Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 531.36:534.1

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

К. С. Матвийчук

Аннотация: Исследованы условия технической устойчивости по заданной мере систем автоматического управления с переменной структурой, предназначенных для управления нейтральным объектом. В законе управления используются значения всех производных регулируемой одномерной координаты до $(n-1)$-й производной включительно, где n — порядок дифференциального уравнения движения. Изучены такие процессы, когда все $n-1$ корней характеристического уравнения порождающей линейной системы имеют отрицательные действительные части, один корень равен нулю. Сформулированные общие критерии технической устойчивости применены к системе автоматического регулирования с переменной структурой, имеющей третий порядок. Библиогр. 29.

Обширному множеству систем с переменной структурой [1–9] принадлежит класс систем автоматического управления с переменной структурой, предназначенных для автоматического регулирования движением разнообразных комплексов механизмов и состояний динамических процессов.

В работе исследуются свойства технической устойчивости систем автоматического управления с переменной структурой, предназначенных для управления нейтральными объектами. На практике такая математическая модель применима для описания реально функционирующих систем управления с переменной структурой, в которых без ущерба динамическим состояниям регулирования можно пренебречь внешними воздействиями [1–3; 6, 7]. Сформулированы критерии технической устойчивости заданных систем на заданном ограниченном и бесконечном интервалах времени, асимптотической технической устойчивости относительно заданной меры, когда в разрывном законе управления используются значения производных одномерной регулируемой координаты включительно до порядка, меньшего лишь на единицу по сравнению с порядком заданных дифференциальных уравнений движения, а в соответствующем характеристическом уравнении один корень равен нулю, остальные корни имеют отрицательные действительные части. Предложенный на основе метода сравнения и прямого метода Ляпунова подход изучения технической устойчивости систем с разрывным управлением никак не связан с вопросом существования скользящего режима [1–4] на границе переключения.

Полученные общие критерии технической устойчивости применены к автономной системе автоматического регулирования с переменной структурой, имеющей третий порядок. Приведенные здесь исследования опираются на результаты, содержащиеся в работах [10–29].

1. Основные предположения. Рассмотрим динамические системы регулирования с переменной структурой, предназначенные для управления свободным движением линейных объектов с постоянными параметрами [1–4, 6–9]. Полагаем, что информация о состоянии процесса, поступающая в управляющее устройство системы управления такого типа, складывается из непрерывно измеряемых точных значений одномерной регулируемой координаты y (сигнал ошибки) и ее n производных. Пусть движение заданной системы управления описывается дифференциальным уравнением n-го порядка, содержащим разрывное управление, вида

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy}{dt} = -u, \tag{1.1}$$

где разрывное управление u имеет представление

$$u = \psi y, \quad \psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } ys > 0, \\ \beta & \text{при } ys < 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$s = c_1 y + c_2 \frac{dy}{dt} + c_3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \cdots + c_n \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}; \quad \alpha, \beta, a_i, c_i = \text{const}, \ c_n = 1, \tag{1.3}$$

на заданном ограниченном промежутке времени $T = [t_0, N\mu^{-1}]$, $T \subset I$, $I \equiv [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$, μ малый положительный параметр, $\mu \in (0,1)$, N — заданная положительная постоянная величина, зависящая от параметров исходной системы. Пусть движение системы (1.1)–(1.3) рассматривается при заданных начальных условиях

$$y(t_0) = x_1^0, \quad \frac{dy}{dt}(t_0) = x_2^0, \ \ldots, \ \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t_0) = x_n^0, \tag{1.4}$$

где $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ — заданный набор чисел из наперед заданного множества начальных значений Ω_0, определяемого ниже.

Считаем, что все $n-1$ корней характеристического уравнения для уравнения (1.1) при $u = 0$

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \cdots + a_2 \lambda = 0 \tag{1.5}$$

имеют отрицательные действительные части и один корень равен нулю ($\lambda = 0$).

Для проводимых ниже преобразований введем обозначения

$$y = x_1, \quad \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тогда система (1.1)–(1.4) преобразуется к эквивалентной задаче Коши для системы в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=2}^{n} a_i x_i - u; \tag{1.6}$$

$$u = \psi x_1, \quad \psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x_1 s > 0, \\ \beta & \text{при } x_1 s < 0; \end{cases} \tag{1.7}$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i; \quad \alpha, \beta, a_i, c_i = \text{const}, \ c_n = 1; \ t \in T, \tag{1.8}$$

