*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2000. Том 41, № 4*

*УДК 510.67*

# ОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ И ГЕНЕРИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ

**К. Ж. Кудайбергенов**

**Аннотация:** Изучается поведение теоретико-модельного понятия однородности при генерических расширениях основной модели теории множеств. Доказано, что если $M$ — несчетная $\omega$-насыщенная модель несуперстабильной теории, то существует генерическое расширение основной модели теории множеств, которое сохраняет кардиналы и в котором $M$ не является однородной. Доказано также, что для моделей тотально трансцендентных теорий понятие однородности абсолютно. В случае моделей суперстабильных не тотально трансцендентных теорий показано, что иногда можно нарушить однородность в генерических расширениях, иногда нет. Библиогр. 6.

## Введение

Пусть $M$ — модель некоторой теории первого порядка. Рассмотрим $M$ как элемент счетной транзитивной модели $\mathscr{M}$ теории множеств ZFC. Нас будет интересовать вопрос о поведении теоретико-модельного понятия однородности при генерических расширениях модели $\mathscr{M}$. Мы докажем, что если $M$ — несчетная $\omega$-насыщенная и сколь угодно однородная модель несуперстабильной теории, то существует генерическое расширение модели $\mathscr{M}$, которое сохраняет кардиналы и в котором $M$ не является однородной. (Отсюда, в частности, следует, что понятие однородности не является абсолютным в теоретико-множественном смысле. Это дает ответ на вопрос, заданный автору М. Г. Перетятькиным.) Мы покажем, что однородность и насыщенность являются неабсолютными «поразному»: в некоторых генерических расширениях однородность сохраняется, а насыщенность — нет. Все это содержится в § 2 данной работы. В § 3 мы покажем, что для моделей тотально трансцендентных теорий понятие однородности абсолютно. Что касается моделей суперстабильных не тотально трансцендентных теорий, то иногда можно нарушить однородность в генерических расширениях, а иногда нельзя.

Автор выражает искреннюю благодарность Ангусу Макинтайру за его интерес к данной работе и стимулирующие обсуждения.

## § 1. Предварительные сведения

В дальнейшем теоретико-множественная терминология, связанная с методом форсинга, будет соответствовать [1]. Мощность множества $A$ будет обозначаться через $|A|$. Через $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ будем обозначать ординалы, через $\kappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ — бесконечные кардиналы, а через $\omega$ и $\omega_1$ — первый и второй бесконечные кардиналы соответственно. Через $a, b, \dots$ будем обозначать элементы (иногда последовательности элементов), через $\bar{a}, \bar{b}, \dots$ — последовательности элементов, а через $\underline{a}, \underline{b}, \dots$ — последовательности последовательностей.

Пусть ${}^{\alpha}A$ — множество всех последовательностей длины $\alpha$, состоящих из элементов множества $A$. Пусть ${}^{\lambda>}A = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} {}^{\alpha}A$ и пусть ${}^{\lambda\geq}A = {}^{\lambda>}A \cup {}^{\lambda}A$. Если $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{\lambda>}A$, то $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$ будет означать, что $\bar{a}$ — начальный отрезок $\bar{b}$. Если $\bar{b} \in {}^{\lambda}A$ и $\alpha < \lambda$, то через $\bar{b}|\alpha$ обозначим начальный отрезок в $\bar{b}$ длины $\alpha$. Через $a^\frown b$ будем обозначать последовательность, полученную присоединением $b$ к концу последовательности $a$. Если $\bar{a}_\alpha \sqsubseteq \bar{a}_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \gamma$, то объединение $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} \bar{a}_\alpha$ последовательностей $\bar{a}_\alpha$ определяется как последовательность $\bar{b}$ такая, что $\mathrm{Range}(\bar{b}) = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} \mathrm{Range}(\bar{a}_\alpha)$ и $\bar{a}_\alpha \sqsubseteq \bar{b}$ для всех $\alpha < \gamma$. Длина последовательности $\bar{a}$ будет обозначаться через $l(\bar{a})$.

Все необходимые сведения по теории моделей (особенно это касается § 2) можно найти в [2]. Тип, реализуемый последовательностью $\bar{a}$ над множеством $A$, будем обозначать через $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$. Вместо $\mathrm{tp}(\bar{a}/\varnothing)$ будем писать $\mathrm{tp}(\bar{a})$. Выражение «$p$ есть тип над $A$» будет означать, что $p = \mathrm{tp}(a/A)$ для некоторого $a$.

Определение 1. (1) Модель $M$ называется *$\lambda$-однородной*, если для любого подмножества $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ и любого $a \in M$ любое элементарное отображение из $A$ в $M$ продолжается до элементарного отображения из $A \cup \{a\}$ в $M$.

(2) Модель $M$ называется *однородной*, если она $|M|$-однородна.

Нетрудно понять, что понятие $\omega$-однородности абсолютно. Заметим также, что если модель не является $\lambda$-однородной ($\lambda$ произвольное), то она не является $\lambda$-однородной ни в каком (сохраняющем кардиналы) расширении основной модели теории множеств.

## § 2. Неабсолютность однородности

Сформулируем некоторые условия, при которых $\mu$-однородность сохраняется, а $\mu^+$-однородность не сохраняется при генерических расширениях.

