f_1)|_{hX} = \pi_X$. То же можно сказать о $f_2 : HX \to e_2X$. Отображения f_2 и $\varphi \circ f_1$ удовлетворяют условиям предыдущего предложения, откуда $f_2 = \varphi \circ f_1$, что влечет $R_1 \geq R_2$. Так как f_2 — отображение «на», то и φ — отображение «на».

Обратно, пусть $R_1 \geq R_2$. Определим отображение $\psi : HX/R_1 \to HX/R_2$ естественным образом: $\psi(y) = z$ тогда и только тогда, когда $y \subset z$. Обозначая через π_1 и π_2 естественные проекции HX на HX/R_1 и HX/R_2 соответственно, а через α_1 и α_2 — гомеоморфизмы между e_1X и HX/R_1, с одной стороны, через e_2X и HX/R_2 — с другой, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} e_1X \arrow[d, "\alpha_1"'] & HX \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & e_2X \arrow[d, "\alpha_2"] \\ HX/R_1 \arrow[rr, "\psi"] & & HX/R_2. \end{tikzcd}$$

Нетрудно видеть, что ψ θ-непрерывно. Это следует из легко проверяемой формулы $\psi\big(\big[\pi_1^{\#}(O_A)\big]_{HX/R_1}\big) \subset \big[\pi_2^{\#}(O_A)\big]_{HX/R_2}$. Теперь $\alpha_2^{-1} \circ \psi \circ \alpha_1 : e_1X \to e_2X$ — искомое отображение, устанавливающее отношение $e_1X \geq e_2X$. $\square$

Следствие. $e_1X \geq e_2X, e_2X \geq e_1X \Rightarrow e_1X = e_2X$. $\square$

Доказанное предложение показывает, что под частично упорядоченным множеством e-компактификаций можно понимать множество e-разбиений гиперабсолюта HX с порядком, введенным выше; это последнее частично упорядоченное множество будем обозначать через EX.

2. Справедливо следующее

Предложение 5. *Непустое пересечение e-компактов снова e-компакт.*

Доказательство аналогично п. 1 доказательства достаточности теоремы 2. $\square$

Из последнего предложения следует, что в EX имеется наибольший элемент. Он получается следующим образом. Пусть $EX = \{R_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ — множество e-разбиений гиперабсолюта. Для всякой точки $p \in HX$ под $y_\gamma(p)$ понимаем элемент R_γ, содержащий p. Определяем e-компакт $y(p) = \cap\{y_\gamma(p) : \gamma \in \Gamma\}$. Для различных точек p e-компакты $y(p)$ либо совпадают, либо не пересекаются. Очевидно, семейство $\{y(p) : p \in HX\}$ и будет наибольшим e-разбиением HX.

Замечание 3. В e-компактифицируемом пространстве для любой точки $p \in HX \backslash hX$ можно определить наименьший содержащий точку p e-компакт — пересечение всех e-компактов, содержащих p. Легко видеть, что так получающиеся e-компакты образуют разбиение $HX \backslash hX$, задавая тем самым наибольшее e-разбиение HX, в том и только в том случае, если αX — пространство регулярных концов (см. [8]) — является наибольшей e-компактификацией пространства X. Пространство X всегда сильно регулярно в αX, поэтому αX представляет собой e-компактификацию X тогда и только тогда, когда αX H-замкнуто.

Вопрос 2. Существует ли e-компактифицируемое пространство, для которого αX не является наибольшей e-компактификацией?

Наибольшую e-компактификацию пространства X будем обозначать через eX, отождествляя ее с HX/R_e, где R_e — наибольший элемент EX.

§ 3. Случай вполне регулярных пространств

Пусть Y — расширение вполне регулярного пространства X. В [3] получено описание всех полурегулярных e-компактификаций вполне регулярного пространства X, в которых X s-вполне регулярно (см. введение), как θ-совершенных неприводимых образов стоун-чеховского расширения βX. В связи с этим естественно рассматривать такие вполне регулярные пространства, которые s-вполне регулярны в любой своей e-компактификации. При этом можно ограничиться только полурегулярными e-компактификациями (см. [3]). Не всякое вполне регулярное пространство обладает этим свойством, как будет показано ниже.

Теорема 3. *Пространство X s-вполне регулярно в любой своей e-компактификации тогда и только тогда, когда eX — компакт (или, что то же, $eX = \beta X$).*

Доказательство. Пусть X s-вполне регулярно в eX. В [3] построено отображение $f : \beta X \to eX$, θ-непрерывное и тождественное на X. Так как βX — полурегулярная e-компактификация X, можно записать: $\beta X \geq eX$. С другой стороны, $eX \geq \beta X$, откуда $eX = \beta X$.