с заданными начальными условиями вида

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.9}$$

Задачу Коши (1.6)–(1.9) рассматриваем в заданной области $T \times D$, $D = \{x_i : |x_i| < h_i,\ i = 1, \dots, n\}$, где положительные постоянные h_i заранее определены; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Полагаем, что задача (1.6)–(1.9), как и задача (1.1)–(1.4), удовлетворяет необходимым условиям существования решений, характерным для уравнений с разрывными правыми частями [1, 2, 6, 8]. Обозначим через $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ решение задачи (1.6)–(1.9). Учитывая правые части системы (1.6), можно считать, что параметр μ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\mu \le M^{-1}, \quad M = \max\{\sup[|Y_i(x)|,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in D],\ 1 = 1, \dots, n\},\\ Y_1(x) = x_2, \dots, Y_{n-1}(x) = x_n, \quad Y_n(x) = -\sum_{i=2}^{n} a_i x_i - u.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Зададим меру, характеризующую отклонение функции $x = x(t)$ от значения $x(t) = 0$, в следующем виде:

$$\rho = \rho[x] \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{1.11}$$

Предположим, что заданы область возможных начальных состояний системы (1.6)–(1.9)

$$\Omega_0 = \{x : \rho \le \gamma,\ \gamma > 0\} \tag{1.12}$$

и область допустимых текущих состояний системы (1.6)–(1.9)

$$\Omega(t) = \{x : \rho \le \eta(t) > 0\}, \tag{1.13}$$

где γ, $\eta(t)$ — заданное число и ограниченная в области $T \subset I$ функция соответственно, при этом

$$\gamma \le \eta(t_0), \quad \Omega_0 \subset \Omega(t_0); \quad \eta(t) \le \eta\ \forall t \in T, \quad \eta = \text{const} > 0. \tag{1.14}$$

Ставится задача: при заданном разрывном управлении u (1.7), (1.8) определить условия, обеспечивающие по заданной мере $\rho = \rho[x]$ (1.11) выполнение свойства

$$x(t) \in \Omega(t), \quad t \in T, \tag{1.15}$$

для решений задачи (1.6)–(1.9) с заданными начальными значениями

$$x(t_0) = x_0 \equiv \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right) \in \Omega_0. \tag{1.16}$$

Поставим в соответствие системе (1.6)–(1.9) функцию Ляпунова конструктивным путем. С этой целью рассмотрим вспомогательную систему $(n-1)$-го порядка дифференциальных уравнений без управления:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad \frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=2}^{n} a_i x_i. \tag{1.17}$$

Корни характеристического уравнения для системы уравнений (1.17) совпадают с ненулевыми корнями характеристического уравнения (1.5). Учитывая предположения о корнях уравнения (1.5), делаем вывод, что движение в линейной системе, описываемой уравнениями (1.17), устойчиво. Следовательно, для устойчивой системы (1.17) существует определенно положительная квадратичная форма [1, 2, 4, 14, 25]

$$V_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}x_i x_j, \quad b_{ij} = \mathrm{const},\ b_{ij} = b_{ji}, \tag{1.18}$$

производная по времени от которой в силу системы (1.17) будет равна

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = W \equiv -\sum_{i=2}^{n} x_i^2, \tag{1.19}$$

и, следовательно, функция V_1 будет функцией Ляпунова для системы (1.17). Используя функцию (1.18), рассмотрим функцию координат $(t, x_1, \ldots, x_n)$ вида [4, 5, 15, 18–25]

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \exp[\beta_1(t)]\left[V_1(x_2, \ldots, x_n) + \frac{1}{2}Y^2\right], \quad Y = \sum_{i=2}^{n} a_i x_{i-1} + x_n. \tag{1.20}$$

Здесь $\beta_1(t)$ — заданная ограниченная дифференцируемая функция времени $t \in T$, подчиненная заданным условиям

$$|\beta_1(t)| \le K, \quad \left|\frac{d\beta_1(t)}{dt}\right| \le K_1, \tag{1.21}$$

$K, K_1 > 0$ — известные постоянные величины. Предположим, что функция V (1.20) удовлетворяет условию $V(t,x) \ge c\rho[x]$, где $c = \mathrm{const} > 0$ — заданная величина. Под технической устойчивостью рассматриваемого процесса с разрывным управлением будем понимать свойства устойчивости согласно следующим определениям.