Определение 2. Пусть $B \subseteq {}^{\kappa>}A \times {}^{\kappa>}A$. Будем говорить, что множество $B$ *$\mu$-замкнуто*, если для любого $\lambda < \mu$ и любых $\langle \bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha \rangle \in B$, $\alpha < \lambda$, таких, что $\bar{a}_\alpha \sqsubseteq \bar{a}_\beta$ и $\bar{b}_\alpha \sqsubseteq \bar{b}_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \lambda$, выполняется $\langle \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \bar{a}_\alpha, \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \bar{b}_\alpha \rangle \in B$.

Определение 3. (1) Модель $M$ *имеет $(\kappa, \lambda, \mu)$-свойство*, если существуют $\varnothing$-определимое множество $A \subseteq {}^{\omega>}M$ мощности $\kappa$, элемент $a_0 \in A$ и $\mu$-замкнутое множество $B \subseteq {}^{\mu>}M$ мощности $\lambda$ такие, что

(i) $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in B$ влечет $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$;

(ii) для любых $b_0 \in A$ и $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in B$ существует $\langle \bar{c}, \bar{d} \rangle \in B$ такое, что $\bar{a} \sqsubseteq \bar{c}$, $\bar{b} \sqsubseteq \bar{d}$ и $\mathrm{tp}(\bar{c}^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{d}^\frown b_0)$.

(Мы будем говорить, что $A$, $a_0$, $B$ *реализуют $(\kappa, \lambda, \mu)$-свойство*.)

(2) Модель $M$ *имеет $[\lambda, \mu)$-свойство*, если $M$ имеет $(\kappa, \lambda, \mu)$-свойство для некоторого $\kappa$.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathscr{M}$ — счетная транзитивная модель* ZFC, $M \in \mathscr{M}$ *и $\mathscr{M} \models$ ($M$ есть $\mu$-однородная модель, имеющая $[\lambda, \mu)$-свойство, $\lambda \leq \mu$). Тогда существует генерическое расширение $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$ такое, что*

(1) *$\mathscr{N}$ сохраняет кардиналы;*

(2) *$\mathscr{N} \models$ ($M$ не является $\mu^+$-однородной);*

(3) *$\mathscr{N} \models$ ($M$ $\mu$-однородна).*

Доказательство. Работаем в $\mathscr{M}$. Пусть $A$, $a_0$, $P$ реализуют $[\lambda, \mu)$-свойство. Определим частичный порядок на $P$, полагая

$$\langle \bar{c}, \bar{d} \rangle \leq \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \iff \bar{a} \sqsubseteq \bar{c} \wedge \bar{b} \sqsubseteq \bar{d}.$$

Для $c \in A$ положим

$$D_c = \{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in P : \mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown c)\}.$$

В силу $[\lambda, \mu)$-свойства модели $M$ множество $D_c$ плотно.

Выберем $\mathscr{M}$-генерическое множество $G \subseteq P$. Пусть $\mathscr{N} = \mathscr{M}[G]$ — соответствующее генерическое расширение модели $\mathscr{M}$. Так как $|P| = \lambda$ (и, следовательно, $P$ удовлетворяет $\lambda^+$-условию антицепей), то ввиду [1, теорема 3.4] $\mathscr{N}$ сохраняет каждый кардинал $\nu \geq (\lambda^+)^{\mathscr{M}}$. Так как $P$ $\mu$-замкнуто и $\lambda \leq \mu$, в силу [1, следствие 3.13] каждый кардинал $\kappa \leq \lambda^{\mathscr{M}}$ сохраняется в $\mathscr{N}$ (заметим, что $\mu$-замкнутость в нашем смысле — это $\mu'$-замкнутость для любого $\mu' < \mu$ в смысле [1]). Таким образом, $\mathscr{N}$ сохраняет кардиналы.

Теперь работаем в $\mathscr{N}$. Докажем утверждение (2). Полагаем

$$\bar{a}^* = \cup\{\bar{a} : (\exists \bar{b})(\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \in G)\}, \quad \bar{b}^* = \cup\{\bar{b} : (\exists \bar{a})(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in G)\}.$$

Ясно, что $\mathrm{tp}(\bar{a}^*) = \mathrm{tp}(\bar{b}^*)$. Так как $|G| \leq |P| \leq \lambda \leq \mu$ и $\bar{a}^*$ есть объединение последовательностей длины, меньшей чем $\mu$, то $|\bar{a}^*| \leq \mu$. Пусть $c \in A$. Поскольку $G$ является $\mathscr{M}$-генерическим и $D_c$ плотно, то существует $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in G \cap D_c$. Тогда $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$, $\bar{a} \sqsubseteq \bar{a}^*$, $\bar{b} \sqsubseteq \bar{b}^*$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown c)$. Значит, $\mathrm{tp}(\bar{a}^{*\frown} a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}^{*\frown} c)$. Отсюда и из определимости множества $A$ следует утверждение (2).

Осталось доказать (3). Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{\mu>}M$, $c \in M$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$. Так как $P$ $\mu$-замкнуто, из [1, теорема 3.12] вытекает, что $\bar{a}, \bar{b}, c \in \mathscr{M}$. Поскольку $\mathscr{M} \models$($M$ $\mu$-однородна), существует $d \in M$ такой, что $\mathscr{M} \models (\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown c) = \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown d))$ и, следовательно, $\mathscr{N} \models (\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown c) = \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown d))$.

Теорема 1 доказана.