Пусть, обратно, eX — компакт и e_1X — произвольная полурегулярная e-компактификация X. Так как $eX \geq e_1X$, существует θ-непрерывное тождественное на X отображение $f : eX \xrightarrow{\text{на}} e_1X$. В [3] показано, что в этих условиях X s-вполне регулярно в e_1X. $\square$

В [1] приведен пример вполне регулярного пространства, для которого eX некомпактно. Таким образом, существуют такие вполне регулярные пространства, что не всякая их e-компактификация содержит их s-вполне регулярным образом, и пространства, для которых это так, образуют класс, отличный от всего класса вполне регулярных пространств. Пространство, приведенное в [1], является подпространством упомянутого во введении не вполне регулярного совершенного прообраза вполне регулярного пространства. Теорема 3 позволяет непосредственно усмотреть интересующее нас свойство пространства из [1], существенно упрощая тем самым рассуждение Харта и Вермеера. Напомним эту конструкцию и покажем, как можно применить теорему 3.

Пример. Положим $T = (\omega_1 + 1) \times (\omega_1 + 1) \setminus \{(\omega_1, \omega_1)\}$. Множество пар вида $(\alpha, \omega_1) \in T$ назовем левым краем T. Все пары вида $(\omega_1, \alpha) \in T$ образуют правый край T. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем пространство T^n в результате отождествления в сумме $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} T(i)$, где $T(i) = T \times \{i\}$ правого края $T(i)$ с левым краем $T(i+1)$. Пусть $\varphi_n : \bigoplus\limits_{i=1}^{n} T(i) \to T^n$ — соответствующее естественное фактор-отображение. Далее, определяем в каждом пространстве T^n открытые множества $U_k^n \subset T^n$ для $0 \leq k \leq n$:

$$U_k^n = \begin{cases} \langle\, \varphi_n(T(1))\, \rangle & (k = 0), \\ \langle\, \varphi_n(T(k) \cup T(k+1))\, \rangle & (k = 1, \ldots, n-1), \\ \langle\, \varphi_n(T(n))\, \rangle & (k = n). \end{cases}$$

Пространство $X = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} T^n$ вполне регулярно, так как каждое T^n вполне регулярно. Докажем, что пространство X обладает e-компактификацией, в которой оно не s-вполне регулярно. Определим на множестве $X \cup I$ (здесь $I = [0,1]$) топологию Хабера (см. [5]). Пространство X открыто в $X \cup I$. Для точки $x \in I$ ее база в $X \cup I$ состоит из множеств вида ($i, j \in \mathbb{N}$)

$$\bigcup_{n \geq i} \cup \big\{ U_k^n : k/n \in G_j \big\} \cup G_j,$$

где $\{G_j\}_{j=1}^{\infty}$ — база окрестностей точки x в I в обычной топологии. Пространство $X \cup I$ e-компактифицируемо. Действительно, пространство $X \cup \{w\}$, полученное отождествлением множества I в одну точку, вполне регулярно, и соответствующее фактор-отображение $f : X \cup I \to X \cup \{w\}$ совершенно. Пусть Y — произвольная e-компактификация пространства $X \cup I$. Тогда Y будет e-компактификацией и пространства X. Докажем, что X не s-вполне регулярно в Y. Рассмотрим пространство $X \cup \{0\}$. В нем точку $0 \in I$ нельзя функционально отделить от замкнутого множества, являющегося объединением правых краев пространств $T^n, n \in \mathbb{N}$, где под правым краем пространства T^n понимается образ правого края пространства $T(n)$ при отображении $\varphi_n : \bigoplus_{i=1}^{n} T(i) \to T^n$. Это следует из того (см. [5]), что для любой непрерывной функции $f : T \to \mathbb{R}$ найдется такое $\alpha_0 < \omega_1$, что $f\langle((\alpha, \omega_1))\rangle = f\langle((\omega_1, \alpha))\rangle$ для любого $\alpha > \alpha_0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hart K. P., Vermeer J.* Non-Tychonoff e-compactifiable spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89. P. 725–729.
2. *Архангельский А. В., Хамди М. М. Генеди.* Начала теории относительных топологических свойств // Общая топология. Пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 3–48.
3. *Иванов А. В.* Относительно компактные расширения вполне регулярных пространств // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. Математика. 1996. Т. 3. С. 79–87.
4. *Энгельгинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. *Chaber J.* Remarks on open-closed mappings // Fund. Math. 1972. V. 74. P. 197–208.
6. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
7. *Федорчук В. В.* Об H-замкнутых расширениях пространств θ-близости // Мат. сб. 1972. Т. 89. С. 400–418.
8. *Александров П. С.* О понятии пространства в топологии // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2. С. 5–57.

Статья поступила 24 апреля 1999 г.

г. Петрозаводск
Петрозаводский гос. университет, просп. Ленина, 33, 185640 Петрозаводск
matush@mainpgu.karelia.ru