Определение 1. Динамический процесс с переменной структурой, описываемый задачей Коши (1.6)–(1.9) при условии (1.16), называется *технически устойчивым на заданном ограниченном промежутке времени T по заданной мере $\rho[x]$*, если при разрывном управлении u (1.7), (1.8) вдоль возмущенных решений $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ задачи (1.6)–(1.9), (1.16) для определенно положительной функции V (1.20) выполняется условие

$$V(t, x(t)) \le P(t), \quad t \in T, \tag{1.22}$$

лишь только в начальный момент времени t_0 имеет место неравенство

$$V(t_0, x_0) \le b, \quad t_0 \in T, \tag{1.23}$$

где значение $V(t_0, x_0)$ определено на начальных данных (1.9) при (1.16), а выбранная постоянная $b = \mathrm{const} > 0$ и заданная ограниченная функция $P(t)$ на заранее заданном интервале времени $T \subset I$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} P(t) \le \eta(t), \quad P(t_0) \ge b, \quad b > \gamma, \quad 0 < P(t) \le C, \quad C = \mathrm{const} > 0, \\ 0 < \eta(t) \le \eta, \quad \eta = \mathrm{const} > 0,\ t, t_0 \in T. \end{gathered} \tag{1.24}$$

Определение 2. Если условия определения 1 выполняются на любом интервале $T \subseteq I$, то динамический процесс с переменной структурой (1.6)–(1.9), (1.16) называется *технически устойчивым по мере $\rho[x]$ на бесконечном интервале времени T*.

Определение 3. Если при выполнении условий определения 2 вдоль решений задачи Коши (1.6)–(1.9), (1.16) справедливо условие

$$\lim_{t\to+\infty} V(t,x(t)) = 0, \tag{1.25}$$

то исходный процесс с переменной структурой (1.6)–(1.9), (1.16) называется *технически асимптотически устойчивым по мере* $\rho[x]$.

Определение 4. Динамический процесс с переменной структурой (1.6)–(1.9), (1.16) называется *технически неустойчивым по мере* $\rho[x]$ в области T или I при заданных постоянной b, функциях $P(t)$, $\eta(t)$, когда при выполнении условия (1.23), заданного на начальных значениях (1.9), (1.16), для решений $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ задачи Коши (1.6)–(1.9), (1.16) найдется значение $t_1 \in T$ или $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, такое, для которого выполняется неравенство

$$V(t_1, x(t_1)) > \eta, \quad \eta = \mathrm{const} > 0. \tag{1.26}$$

Из определений 1–4 следует, что условия технической устойчивости характерны не только тем, что процесс рассматривается на заранее заданном ограниченном интервале времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния процесса не зависят от условий заданного мажорирования последующих состояний процесса в течение заданного промежутка времени. Необязательность условия отрицательной определенности или неположительности полной производной функции Ляпунова на состояниях исходного процесса в отличие от устойчивости по Ляпунову расширяет область значений для параметров исходного процесса [10–13, 15–21, 26, 29].

2. Достаточные условия технической устойчивости процесса с переменной структурой. Ниже на основе метода дифференциальных неравенств доказывается теорема о технической устойчивости исходного управляемого процесса с переменной структурой. Для этой цели применим необходимые результаты из [11–13, 17, 18, 27, 28]. Используем обозначения вдоль решений системы (1.6)–(1.9), (1.16):

$$V(t) \equiv V(t, x_1(t),\dots,x_n(t)), \quad W(t) \equiv -\sum_{i=2}^{n} x_i^2(t), \quad Y(t) \equiv Y(x_1(t),\dots,x_n(t));$$

при значении $\psi x_1(t) \equiv \alpha x_1(t)$ — выражение

$$M_\alpha(t) = M_\alpha(t, x_1(t),\dots,x_n(t)) \equiv \frac{1}{2}\frac{d\beta_1(t)}{dt}V(t) + \exp[\beta_1(t)]\left[\frac{1}{2}W(t) - \left\{\sum_{k=2}^{n} b_{nk}x_k(t) + Y(t)\right\}\alpha x_1(t)\right]; \tag{2.1}$$

при значении $\psi x_1(t) = \beta x_1(t)$ — выражение

$$M_\beta(t) = M_\beta(t, x_1(t),\dots,x_n(t)) \equiv \frac{1}{2}\frac{d\beta_1(t)}{dt}V(t) + \exp[\beta_1(t)]\left[\frac{1}{2}W(t) - \left\{\sum_{k=2}^{n} b_{nk}x_k(t) + Y(t)\right\}\beta x_1(t)\right]. \tag{2.2}$$

На состояниях исходного процесса (1.6)–(1.9), (1.6) введем в рассмотрение функции вида

$$\overline{\Phi}_\alpha(t) = M_\alpha(t) - \frac{c\mu}{2(t+\mu)^2}\rho[x(t)], \quad \overline{\Phi}_\beta(t) = M_\beta(t) - \frac{c\mu}{2(t+\mu)^2}\rho[x(t)]. \tag{2.3}$$

