Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 512.54.01

ФИЛЬТРЫ В РЕШЕТКАХ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ ГРУПП, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СПЛЕТЕНИЙ

С. В. Ленюк

Аннотация: Найдено условие, при выполнении которого любой нетривиальный фильтр в решетке квазимногообразий групп континуален. В частности, показано, что если $\mathscr{R}$ — квазимногообразие, порожденное одним из следующих классов: а) всеми разрешимыми группами; б) всеми разрешимыми группами без кручения; в) всеми разрешимыми линейно упорядочиваемыми группами; г) всеми собственными многообразиями групп; д) всеми группами без кручения, каждая из которых удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству, то любой нетривиальный фильтр в решетке $L_q(\mathscr{R})$ континуален, где $L_q(\mathscr{R})$ — решетка квазимногообразий, содержащихся в $\mathscr{R}$. Библиогр. 11.

Одним из основных толчков к изучению решеток квазимногообразий групп явилась проблема Д. М. Смирнова [1] о мощности фильтров в решетке квазимногообразий групп. С тех пор эта решетка подверглась систематическому исследованию. Отметим лишь некоторые результаты в этом направлении. В [2] найден критерий, при выполнении которого фильтры в решетках квазимногообразий континуальны. В частности, оказалось, что главный фильтр, порожденный в решетке квазимногообразий групп квазимногообразием $\mathscr{M}$, имеет мощность континуума, где $\mathscr{M}$ — произвольное собственное полумногообразие или квазимногообразие, порожденное всеми собственными многообразиями групп. Решетка квазимногообразий метабелевых групп изучалась в [3–5]. В [5] доказано, что любой нетривиальный фильтр в решетке квазимногообразий метабелевых групп без кручения континуален. В данной работе продолжается изучение фильтров в решетках квазимногообразий групп. Устанавливается мощность фильтров в ряде решеток квазимногообразий групп. Найдено условие, при выполнении которого любой нетривиальный фильтр в решетке квазимногообразий групп континуален. Это условие позволило установить, например, континуальность любого нетривиального фильтра в решетке $L_q(\mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ — квазимногообразие, порожденное

а) всеми разрешимыми группами;

б) всеми собственными многообразиями групп.

В работе используются следующие обозначения: $L_q(\mathscr{K})$ — решетка квазимногообразий групп, содержащихся в квазимногообразии $\mathscr{K}$; $q\mathscr{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathscr{K}$; $\operatorname{var}\mathscr{K}$ — многообразие, порожденное классом групп $\mathscr{K}$; $A \wr B$ — прямое сплетение групп A и B. Элементы из базисной подгруппы $A^{(B)}$ будем называть функциями и обозначать через φ_i, ψ_i;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00156).

© **2000 Ленюк С. В.**

P — множество простых чисел; единицу группы будем обозначать через 1. Все остальные обозначения, используемые в работе, берутся из [6].

Замечание. В статье кванторы всеобщности при написании тождеств и квазитождеств опущены.

Лемма [7]. *Пусть циклически несократимое слово $w(z_1,\dots,z_n)$ начинается с z_1. Тогда*

$$w(az_1,\dots,z_n) = a\prod_{i=1}^{r-1} a^{\varepsilon_i\gamma_i} w(z_1,\dots,z_n),$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, γ_i^{-1} — различные подслова слова w, причем $\gamma_r^{-1} = w$, $\gamma_j^{-1} \neq \gamma_{j+1}^{-1}$, γ_j^{-1} — начальное подслово γ_{j+1}^{-1}.

Напомним, что квазимногообразие $\mathscr{M}$ называется *замкнутым относительно прямых сплетений*, если $A \wr B \in \mathscr{M}$ для любых $A, B \in \mathscr{M}$.

Следующая теорема дает условие континуальности решеток квазимногообразий групп.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{R} = q\{G_i \mid i \in I\}$ — квазимногообразие, замкнутое относительно прямых сплетений, причем каждая группа G_i удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству. Предположим, что существует бесконечное множество групп A_p ($p \in P$) из $\mathscr{R}$ таких, что для любого $p \in P$ существует квазитождество*

$$\Phi_p\colon \&_{i=1}^{k(p)} v_i^{(p)}(x_1,\dots,x_{m(p)}) = 1 \to v^{(p)}(x_1,\dots,x_{m(p)}) = 1$$

такое, что

а) *оно истинно в группе A_q при $q \neq p$;*

б) *найдутся элементы $a_1,\dots,a_{m(p)} \in A_p$, для которых выполнены следующие соотношения:*

$$v_i^{(p)}(a_1,\dots,a_{m(p)}) = 1, \quad v_i^{(p)}\bigl(a_1^{-1},\dots,a_{m(p)}^{-1}\bigr) = 1, \quad i = 1,\dots,k(p),$$
$$v^{(p)}(a_1,\dots,a_{m(p)}) \neq 1.$$

Тогда любой нетривиальный фильтр в решетке квазимногообразий $L_q(\mathscr{R})$ континуален.