**Предложение 2.** (1) *Если модель $M$ имеет $(\mu, \lambda, \mu)$-свойство, то $M$ не является $\mu^+$-однородной.*

(2) *Если выполняется аксиома Мартина и модель $M$ имеет $(\kappa, \omega, \omega)$-свойство для некоторого $\kappa < 2^\omega$, то $M$ не является $\omega_1$-однородной.*

(3) *Если модель $M$ не является $\mu^+$-однородной, то $M$ имеет $[\lambda, \mu)$-свойство для некоторого $\lambda \leq \mu$.*

Доказательство. (1) Пусть $A, a_0, B$ реализуют $(\mu, \lambda, \mu)$-свойство. Пусть $A = \{a_\alpha : \alpha < \mu\}$. Используя $(\mu, \lambda, \mu)$-свойство, индукцией по $\alpha < \mu$ определим $\bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha \in {}^{\mu>}M$ такие, что $\mathrm{tp}(\bar{a}_\alpha) = \mathrm{tp}(\bar{b}_\alpha)$, $\mathrm{tp}(\bar{a}_\alpha^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}_\alpha^\frown a_\alpha)$, $\bar{a}_\alpha \sqsubseteq \bar{a}_\beta$ и $\bar{b}_\alpha \sqsubseteq \bar{b}_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \mu$. Полагаем $\bar{a}^* = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \bar{a}_\alpha$, $\bar{b}^* = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \bar{b}_\alpha$. Тогда $|\bar{a}^*| \leq \mu$, $|\bar{b}^*| \leq \mu$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}^{*\frown} a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}^{*\frown} a_\alpha)$ для всех $a_\alpha \in A$. Отсюда и из определимости множества $A$ следует, что модель $M$ не является $\mu^+$-однородной.

(2) Пусть $A, a_0, B$ реализуют $(\kappa, \omega, \omega)$-свойство. Точно так же, как в теореме 1, определим частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ и плотные множества $D_c$, $c \in A$. Тогда $P$ удовлетворяет условию счетности цепей и $|\{D_c : c \in A\}| \leq \kappa < 2^\omega$. По аксиоме Мартина существует совместимое множество $G \subseteq P$ такое, что $G \cap D_c \neq \varnothing$ для любого $c \in A$. Теперь так же, как в теореме 1, доказывается, что модель $M$ не является $\omega_1$-однородной.

(3) Если модель $M$ не является $\mu^+$-однородной, то существуют $a_0 \in M$ и $\bar{a}^*, \bar{b}^* \in {}^{\mu\geq}M$ такие, что $\mathrm{tp}(\bar{a}^*) = \mathrm{tp}(\bar{b}^*)$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}^{*\frown}a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}^{*\frown}b_0)$ для любого $b_0 \in M$. Положим $A = M$ и $B = \{\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle \in {}^{\mu>}M \times {}^{\mu>}M : \bar{a} \sqsubseteq \bar{a}^*, \bar{b} \sqsubseteq \bar{b}^*\}$. Тогда $A, a_0, B$ реализуют $[\lambda, \mu)$-свойство, где $\lambda = |\bar{a}^*| \leq \mu$.

Предложение 2 доказано.

Теперь покажем, что существуют сколь угодно однородные модели, имеющие $[\lambda, \mu)$-свойство.

**Теорема 3.** *Любая $\omega$-насыщенная модель несуперстабильной теории имеет $[\omega, \omega)$-свойство.*

Доказательство. Пусть $M$ есть $\omega$-насыщенная модель несуперстабильной теории $T$, $Q$ — счетный плотный линейный порядок без концевых точек и

$$I = ({}^{\omega\geq}Q, P_\alpha, <, \lhd, h)_{\alpha\leq\omega},$$

где

(i) $P_\alpha = \{\eta \in {}^{\omega\geq}Q : l(\eta) = \alpha\}$ для всех $\alpha \leq \omega$;

(ii) $<$ есть лексикографический порядок на ${}^{\omega\geq}Q$;

(iii) $\lhd$ есть отношение «быть собственным начальным сегментом»;

(iv) $h$ есть такая бинарная функция, что $h(\eta, \nu)$ — наибольший общий начальный сегмент в $\eta$ и $\nu$.

Так как теория $T$ не суперстабильна, в силу леммы 3.5 и теоремы 3.6 из [2, гл. VII] и теоремы компактности $T$ имеет неразличимое сильно униформное $(Q, \omega)$-дерево вида $\langle\langle\varphi_\alpha, 1\rangle : \alpha < \omega\rangle$ ($\varphi_\alpha$ — формула теории $T$). Это означает, что существует множество $\{\bar{a}_\eta : \eta \in {}^{\omega\geq}Q\}$ такое, что

(1) $\bar{a}_\eta$ реализует $\{\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{a}_{\eta|\alpha}) : \alpha < \omega\}$ для любого $\eta \in {}^{\omega}Q$;

(2) $\models \neg(\exists \bar{x})(\varphi_{\alpha+1}(\bar{x}, \bar{a}_{\eta^\frown\langle j\rangle}) \wedge \varphi_{\alpha+1}(\bar{x}, \bar{a}_{\eta^\frown\langle k\rangle}))$ для всех $j \neq k$ из $Q$, $\alpha < \omega$, $\eta \in {}^{\alpha}Q$;

(3) для любого $n < \omega$ если $\langle \eta_i : i < n\rangle \simeq \langle \tau_i : i < n\rangle$ (т. е. эти последовательности реализуют один и тот же бескванторный тип в модели $I$), то $\mathrm{tp}(\langle \bar{a}_{\eta_i} : i < n\rangle) = \mathrm{tp}(\langle \bar{a}_{\tau_i} : i < n\rangle)$, где $\mathrm{tp}(\dots)$ — тип в теории $T$.