Полагаем, что заданные функции $P(t)$, $\eta(t)$ имеют следующее представление:

$$P(t) = \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]\,d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right],$$
$$\eta(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]\,d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \le \eta, \tag{2.4}$$

где неотрицательная интегрируемая по $t\in T$ функция $\Phi(t)$ заранее задана и удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]\,d\tau \le M_1(\mu+N\mu^{-1})^2\left\{\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]-\exp\left[\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\right\}, \tag{2.5}$$

$$M_1 = \exp(K)\left\{K_1\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}b_{ij}h_ih_j + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n}a_ih_{i-1}+h_n\right)^2\right]\right.$$
$$\left.+\left|\left[\sum_{i=2}^{n}h_i^2 - \left(\sum_{k=2}^{n}b_{nk}h_k + \sum_{i=2}^{n}a_ih_{i-1}+h_n\right)(\alpha+\beta)h_1\right]\right|\right\}.$$

Пусть заданная положительная постоянная величина $z_0 = \mathrm{const} > 0$ удовлетворяет условию

$$z_0 \ge V_0, \quad V_0 \equiv \exp[\beta_1(t_0)]\left[V_1\big(x_2^0,\dots,x_n^0\big)+\frac{1}{2}Y_0^2\right],$$
$$Y_0 \equiv \sum_{i=2}^{n}a_ix_{i-1}^0 + x_n^0, \quad V_1\big(x_2^0,\dots,x_n^0\big) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}x_1^0x_j^0. \tag{2.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия.*

1. *Для динамической системы с переменной структурой* (1.6)–(1.9), (1.16) *выполнены необходимые условия существования решения.*

2. *Характеристическое уравнение порождающей системы при условии* $u = 0$ *имеет* $n-1$ *корней с отрицательными действительными частями, и один корень равен нулю.*

3. *При разрывном управлении* u *вида* (1.7), (1.8) *и при любых допустимых начальных состояниях* $x_0\in\Omega_0$ *на решениях исходного процесса* (1.6)–(1.9) *справедливы условия:*

(а) *заданная в соответствии с* (2.4)–(2.6) *функция* $\Phi(t)$ *представима в виде суммы двух неотрицательных интегрируемых по* $t\in T$ *функций* $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$: $\Phi(t)=\Phi_1(t)+\Phi_2(t)$, *для которых одновременно выполняются неравенства*

$$|\overline{\Phi}_\alpha(t)| \le \Phi_1(t), \quad |\overline{\Phi}_\beta(t)| \le \Phi_2(t), \quad t\in T; \tag{2.7}$$

(б) *в области* $T\subset I$ *существует интеграл*

$$\sigma(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\,d\tau \quad (\Phi(\tau)\equiv\Phi_1(\tau)+\Phi_2(\tau)). \tag{2.8}$$

4. *Существует ограниченное верхнее решение* $z(t) = z(t_1, t_0, z_0)$ *задачи Коши сравнения*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{(\mu+t)^2}[z + \sigma(t)], \quad t \in T; \tag{2.9}$$

$$z(t_0) = z_0 \geq V_0 \tag{2.10}$$

при заданных функции $\sigma(t)$ *вида* (2.8), *значениях* V_0 *вида* (2.6) *и условиях*

$$0 < z_0 \leq b; \quad b = \mathrm{const} > 0, \tag{2.11}$$

удовлетворяющих в области T *неравенству*

$$z(t) + \sigma(t) \leq P(t), \quad t \in T. \tag{2.12}$$

5. *Множества* $C_{z_0} = \{x : V(t, x) \leq z_0\}$, Ω_0 *удовлетворяют условию*

$$\Omega_0 \subset C_{z_0} \quad \text{при } t = t_0. \tag{2.13}$$

Тогда имеют место следующие свойства.

1. *При разрывном управлении* u (1.7), (1.8) *исходный динамический процесс* (1.6)–(1.9), (1.16) *является технически устойчивым по мере* ρ *на заданном ограниченном промежутке времени* T.

2. *Пусть процессы с переменной структурой* (1.6)–(1.9), (1.16) *обладают указанными выше свойствами их правых частей в любом промежутке времени* $T \subseteq I$. *Тогда исходный процесс* (1.6)–(1.9), (1.16) *является технически устойчивым по мере* ρ *на бесконечном интервале* I, *если условия* 1–5 *теоремы выполняются на любом временном промежутке* $T \subseteq I$.

3. *Если дополнительно справедливо условие*

$$z(t) + \sigma(t) \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty, \tag{2.14}$$

то процесс (1.6)–(1.9), (1.16) *асимптотически технически устойчив относительно меры* ρ.