Доказательство. Достаточно показать, что главный фильтр $[\mathscr{M})$, порожденный в решетке $L_q(\mathscr{R})$ любым собственным квазимногообразием $\mathscr{M}$, континуален.

Итак, пусть $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{R}$, $\mathscr{M} \neq \mathscr{R}$. Зафиксируем группу G_i, $G_i \notin \mathscr{M}$, и в дальнейшем будем ее обозначать через G.

Пусть Γ: $\&_{i=1}^{t} u_i(y_1,\dots,y_s) = 1 \to u(y_1,\dots,y_s) = 1$ — квазитождество, истинное в любой группе из квазимногообразия $\mathscr{M}$ и ложное в группе G при подходящей интерпретации $y_1 \to g_1,\dots,y_s \to g_s$.

Пусть $w(z_1,\dots,z_n) = 1$ — самое короткое нетривиальное тождество истинное в группе G. Тогда слово $w(z_1,\dots,z_n)$ будет циклически несократимым. Можно считать, что оно начинается с z_1. Пусть F — свободная группа в многообразии, порожденном группой G; $f_1, f_2, \dots$ — ее свободные порождающие. Тогда $F \in qG$ и, следовательно, $F \in \mathscr{R}$. Так как любое соотношение на порождающих в группе, свободной в некотором многообразии, является тождеством в этом многообразии, из леммы получаем, что

$$w(af_1,\dots,f_n) = a\prod_{i=1}^{r-1} a^{\varepsilon_i\gamma_i} w(f_1,\dots,f_n) = a\prod_{i=1}^{r-1} a^{\varepsilon_i\gamma_i}$$

и $\gamma_i^{-1}(f_1,\dots,f_n)\neq\gamma_j^{-1}(f_1,\dots,f_n)$ при $i\neq j$, $\varepsilon_i=\pm1$.

Обозначим $H_p=A_p\wr(G\times F)$; $\mathscr{N}_S=q(\{H_p\mid p\in S\},\mathscr{M})$, $S\subseteq P$. Очевидно, что $\mathscr{M}$ строго содержится в $\mathscr{N}_S$ и $\mathscr{N}_S\subseteq\mathscr{R}$.

Покажем, что $\mathscr{N}_S\neq\mathscr{N}_J$ при $S\neq J$, $S,J\subseteq P$. Для этого достаточно проверить, что $H_p\notin\mathscr{N}_S$ при $p\notin S$, $p\in P$. Докажем это. Рассмотрим квазитождество

$$\Psi_p=\big(\big(\&_{i=1}^{t}u_i(y_1,\dots,y_s)=1\big)\&\big(\&_{i=1}^{m(p)}x_i=w(c_iz_1,\dots,z_n)\big)\big)$$
$$\&\big(\&_{i=1}^{k(p)}v_i^{(p)}(x_1,\dots,x_{m(p)})=1\big)\to[u(y_1,\dots,y_s),v^{(p)}(x_1,\dots,x_{m(p)})]=1).$$

Оно истинно в любой группе из квазимногообразия $\mathscr{M}$, так как является следствием квазитождества Г. Покажем, что это квазитождество истинно в группе H_q при $q\neq p$. Предположим, что левая часть квазитождества Ψ_p истинна в группе H_q при интерпретации

$$x_1\to x_1,\dots,x_{m(p)}\to x_{m(p)},\quad c_1\to c_1,\dots,c_{m(p)}\to c_{m(p)},$$
$$y_1\to y_1,\dots,y_s\to y_s,\quad z_1\to z_1,\dots,z_n\to z_n.$$

Тогда элементы $x_1,\dots,x_{m(p)}$ принадлежат базисной подгруппе сплетения $A_q\wr(G\times F)$. Поскольку квазитождество

$$\&_{i=1}^{k(p)}v_i^{(p)}(x_1,\dots,x_{m(p)})=1\to v^{(p)}(x_1,\dots,x_{m(p)})=1$$

истинно в этой базисной подгруппе, получаем, что Ψ_p истинно в группе H_q. Значит, квазитождество Ψ_p истинно в любой группе из квазимногообразия $\mathscr{N}_S$ при $p\notin S$.