Пусть $\eta^* \in {}^{\omega}Q$. В силу $\omega$-насыщенности модели $M$ можно предполагать, что $\{\bar{a}_\eta : \eta \in {}^{\omega>}Q \cup \{\eta^*\}\} \subseteq M$. Положим

$$P = \{\langle\langle \bar{a}_{\eta_i} : i < n\rangle, \langle \bar{a}_{\tau_i} : i < n\rangle\rangle : \eta_i, \tau_i \in {}^{\omega>}Q,\ i < n < \omega, \\ \langle \eta_i : i < n\rangle \simeq \langle \tau_i : i < n\rangle\}.$$

Покажем, что ${}^{m}M$, $\bar{a}_{\eta^*}$, $P$, где $m = l(\bar{a}_{\eta^*})$, реализуют $[\omega, \omega)$-свойство. Пусть $\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle \in P$ и $\bar{e} \in {}^{m}M$. Нужно найти $\langle \underline{c}, \underline{d}\rangle$, удовлетворяющее условию

(4) $\langle \underline{c}, \underline{d}\rangle \in P$, $\underline{a} \sqsubseteq \underline{c}$, $\underline{b} \sqsubseteq \underline{d}$ и $\mathrm{tp}(\underline{c}^\frown\bar{a}_{\eta^*}) \neq \mathrm{tp}(\underline{b}^\frown\bar{e})$.

Пусть $\underline{a} = \langle \bar{a}_{\eta_i} : i < n\rangle$, $\underline{b} = \langle \bar{b}_{\eta_i} : i < n\rangle$. Выберем $\eta_n \in {}^{\omega>}Q$ такое, что

(5) $\eta_n \lhd \eta^*$ и $\neg(\eta_n \lhd \eta_i)$ для любого $i < n$.

Так как $\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle \in P$, то $\langle \eta_i : i < n\rangle \simeq \langle \tau_i : i < n\rangle$. В силу плотности лексикографического порядка на ${}^{\omega>}Q$ существует $\tau_n \in {}^{\omega>}Q$ такое, что

(6) $\langle \tau_i : i \leq n\rangle \simeq \langle \eta_i : i \leq n\rangle$.

Поскольку $\eta_n \lhd \eta^*$, то $\eta_n^\frown\langle j\rangle \lhd \eta^*$ для некоторого $j \in Q$. Пусть

(7) $k \in Q$, $k \neq j$, $\eta = \eta_n^\frown\langle j\rangle$, $\eta' = \eta_n^\frown\langle k\rangle$, $\tau = \tau_n^\frown\langle j\rangle$.

В частности, имеем

(8) $\eta \lhd \eta^*$.

Из (5)–(7) следует

(9) $\langle \eta_0, \dots, \eta_n, \eta\rangle \simeq \langle \eta_0, \dots, \eta_n, \eta'\rangle \simeq \langle \tau_0, \dots, \tau_n, \tau\rangle$.

Заметим, что либо

(10) $\mathrm{tp}(\langle \bar{a}_{\eta^*}, \bar{a}_\eta \rangle) \neq \mathrm{tp}(\langle \bar{e}, \bar{a}_\tau \rangle)$,

либо

(11) $\mathrm{tp}(\langle \bar{a}_{\eta^*}, \bar{a}_{\eta'} \rangle) \neq \mathrm{tp}(\langle \bar{e}, \bar{a}_\tau \rangle)$.

Действительно, в противном случае $\mathrm{tp}(\langle \bar{a}_{\eta^*}, \bar{a}_\eta \rangle) = \mathrm{tp}(\langle \bar{a}_{\eta^*}, \bar{a}_{\eta'} \rangle)$. Отсюда и из (1) и (8) вытекает, что $\models \varphi_\alpha(\bar{a}_{\eta^*}, \bar{a}_\eta) \wedge \varphi_\alpha(\bar{a}_{\eta^*}, \bar{a}_{\eta'})$, где $\alpha = l(\eta)$. Вместе с (7) это противоречит условию (2).

Если выполняется (10), то полагаем $\underline{c} = \underline{a}^\frown \bar{a}_\eta$, если выполняется (11), то $\underline{c} = \underline{a}^\frown \bar{a}_{\eta'}$. Пусть $\underline{d} = \underline{b}^\frown \bar{a}_\tau$. Тогда из (9)–(11) получим (4).

Теорема 3 доказана.

Для нестабильных теорий можно доказать немного больше.

**Теорема 4.** *Любая $\kappa$-насыщенная модель нестабильной теории имеет $[\lambda, \lambda)$-свойство для любого $\lambda \leq \kappa$, удовлетворяющего условию $\lambda^{<\lambda} = \lambda$.*

Доказательство. Пусть $M$ — $\kappa$-насыщенная модель нестабильной теории $T$, $\lambda \leq \kappa$ и $\lambda^{<\lambda} = \lambda$. В силу теоремы 2.13 из [2, гл. II] существуют формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ теории $T$, множество $I \subseteq {}^n M$ мощности $\lambda$, где $n = l(\bar{x}) = l(\bar{y})$, и отношение $<$ на $I$ такие, что

(1) $(I, <)$ — $\lambda$-насыщенный плотный линейный порядок;

(2) $(I, <)$ — неразличимая последовательность в модели $M$;

(3) $(\forall a, b \in I)[a < b \iff \models \varphi(a, b)]$.