Доказательство. Используя полную производную $\frac{dV}{dt}$ для функции (1.20) в силу системы уравнений (1.6), получаем

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d\beta_1(t)}{dt}V(t) + \exp[\beta_1(t)] \left[W(t) - \left\{ \sum_{k=2}^{n} b_{nk}x_k(t) + Y(t) \right\} \psi x_1(t) \right]. \tag{2.15}$$

При любых значениях величин $M_{\alpha,\beta}(t) = \{M_\alpha(t), M_\beta(t)\}$ (2.1), (2.2) на решениях процесса (1.6)–(1.9), (1.16) имеем покомпонентно мажорантные неравенства $[1, 4, 6, 7, 9]$:

$$M_{\alpha,\beta}(t) - \frac{1}{2(t+\mu)^2}V(t) \leq M_{\alpha,\beta}(t) - \frac{c\mu}{2(t+\mu)^2}\rho[x(t)].$$

Следовательно, применяя последние неравенства и соответствующие условия теоремы, из (2.15) находим оценку для производной $\frac{dV(t)}{dt}$ вдоль решений исходного процесса (1.6)–(1.9), (1.16):

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq \frac{1}{(\mu+t)^2}V(t) + \Phi(t), \quad t \in T. \tag{2.16}$$

Учитывая (2.8), рассмотрим функцию

$$v(t) = V(t) - \sigma(t). \tag{2.17}$$

Оценка для правой части в (2.15) вдоль решений задачи (1.6)–(1.9), (1.16) приводит к неравенству

$$\frac{dv(t)}{dt} \le \frac{1}{(\mu+t)^2}[v(t)+\sigma(t)], \quad t \in T. \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует задача Коши сравнения (2.9), (2.10) при условиях (2.11), которая в области T имеет ограниченное решение, зависящее от функции $\Phi(t)$, подчиненной условиям теоремы. Такое решение на основе интегрирования по частям представим в виде [13, 15, 18–24, 26–28]

$$z(t) = \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]\Phi(\tau)\,d\tau \\ + z_0\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] - \sigma(t), \quad t \in T. \tag{2.19}$$

Используя (2.19), по соответствующей теореме [27, 28] о дифференциальных неравенствах находим

$$v(t) \le z(t), \quad t \in T. \tag{2.20}$$

Отсюда, учитывая (2.17), имеем

$$V(t) \le z(t) + \sigma(t), \quad t \in T. \tag{2.21}$$

Из (2.21), (2.11) получаем последовательность неравенств

$$V(t) \le \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]d\tau + z_0\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \\ \le \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\right\} \\ \le \int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right]d\tau + b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right], \quad t \in T. \tag{2.22}$$

Следовательно, ввиду того, что $b \equiv P(t_0)$, имеем

$$V(t) \le P(t) \le \eta(t), \quad t \in T; \tag{2.23}$$

$$V_0 \le b, \quad t_0 \in T, \tag{2.24}$$

вдоль решений процесса (1.6)–(1.9), (1.16).

Из неравенств (2.22)–(2.24) получаем следующее свойство:

$$C_{P(t)} \subset \Omega(t), \quad C_{P(t)} = \{x : V(t,x) \le P(t) \quad \forall t \in T\}, \tag{2.25}$$

где функции $V(t,x)$, $P(t)$, $\eta(t)$ заданы согласно (1.20), (2.4) соответственно. При этом функция $P(t)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < P(t) \le C; \quad C \equiv \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right] \\ \times [M_1(\mu+N\mu^{-1})^2 + b] - M_1(\mu+N\mu^{-1})^2 > 0, \quad C \le \eta, \tag{2.26}$$

при выполнении условий (2.5).

Таким образом, из соотношения (2.25) и заданных в теореме условий 5 окончательно следует утверждение 1 данной теоремы. При $t \to +\infty$ справедлива оценка $P(t) \le \eta(t)$, так как для функции $\eta(t)$ при $t \to +\infty$ имеем

$$\eta(t) \equiv \left\{ \exp\left[-\frac{1}{\mu+\tau}\right] \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(\tau) \exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}\right] d\tau \right.$$
$$\left. + b\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \right\} / \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]. \quad (2.27)$$

Следовательно, на любом временном интервале $T \subseteq I$ получаем утверждение 2 и при условии (2.14) утверждение 3 теоремы. В последнем случае легко видеть, что при выполнении (2.14) функция $V(t)$ вида (2.4) удовлетворяет условию: $V(t) \to 0 \quad$ при $t \to +\infty$.