Покажем, что Ψ_p ложно в группе H_p. Рассмотрим следующую интерпретацию переменных квазитождества Ψ_p в группе H_p:

$$y_1\to g_1,\dots,y_s\to g_s,\quad z_1\to f_1,\dots,z_n\to f_n,\quad x_1\to\psi_1,\dots,x_{m(p)}\to\psi_{m(p)},$$
$$c_i\to\varphi_i,\ \text{где }\varphi_i(x)=\begin{cases}a_i, & x=1,\\ 1, & x\neq1,\ i=1,\dots,m(p)\end{cases}$$

(элементы $g_1,\dots,g_s\in G$, $f_1,\dots,f_n\in F$, $a_1,\dots,a_{m(p)}\in A_p$ уже вводились ранее). Тогда

$$\psi_j=w(\varphi_jf_1,\dots,f_n)=\varphi_j\prod_{i=1}^{r-1}\varphi_j^{\varepsilon_i\gamma_i},\quad j=1,\dots,m(p),$$

где, как уже отмечалось, $\gamma_i^{-1}(f_1,\dots,f_n)\neq\gamma_l^{-1}(f_1,\dots,f_n)$ при $i\neq l$ и $\varepsilon_i=\pm1$. Поэтому функция ψ_j принимает неединичные значения только a_j и a_j^{-1} на элементах 1 и $\gamma_i(f_1,\dots,f_n)$, $i=1,\dots,r-1$, из $G\times F$, причем $\psi_j(1)=a_j$. В силу выбора элементов $a_1,\dots,a_{m(p)}$ и условия б) получаем, что

$$v_i^{(p)}(\psi_1,\dots,\psi_{m(p)})=1,\quad i=1,\dots,k(p),\quad v^{(p)}(\psi_1,\dots,\psi_{m(p)})\neq1.$$

Так как $\psi_1,\dots,\psi_{m(p)}$ принадлежат базисной подгруппе, элемент $v^{(p)}(\psi_1,\dots,\psi_{m(p)})$ также принадлежит базисной подгруппе сплетения. С учетом выбора элементов $g_1,\dots,g_s$ имеем $u_i(g_1,\dots,g_s)=1$ $(i=1,\dots,t)$, а $u(g_1,\dots,g_s)\neq1$. Поскольку носитель ψ_j $(j=1,\dots,m(p))$ содержится в F, легко понять, что

$$[u(g_1,\dots,g_s),v^{(p)}(\psi_1,\dots,\psi_{m(p)})]\neq1.$$

Следовательно, квазитождество Ψ_p ложно в H_p. Итак, $H_p\notin\mathscr{N}_S$ при $p\notin S$. Значит, $\mathscr{N}_S\neq\mathscr{N}_J$ при $S\neq J$, $S,J\subseteq P$. Так как P — бесконечное множество, главный фильтр $[\mathscr{M})$ континуален. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что на самом деле доказано следующее более общее утверждение, чем теорема 1, а именно справедливо

Следствие. *Пусть $\mathscr{R} = q\{G_i \mid i \in I\}$, где каждая группа G_i удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству. Пусть, далее, для каждой группы G_i, $i \in I$, существует (зависящее от G_i) бесконечное множество групп A_p, $p \in P$, таких, что $A_p \wr (G_i \times F) \in \mathscr{R}$, где F — свободная группа счетного ранга из $\operatorname{var} G_i$. Предположим, что для любого $p \in P$ существует квазитождество*

$$\&_{i=1}^{k(p)} v_i^{(p)}(x_1, \dots, x_{m(p)}) = 1 \to v^{(p)}(x_1, \dots, x_{m(p)}) = 1$$

такое, что

а) *оно истинно в группе A_q при $q \neq p$;*

б) *найдутся элементы $a_1, \dots, a_{m(p)} \in A_p$, для которых выполнены следующие соотношения:*

$$v_i^{(p)}(a_1, \dots, a_{m(p)}) = 1, \quad v_i^{(p)}\big(a_1^{-1}, \dots, a_{m(p)}^{-1}\big) = 1, \quad i = 1, \dots, k(p),$$

$$v^{(p)}(a_1, \dots, a_{m(p)}) \neq 1.$$

Тогда любой фильтр в решетке квазимногообразий $L_q(\mathscr{R})$ континуален.

Замечание. Если рассмотреть квазимногообразие, порожденное всеми абелевыми группами, каждая из которых удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству, то получим класс всех абелевых групп. В решетке квазимногообразий всех абелевых групп существуют счетные фильтры (это следует из описания квазимногообразий абелевых групп [8]). В частности, видим, что условие $A_p \wr (G_i \times F) \in \mathscr{R}$ в следствии существенно.