Пусть $A = {}^n M$, $a_0$ — произвольный (не максимальный и не минимальный) элемент из $I$ и

$$B = \{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in {}^{\lambda>} I \times {}^{\lambda>} I : \mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})\}.$$

Покажем, что $A$, $a_0$, $B$ реализуют $[\lambda, \lambda)$-свойство.

Так как $\lambda^{<\lambda} = \lambda$, то $|B| = \lambda$. Поскольку кардинал $\lambda$ регулярен (в противном случае $cf(\lambda) < \lambda$ и, следовательно, $\lambda^{<\lambda} \geq \lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$, что является противоречием), множество $B$ $\lambda$-замкнуто. Пусть $b_0 \in A$ и $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in B$. Нужно найти $\langle \bar{c}, \bar{d} \rangle \in B$ такое, что $\bar{a} \sqsubseteq \bar{c}$, $\bar{b} \sqsubseteq \bar{d}$ и $\mathrm{tp}(\bar{c}^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{d}^\frown b_0)$.

В силу (1) существуют $a_1, a_2 \in I$ такие, что

(4) $a_1 < a_0 < a_2$;

(5) $\bar{a}^\frown a_1$ и $\bar{a}^\frown a_2$ реализуют один и тот же тип в модели $(I, <)$.

С учетом равенства $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$ (в теории $T$) отображение $f : \bar{a} \to \bar{b}$ является элементарным. В силу (3) $f$ сохраняет порядок и потому ввиду (1) продолжается до сохраняющего порядок отображения $g : \bar{a} \cup a_1 \to I$. Пусть $b_1 = g(a_1)$ и $\bar{d} = \bar{b}^\frown b_1$. Если $\models \varphi(b_1, b_0)$, то полагаем $\bar{c} = \bar{a}^\frown a_2$; в противном случае — $\bar{c} = \bar{a}^\frown a_1$. Тогда согласно (3) и (4) имеем $\mathrm{tp}(\bar{c}^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{d}^\frown b_0)$. Так как $g$ сохраняет порядок, в силу (2) и (5) $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{d})$.

Теорема 4 доказана.

Замечание. Из теорем 3 и 4 нельзя убрать условие о насыщенности. Например, рассмотрим модель $M = (A \cup B, A, B, \leq)$, где $\leq \subseteq A \times A$, $(A, \leq)$ изоморфно $\omega$, $A \cap B = \varnothing$ и $B$ может иметь какую угодно мощность. Тогда $M$ однородна и остается однородной в любом расширении основной модели ZFC. Условие о не(супер)стабильности тоже нельзя убрать: в качестве очевидного примера достаточно рассмотреть любую модель чистой теории равенства (эта теория суперстабильна и даже тотально трансцендентна). Впрочем, в следующем параграфе мы покажем, что для моделей тотально трансцендентных теорий понятие однородности абсолютно.

Будем называть модель (супер)стабильной, если ее теория (супер)стабильна.

**Теорема 5.** (1) *Для любого кардинала $\lambda$, удовлетворяющего условию $\lambda^{<\lambda} = \lambda$, существует однородная стабильная модель сколь угодно большой мощности в языке мощности $\lambda$, имеющая $(2^\lambda, \lambda, \lambda)$-свойство.*

(2) *Существует однородная суперстабильная модель сколь угодно большой мощности в счетном языке, имеющая $(2^\omega, \omega, \omega)$-свойство.*

(3) *Для любого $\kappa \geq 2^\omega$ и любого $\mu \geq \kappa$ существует $\kappa$-насыщенная суперстабильная модель мощности $\mu$ в счетном языке, имеющая $(\kappa, \omega, \omega)$-свойство.*

Доказательство. (1) Зафиксируем $\lambda$, удовлетворяющее условию $\lambda^{<\lambda} = \lambda$. Рассмотрим модель $M = ({}^{\lambda\geq}2, P_\alpha, E_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}$, где $E_\alpha = \{\langle a, b\rangle : a, b \in {}^\lambda 2, a|\alpha = b|\alpha\}$, $P_\alpha = {}^\alpha 2$, $f_\alpha$ — функция из ${}^\lambda 2$ на $P_\alpha$ такая, что $f_\alpha^{-1}(a) = \{b \in {}^\lambda 2 : a \sqsubseteq b\}$ для любого $a \in P_\alpha$.

Эта модель стабильна. Покажем, что она $(2^\lambda)^+$-однородна. Модель $M$ $\varnothing$-определима в модели $N = ({}^{\lambda\geq}2, P'_\alpha, \leq')_{\alpha\leq\lambda}$, где $\leq' = \{\langle a, b\rangle : a, b \in {}^\lambda 2, a \sqsubseteq b\}$, $P'_\alpha = {}^\alpha 2$. Действительно, имеем $P_\alpha = P'_\alpha$, $f_\alpha(x) = y \iff P_\lambda(x) \wedge P_\alpha(y) \wedge y \leq' x$, $E_\alpha(x, y) \iff P_\lambda(x) \wedge P_\lambda(y) \wedge (\exists z)(P_\alpha(z) \wedge z \leq' x \sqcap y)$, где $\sqcap$ — операция взятия точной нижней грани в частичном порядке $\leq'$, т. е.

$$x \sqcap y = z \iff z \leq' x \wedge z \leq' y \wedge \neg(\exists t)(z <' t \wedge t <' x \wedge t <' y).$$

(Как обычно, $z <' t$ означает $z \leq' t \wedge z \neq t$.)