Исходная система (1.6)–(1.9), (1.16) будет неустойчива в T или в I относительно меры ρ, когда в этих областях функция $P(t)$ удовлетворяет условию

$$P(t) \to +\infty, \quad t \in T \quad \text{или } t \in I. \quad (2.28)$$

В частности, (2.28) имеет место при $t_0 = 0$ и произвольном значении $t \ge 0$, когда $\mu \to 0$, что, как следует из условий для значений параметра μ, будет соответствовать резкому возрастанию параметров, характеризующих исходную систему (1.6)–(1.9), (1.16).

Поскольку динамическая система (1.6)–(1.9), (1.16) эквивалентна в области $T \times D$ первоначальной системе (1.1)–(1.4) при условиях (1.16), условия технической устойчивости, установленные сформулированной выше теоремой, являются условиями технической устойчивости по мере ρ на ограниченном и бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости исходной системы первоначального вида (1.1)–(1.4), (1.16). Теорема доказана.

3. Условия технической устойчивости системы автоматического регулирования с переменной структурой третьего порядка. Рассматриваемая ниже задача представляет собой реализацию полученных выше общих критериев технической устойчивости систем с переменной структурой. Именно, в качестве примера рассмотрим техническую устойчивость системы с переменной структурой, использующей в законе управления информацию лишь о регулируемой координате и ее первой и второй производных. Такого рода процессы широко реализуемы на практике [1–4, 6, 16, 29].

Итак, пусть свободное движение системы с переменной структурой описывается дифференциальным уравнением третьего порядка

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_3\frac{d^2y}{dt^2} + a_2\frac{dy}{dt} = -u; \quad (3.1)$$

$$u = \psi y, \quad \psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } ys > 0, \\ \beta & \text{при } ys < 0; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$s = c_1 y + c_2\frac{dy}{dt} + c_3\frac{d^2y}{dt^2}; \quad (3.3)$$

$\alpha, \beta, c_i = \text{const}$, $c_3 = 1$, $a_i = 1$, при заданных начальных условиях

$$y(t_0) = x_1^0, \quad \frac{dy}{dt}(t_0) = x_2^0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}(t_0) = x_3^0, \quad x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) \in \Omega_0, \quad (3.4)$$

где Ω_0 — множество начальных состояний процесса (3.1)–(3.4), определяемое ниже. Промежуток времени $T \subset I$ при $n = 3$ определяется аналогично общему случаю. При $\psi y = 0$ характеристическое уравнение для уравнения (3.1)

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0 \tag{3.5}$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}, \tag{3.6}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.

Перейдем от уравнения (3.1) к эквивалентной системе уравнений, сделав замену переменных

$$y = x_1, \quad \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1, 2.$$

Система (3.1)–(3.4) преобразуется к эквивалентной начальной задаче вида

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_2 - x_3 - \psi x_1; \tag{3.7}$$

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x_1 s > 0, \\ \beta & \text{при } x_1 s < 0; \end{cases} \tag{3.8}$$

$$s = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad \alpha, \beta, c_i = \mathrm{const}; \tag{3.9}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad x_3(t_0) = x_3^0. \tag{3.10}$$

Рассмотрим порождающую систему вида

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_2 - x_3, \tag{3.11}$$

для которой выберем функцию Ляпунова V_1 в виде [1, 2, 14, 25]

$$V_1 = \frac{1}{2}b_{11}x_2^2 + b_{12}x_2x_3 + \frac{1}{2}b_{22}x_3^2. \tag{3.12}$$

Характеристическое уравнение для системы (3.11) имеет корни, совпадающие с корнями λ_2, λ_3 характеристического уравнения (3.5) системы (3.7) при $\psi x_1 = 0$.

Полная производная $\frac{dV_1}{dt}$ от функции (3.12) в силу системы (3.11) равна

$$\frac{dV_1}{dt} = -b_{12}x_2^2 + (b_{11} - b_{12} - b_{22})x_2x_3 + (b_{12} - b_{22})x_3^2. \tag{3.13}$$

Коэффициенты b_{ij} выберем следующими:

$$b_{11} = 3, \quad b_{12} = 1, \quad b_{22} = 2. \tag{3.14}$$

При значениях (3.14) имеем в силу системы (3.10) выражение

$$\frac{dV_1}{dt} = W \equiv -x_2^2 - x_3^2. \tag{3.15}$$

Тогда квадратичная форма V_1 (3.12) будет определенно положительной [1, 11–13, 15, 22, 23].