Теорема 2. *Любой нетривиальный фильтр в решетке $L_q(\mathscr{K})$ континуален, где $\mathscr{K}$ — квазимногообразие, порожденное одним из следующих классов:*

а) *всеми разрешимыми группами;*

б) *всеми конечными разрешимыми группами;*

в) *всеми разрешимыми группами без кручения;*

г) *всеми разрешимыми линейно упорядочиваемыми группами;*

д) *всеми собственными многообразиями групп;*

е) *всеми группами без кручения, каждая из которых удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если класс групп $\mathscr{K}$ замкнут относительно прямых сплетений, то и квазимногообразие, порожденное этим классом, также замкнуто относительно прямых сплетений [9]. Классы а)–е) замкнуты относительно прямых сплетений (см. [10, с. 16]). Отметим [10], что класс упорядочиваемых групп образует квазимногообразие.

В пп. а), б), д) в качестве групп A_p возьмем группы Z_p (Z_p — циклическая группа порядка p), а в качестве квазитождеств Φ_p — следующие квазитождества: $x^p = 1 \to x = 1$. В этом случае условия теоремы 1 выполнены.

В пп. в), е) в качестве групп A_p можно взять группы C_p, имеющие представление

$$C_p = \text{гр}(b, a_0, \dots, a_{p-1} \mid b^{-1}a_ib = a_{i+1},\ 0 \le i \le p-2,$$
$$b^{-1}a_{p-1}b = a_0,\ [a_i, a_j] = 1,\ 0 \le i, j \le p-1,\ a_0a_1 \dots a_{p-1} = 1).$$

В качестве квазитождеств Φ_p возьмем квазитождества

$$(xx^yx^{y^2} \dots x^{y^{p-1}} = 1)\&(\&_{i,j=0}^{p-1}[x^{y^i}, x^{y^j}] = 1)\&(x^{y^p} = x) \to x = 1.$$

Легко проверить, что квазитождество Φ_p истинно в группе C_q при $q \neq p$ и ложно в группе C_p при интерпретации $x \to a_0$, $y \to b$, причем левая часть этого квазитождества истинна в C_p и при интерпретации $x \to a_0^{-1}$, $y \to b^{-1}$, т. е. условия а), б) из теоремы 1 выполнены.

В п. г) в качестве групп A_p можно взять группы B_p, где $B_p = \text{гр}(a, b \mid a^b = a^p)$, p — простое число. Известно [11], что группа B_p линейно упорядочиваема и разрешима. Непосредственно проверяется, что в группе B_p истинно квазитождество $x^y = x^q \to x = 1$ при $q \neq p$. Квазитождество Φ_p возьмем в виде

$$(x^{-1}(x^p)^y)^y = (x^{-1}(x^p)^y)^p \to x = 1.$$

Оно, как легко проверить, истинно в группе B_q при $q \neq p$ и ложно в B_p при интерпретации $x \to a$, $y \to b$. Кроме того, это квазитождество удовлетворяет условию б) из теоремы 1. Теорема доказана.

Нетрудно указать и другие классы групп, к которым применима теорема 1. Например, справедливо.

Следствие [4]. *Любой нетривиальный фильтр в решетке $L_q(\mathscr{K})$ континуален, где $\mathscr{K}$ — квазимногообразие, порожденное всеми конечными группами.*

В заключение автор выражает благодарность профессору А. И. Будкину за поддержку и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smirnov D. M.* Varieties and quasivarieties of algebras // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1977. V. 29. P. 745–751.
2. *Будкин А. И.* О фильтрах в решетке квазимногообразий групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 4. С. 875–881.
3. *Шахова С. А.* О решетке квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп. Новосибирск, 1996. (Препринт/НИИ МИОО; № 17).
4. *Белкин В. П., Горбунов В. А.* Фильтры решеток квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 4. С. 373–392.
5. *Ленюк С. В.* Фильтры в решетке квазимногообразий метабелевых групп // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 67–73.
6. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
7. *Федоров А. Н.* О квазимногообразиях, порожденных относительно свободной группой // Изв вузов. Математика. 1986. № 6. С. 34–40.
8. *Виноградов А. А.* Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 6. С. 15–19.
9. *Будкин А. И.* Квазимногообразия групп, замкнутые относительно прямых сплетений // Мат. сб. 1983. Т. 121, № 4. С. 510–522.
10. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
11. *Медведев Н. Я.* О квазимногообразиях l-групп и групп // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 5. С. 111–117.

Статья поступила 17 июня 1999 г.

г. Барнаул
Алтайский гос. университет, кафедра алгебры и логики
`lenyuk@math.dcn-asu.ru`