Модель вида $N$ изучалась в работе [3], и было доказано, что такая модель $(2^\lambda)^+$-однородна.

Пусть $X$ — подмножество модели $N$. Отображение $f : X \to N$ назовем *хорошим*, если

$$(a \leq' b \iff f(a) \leq' f(b)) \wedge l(a \sqcap b) = l(f(a) \sqcap f(b))$$

для всех $a, b \in N$. Из доказательства основной теоремы работы [3] следует, что любое хорошее отображение продолжается до автоморфизма модели $N$ и, значит, является элементарным.

Пусть $X$ — подмножество модели $M$. Рассмотрим элементарное (в $M$) отображение $f : X \to M$. Нужно доказать, что $f$ продолжается до автоморфизма модели $M$. Имеем

$$a \leq' b \iff (\exists\alpha\beta)\big(P_\alpha(a) \wedge P_\beta(b) \wedge f_\beta^{-1}(b) \subseteq f_\alpha^{-1}(a)\big),$$

$$l(a \sqcap b) = \gamma \iff (\exists xy)(a \leq' x \wedge b \leq' y \wedge E_\gamma(x, y) \wedge E_{\gamma+1}(x, y)).$$

Отсюда и из элементарности $f$ (в $M$) вытекает, что $f$ — хорошее отображение и потому продолжается до автоморфизма $g$ модели $N$. Так как модель $M$ $\varnothing$-определима в модели $N$, то $g$ является автоморфизмом модели $M$ и $(2^\lambda)^+$-однородность $M$ доказана.

Пусть $A = P_\lambda$, $a_0$ — произвольный элемент из $A$ и

$$B = \{\langle\bar a, \bar b\rangle : \bar a, \bar b \in {}^{\lambda>}(M - A), \mathrm{tp}(\bar a) = \mathrm{tp}(\bar b)\}.$$

Покажем, что $A$, $a_0$, $B$ реализуют $(2^\lambda, \lambda, \lambda)$-свойство.

Ясно, что $|A| = 2^\lambda$. Так как $\lambda^{<\lambda} = \lambda$, то $|B| = \lambda$. Поскольку кардинал $\lambda$ регулярен (в противном случае $cf(\lambda) < \lambda$ и потому $\lambda^{<\lambda} \geq \lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$, что является противоречием), множество $B$ $\lambda$-замкнуто. Пусть $b_0 \in A$ и $\langle\bar a, \bar b\rangle \in B$. Нужно найти $\langle\bar c, \bar d\rangle \in B$ такое, что $\bar a \sqsubseteq \bar c$, $\bar b \sqsubseteq \bar d$ и $\mathrm{tp}(\bar c^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar d^\frown b_0)$.

Если $\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown b_0)$, то полагаем $\bar{c} = \bar{a}$ и $\bar{d} = \bar{b}$. Допустим, что $\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_0) = \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown b_0)$. Тогда отображение $f : \bar{a}^\frown a_0 \to \bar{b}^\frown b_0$ является элементарным и потому в силу однородности модели $M$ продолжается до автоморфизма $g$ модели $M$. Выберем элемент $a_1 \in M$ такой, что $a_1 <' a_0$ и $a_1 \not<' a'$ для любого элемента $a'$ из $\bar{a}$. Это можно сделать, потому что $\bar{a} \in B \subseteq {}^{\lambda>}(M - A)$ и тем самым $l(\bar{a}) < \lambda$, а $a_0 \in A$ и потому $|\{a \in M : a <' a_0\}| = \lambda$.

Пусть $a_2, a_3 \in M$ — непосредственные последователи $a_1$. Так как $a_1 <' a_0$, можно предполагать, что $a_2 <' a_0$. Пусть $b_2 = g(a_2)$. Поскольку $g$ — автоморфизм, то $\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_2^\frown a_0) = \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown b_2^\frown b_0)$. Пусть $h$ — отображение, которое меняет местами $a_2$ и $a_3$ и фиксирует $\bar{a}^\frown a_1$. Тогда $h$ является хорошим отображением и, следовательно, продолжается до автоморфизма модели $N$. Отсюда и из $\varnothing$-определимости модели $M$ в $N$ следует, что $\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_3) = \mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_2)$. Полагаем $\bar{c} = \bar{a}^\frown a_3$ и $\bar{d} = \bar{b}^\frown b_2$. Тогда $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_2) = \mathrm{tp}(\bar{d})$ и потому $\langle \bar{c}, \bar{d} \rangle \in B$. Так как $a_2 <' a_0$ и $a_3 \not<' a_0$, для некоторого $\alpha < \lambda$ имеем $f_\alpha(a_0) = a_2$ и $f_\alpha(a_0) \neq a_3$. Следовательно,

$$\mathrm{tp}(\bar{c}^\frown a_0) = \mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_3^\frown a_0) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}^\frown a_2^\frown a_0) = \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown b_2^\frown b_0) = \mathrm{tp}(\bar{d}^\frown b_0).$$

Итак, существует $(2^\lambda)^+$-однородная модель мощности $2^\lambda$, имеющая $(2^\lambda, \lambda, \lambda)$-свойство. Для того чтобы получить однородную модель, имеющую $(2^\lambda, \lambda, \lambda)$-свойство и мощность $\mu > 2^\lambda$, добавим $\mu$ новых элементов к $M$, новый унарный предикат, чтобы отделить их от $M$, и больше никакой дополнительной структуры. Утверждение (1) доказано.