Зададим меру типа (1.11), соответствующую системе (3.7)–(3.10) (или, что равносильно, системе (3.1)–(3.4)), в виде $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}[x] = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2$. Пусть заданы область возможных начальных состояний процесса (3.7)–(3.10):

$$\Omega_0 = \{x : \tilde{\rho} \le \gamma,\ 0 < \gamma \le b\}, \tag{3.16}$$

где $b = \text{const} > 0$ — заранее известная величина, и область допустимых текущих состояний $\Omega(t)$ системы (3.7)–(3.10) в виде

$$\Omega(t) = \{x : \tilde{\rho} \le \tilde{\eta}(t),\ 0 < \tilde{\eta}(t) \le \tilde{\eta}\ \forall t \in T\} \tag{3.17}$$

при заранее определенных числе γ и ограниченной в области $T \subset I$ функции $\tilde{\eta}(t)$, при этом полагаем

$$\gamma \le \tilde{\eta}(t_0), \quad \Omega_0 \subset \Omega(t_0), \quad \tilde{\eta} = \text{const} > 0. \tag{3.18}$$

Для системы (3.7)–(3.10) в области $T \times D$ выберем функцию Ляпунова вида

$$V(t, x_1, x_2, x_3) = \exp[\sin^2(\exp(-t))] \left[V_1(x_2, x_3) + \frac{1}{2}Y^2\right], \quad Y = x_1 + x_2 + x_3. \tag{3.19}$$

Здесь имеем

$$K = \exp\{\sin^2[\exp(-t_0)]\}, \quad K_1 = \exp(-t_0). \tag{3.20}$$

В качестве функций $P(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ выберем

$$P(t) = \frac{M}{2} \exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right] \left\{\exp\left[\frac{2}{\mu + t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu + t}\right]\right\} + b \exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right] \exp\left[\frac{1}{\mu + t_0}\right]; \tag{3.21}$$

$$\tilde{\eta}(t) = \frac{M}{2} \left\{\exp\left[\frac{2}{\mu + t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu + t}\right]\right\} + b \exp\left[\frac{1}{\mu + t_0}\right] \le \tilde{\eta},$$

где $M = \text{const} > 0$ — наперед заданная величина, которая, в частности, может быть определена в виде

$$M = \exp[\sin^2[\exp(t_0)]] \left[\frac{5}{2}h_2^2 + h_2 h_3 + 2h_3^2 + \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)^2 + (3h_1 + 2h_2 + 3h_3)(|\alpha - \beta|)h_1\right] \tag{3.22}$$

при соблюдении условия (3.21).

В силу системы (3.7) подобно (2.15) находим

$$\frac{dV(t, x_1, x_2, x_3)}{dt} = -\exp(-t) \sin[2 \exp(-t)] V(t, x_1, x_2, x_3) + \exp[\sin^2(\exp(-t))] \left[-x_2^2 - 3\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3\right) \psi x_1\right]. \tag{3.23}$$

Для выражения в правой части (3.23) не ищем условий обязательной отрицательной определенности (или неположительности). В качестве коэффициентов c_i, $i = 1, 2, 3$, согласно (3.23) можем выбрать $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{2}{3}$, $c_3 = 1$ или $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$. Для таких значений имеем

$$(c_1 - a_2)/c_2 \ne c_2 - a_2 \quad (a_2 = a_3 = 1). \tag{3.24}$$

Это означает нарушение одного из условий существования скользящего режима, плоскость $s = 0$ не будет плоскостью скольжения [1–8].

Образуем функции $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(t)$ на решениях системы (3.7)–(3.10) аналогично (2.3). Повторяя выкладки § 2, аналогично (1.6)–(1.9) получаем соотношения и условия технической устойчивости системы (3.7)–(3.10). При этом полагаем

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) \equiv \frac{M}{(\mu + t)^2} \exp\left[\frac{1}{\mu + t}\right], \tag{3.25}$$

где M — определенная выше положительная постоянная. Кроме того, функция $\Phi(t)$ (3.25) удовлетворяет условию: $\Phi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Проводя при (3.25) аналогично § 2 надлежащие преобразования и используя при этом (3.20), (3.21) и соответствующую задачу Коши сравнения типа (2.9)–(2.11), находим последовательность неравенств вдоль решений задачи (3.7)–(3.10):

$$V(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \le \frac{M}{2}\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_o}\right]-\exp\left[\frac{2}{\mu+t}\right]\right\} + z_0\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \le P(t) \le \tilde{\eta}(t), \quad (3.26)$$

где при $t \in T$ имеем

$$P(t) \le \frac{M}{2}\exp\left[-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-\exp\left[\frac{2}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\right\} + b\exp\left[-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\right]\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right], \quad (3.27)$$

$$\tilde{\eta}(t) \le \frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-1\right\}+b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \le \tilde{\eta}. \quad (3.28)$$

Следовательно, из (3.26) и условий (2.10), (2.6) при $n = 3$, заданных согласно задаче (3.7)–(3.10) при (3.16) для (3.19), находим, что процесс (3.7)–(3.10) (а значит, и (3.1)–(3.4)) технически устойчив на конечном интервале времени T относительно меры $\tilde{\rho}$. Кроме того, оценка

$$P(t) \le C, \quad C \equiv \frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-1\right\}+b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \quad (3.29)$$

справедлива при любых $T \subseteq I$, в чем убеждаемся исходя из (3.26) при $t \to +\infty$. Таким образом, процесс (3.7)–(3.10) (а значит, и (3.1)–(3.4)) технически устойчив на бесконечном интервале времени I относительно меры $\tilde{\rho}$. Однако при задании мажоранты $\Phi(t)$ в виде (3.25) условие асимптотической технической устойчивости исходного процесса не имеет места. Условия неустойчивости процесса (3.7)–(3.10) (или (3.1)–(3.4)) по мере $\tilde{\rho}$ аналогичны условию (2.28) из § 2.

В заключение отметим, что функция $\frac{dV(t)}{dt}$ вдоль решений исходной системы (3.7)–(3.10) будет отрицательно определенной, если ψ меняется в соответствии с (3.8), выполнены условия $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и первое слагаемое в (3.23) неположительно. Это значит, что в последнем случае процесс (3.7)–(3.10) будет устойчив по Ляпунову. Следовательно, полученные условия технической устойчивости для процесса (3.7)–(3.10) в области I включают условия устойчивости в смысле Ляпунова для данного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. *Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А., Костилева Н. Е., Шубладзе А. И., Езеров В. Б., Дубровский Е. Н.* Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970.
3. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1989.
4. *Лозгачев Г. И.* О построении функций Ляпунова для систем с переменной структурой // Автоматика и телемеханика. 1972. № 8. С. 161–162.
5. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
6. *Ащепков Л. Т.* Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987.

7. *Мещанов А. С.* Применение метода функций Ляпунова в построении разрывных управлений. Новосибирск: Наука, 1983.
8. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
9. *Хапаев М. М.* Условия управляемости сингулярно возмущенных систем, содержащих сингулярные управления // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 2. С. 300–302.
10. *Каменков Г. В.* Об устойчивости на конечном интервале времени // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, № 5. С. 529–540.
11. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972.
12. *Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.* Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения // Механика твердого тела. 1975. № 6. С. 15–24.
13. *Гаращенко Ф. Г.* О некоторых задачах динамической устойчивости и их приложения // Вычисл. и прикл. математика. Киев, 1982. С. 106–112.
14. *Коренівський Д. Г.* Про деякі ознаки стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням // Доп. АН УРСР. 1966. № 6. С. 708–710.
15. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977.
16. *Чеховой Ю. Н.* Приложение метода функций Ляпунова к некоторым квазилинейным задачам теории устойчивости регулируемых систем // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1986. С. 78–90.
17. *Громондз В. Т.* К задаче об устойчивости на конечном интервале времени // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, 1991. С. 62–68.
18. *Байрамов Ф. Д.* Обеспечение технической устойчивости управляемых систем // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, 1991. С. 134–139.
19. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости управляемых процессов с сосредоточенными параметрами // Прикл. механика. 1997. Т. 33, № 2. С. 74–79.
20. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость процесса движения двух связанных платформ, несущих перемещающиеся маховики // Изв. РАН. Сер. механика твердого тела. 1993. № 6. С. 3–10.
21. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 2. С. 210–218.
22. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980.
23. *Васильев С. Н.* К управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях и постоянно действующих возмущениях // Изв. РАН. Сер. техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 77–82.
24. *Летов А. М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
25. *Пустовойтов Н. А.* Вопросы алгоритмизации второго метода Ляпунова // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск: Наука, 1981. С. 124–131.
26. *Сиразетдинов Т. К.* Метод функций Ляпунова при исследовании некоторых свойств процессов с последействием // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск: Наука, 1981. С. 64–75.
27. *Бабкин Б. И.* К теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Мат. сб. 1958. Т. 46, № 4. С. 389–398.
28. *Szarski J.* Differential inequalities. Warszawa: PWN, 1967.
29. *Skalmierski B., Tylikowski A.* Stabilnosc uklalow dynamicznych. Warszawa: PWN, 1973.

Статья поступила 7 декабря 1997 г.,
окончательный вариант — 10 марта 1999 г.

г. Киев
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины
`ang@imech.freenet.kiev.ua`