При $\lambda = \omega$ модель $M$ суперстабильна, так что утверждение (2) тоже доказано. Осталось доказать (3). Так как $M$ суперстабильна, для любого $\kappa \geq 2^\omega$ теория $Th(M)$ имеет насыщенную модель $N$ мощности $\kappa$. Доказательство утверждения (1) показывает, что $N$ имеет $\left(|P_\omega^N|, \omega, \omega\right)$-свойство. Для того, чтобы получить $\kappa$-насыщенную модель, имеющую $(\kappa, \omega, \omega)$-свойство и мощность $\mu > \kappa$, действуем как раньше: добавляем $\mu$ новых элементов к $N$ и новый унарный предикат.

Теорема 5 доказана.

Обозначим через $F_n(T)$ множество всех формул теории $T$ с переменными $x_0, \dots, x_{n-1}$, а через $S_n(T)$ — множество всех $n$-типов (над $\varnothing$). Пусть $D(T) = \bigcup\limits_{n<\omega} S_n(T)$.

Определение 4. Модель $M$ называется *слабо насыщенной*, если все типы из $D(T)$ реализуются в $M$.

**Теорема 6.** *Пусть $\mathscr{M}$ — счетная транзитивная модель теории* ZFC, $T \in \mathscr{M}$ *и $M \in \mathscr{M}$ и $\mathscr{M} \models$ ($M$ есть модель счетной теории $T$ такой, что $|D(T)| > \omega$). Тогда существует генерическое расширение $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$ такое, что*

*(1) $\mathscr{N}$ сохраняет кардиналы;*

*(2) $\mathscr{N} \models$ ($M$ не является слабо насыщенной).*

Доказательство. Работаем в модели $\mathscr{M}$. Так как $|D(T)| > \omega$, то $|S_n(T)| > \omega$ для некоторого $n < \omega$. Полагаем

$$P = \{p : p \subseteq F_n(T),\ |p| < \omega,\ |U(p)| > \omega\},$$

где $U(p) = \{q \in S_n(T) : p \subseteq q\}$. Для $p, p' \in P$ полагаем $p \leq p' \iff p' \subseteq p$. Ясно, что $(P, \leq)$ — частично упорядоченное множество. Для $q \in F_n(T)$ полагаем $D_q = \{p \in P : p \not\subseteq q\}$. Покажем, что множество $D_q$ плотно. Пусть $p \in P$.

Тогда существует формула $\varphi \in F_n(T)$ такая, что $p \cup \{\varphi\} \in P$ и $p \cup \{\neg\varphi\} \in P$. Действительно, пусть

$$U = \cup\{U(p \cup \{\varphi\}) : \varphi \in F_n(T), |U(p \cup \{\varphi\})| \leq \omega\}.$$

Так как теория $T$ счетна, то $|U| \leq \omega \cdot |F_n(T)| = \omega$. Поскольку $p \in P$, имеем $|U(p)| > \omega$. Следовательно, существуют $q, q' \in U(p) - U$, $q \neq q'$. Выберем формулу $\varphi \in q$ такую, что $\neg\varphi \in q'$. Тогда $q \in U(p \cup \{\varphi\})$ и если $|U(p \cup \{\varphi\})| \leq \omega$, то $q \in U$, что противоречит выбору $q$. Поэтому $|U(p \cup \{\varphi\})| > \omega$. Аналогично $|U(p \cup \{\neg\varphi\})| > \omega$. Следовательно, $p \cup \{\varphi\} \in P$ и $p \cup \{\neg\varphi\} \in P$. Так как $q$ совместно, то либо $p \cup \{\varphi\} \not\subseteq q$, либо $p \cup \{\neg\varphi\} \not\subseteq q$ и плотность $D_q$ доказана.

Выберем $\mathscr{M}$-генерическое множество $G \subseteq P$. Пусть $\mathscr{N} = \mathscr{M}[G]$ — соответствующее генерическое расширение модели $\mathscr{M}$. С учетом того, что $P$ счетно и потому удовлетворяет условию счетности цепей, $\mathscr{N}$ сохраняет кардиналы.

Теперь работаем в $\mathscr{N}$. Пусть $p^* = \cup G$. Ясно, что $p^*$ есть $n$-тип над $\varnothing$. Покажем, что $p^*$ опускается в $M$. Пусть $\bar{a} \in {}^nM$. Так как $M \in \mathscr{M}$ и модель $\mathscr{M}$ транзитивна, то $\bar{a} \in \mathscr{M}$. Пусть $q = \mathrm{tp}(\bar{a})$. Поскольку $G$ есть $\mathscr{M}$-генерическое множество, а $D_q$ плотно, существует $p \in G \cap D_q$. Тогда $p \subseteq p^*$ и $p \not\subseteq q$. Следовательно, $p^* \not\subseteq q$, и потому $\bar{a}$ не реализует $p^*$. Итак, $p^*$ опускается в $M$, поэтому модель $M$ не является слабо насыщенной.

Теорема 6 доказана.

**Следствие 7.** *Пусть $\mathscr{M}$ — счетная транзитивная модель теории ZFC, $T \in \mathscr{M}$ и $M \in \mathscr{M}$ и $\mathscr{M} \models$ ($M$ есть модель $\omega$-категоричной, но не $\omega$-стабильной теории $T$). Тогда существует генерическое расширение $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$ такое, что*

(1) *$\mathscr{N}$ сохраняет кардиналы;*

(2) *$\mathscr{N} \models$ ($M$ не является $\omega_1$-однородной).*

Доказательство. Так как теория $T$ не является $\omega$-стабильной в $\mathscr{M}$, существует счетное множество $A \in \mathscr{M}$, $A \subseteq M$, такое, что $|D(T_A)| > \omega$, где $T_A$ — теория модели $M_A = (M, a)_{a \in A}$. По теореме 6 существует генерическое расширение $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$, которое сохраняет кардиналы и в котором модель $M_A$ не является слабо насыщенной, а потому модель $M$ не является $\omega_1$-насыщенной. Теория $T$ остается $\omega$-категоричной в $\mathscr{N}$, потому что по теореме Рыль-Нардзевского $\omega$-категоричность эквивалентна следующему абсолютному условию: для любого $n < \omega$ теория $T$ имеет лишь конечное число попарно неэквивалентных формул с $n$ свободными переменными. Отсюда следует, что модель $M$ не является $\omega_1$-однородной в $\mathscr{M}$.

Следствие 7 доказано.

Теперь покажем, что однородность и насыщенность неабсолютны «по-разному».

**Теорема 8.** *Пусть $\mathscr{M}$ — счетная транзитивная модель теории ZFC. Тогда для любого кардинала $\lambda$ модели $\mathscr{M}$ существуют $M \in \mathscr{M}$ и генерическое расширение $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$ такие, что*

(1) *$\mathscr{M} \models$ ($M$ есть $\lambda$-насыщенная модель);*

(2) *$\mathscr{N}$ сохраняет кардиналы;*

(3) *$\mathscr{N} \models$ ($M$ $\lambda$-однородна, но не слабо насыщенна).*

Доказательство. В качестве $M$ возьмем $\lambda$-насыщенную модель теории счетного числа независимых унарных предикатов $P_0, P_1, \ldots$ (аксиомы этой теории утверждают, что любая конечная булева комбинация формул $P_0(x), P_1(x), \ldots$

совместна). По теореме 6 существует генерическое расширение $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$, которое сохраняет кардиналы и в котором модель $M$ не является слабо насыщенной. Легко понять, что модель $M$ остается $\lambda$-однородной в $\mathscr{N}$.

Теорема 8 доказана.

Замечание. Легко понять, что если $M$ — произвольная однородная модель теории бесконечного числа независимых унарных предикатов (эта теория суперстабильна, но не тотально трансцендентна), то $M$ остается однородной в любом расширении основной модели ZFC. Вместе с теоремой 5 это показывает, что в суперстабильном не тотально трансцендентном случае иногда можно нарушить однородность в генерических расширениях, иногда нельзя.

## § 3. Тотально трансцендентный случай

**Теорема 9.** *Пусть $\mathscr{M}$ — счетная транзитивная модель теории* ZFC, $M \in \mathscr{M}$ *и* $\mathscr{M} \models$ ($M$ *есть $\lambda$-однородная модель тотально трансцендентной теории*). *Тогда* $\mathscr{N} \models$ ($M$ *$\lambda$-однородна*) *для любого расширения $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$, которое сохраняет кардиналы. Кроме того, если $\lambda = |M|$, то* $\mathscr{N} \models$ ($M$ *однородна*) *для любого расширения $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$* (*даже если оно не сохраняет кардиналы*).

Для доказательства теоремы 9 нам потребуется некоторая подготовка.

Пусть $D(A)$ — множество всех типов над $\varnothing$, реализуемых конечными последовательностями элементов из $A$, и пусть $D$ — множество вида $D(M)$, где $M$ — модель. Множество $A$ называется $D$-*множеством*, если $D(A) \subseteq D$. Полный тип $p$ над множеством $A$ называется $D$-*типом*, если $A \cup \{a\}$ является $D$-множеством для любого элемента $a$, реализующего $p$.

Определение 5. Модель $M$ называется $(D, \lambda)$-*однородной*, если $D(M) = D$ и $M$ $\lambda$-однородна.

По теореме Кейслера и Морли [4] если модель $M$ $(D, \lambda)$-однородна, а $D$-множества $A$ и $B$ таковы, что $A \subseteq B$, $|A| < \lambda$ и $|B| \leq \lambda$, то любое элементарное отображение из $A$ в $M$ продолжается до элементарного отображения из $B$ в $M$. Отсюда вытекает следующая

**Лемма 10.** *Модель $M$ $(D, \lambda)$-однородна тогда и только тогда, когда $D(M) = D$ и для любого подмножества $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ любой $D$-тип над $A$ реализуется в $M$.*

Пусть $p$ — тип над подмножеством $A$ модели $M$. Определим $\dim(p, M)$ как наименьший кардинал $\lambda$ такой, что $\lambda = |I|$ для некоторого максимального независимого над $A$ множества $I$ реализаций типа $p$ в модели $M$.

**Лемма 11.** *Пусть $p$ — стационарный тип над подмножеством $A$ модели $M$ суперстабильной теории. Если* $\dim(p, M) \geq \omega$, *то* $\dim(p, M) = |J|$ *для любого максимального независимого над $A$ множества $J$ реализаций типа $p$ в $M$.*

Доказательство следует из леммы 4.20 и леммы 3.9 из [2, гл. III].

**Лемма 12.** *Пусть $M$ — модель тотально трансцендентной теории $T$ и $\lambda > \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$M$ $\lambda$-однородна;*

(2) *$M$ $\omega$-однородна и $|I| \geq \lambda$ для любого максимального бесконечного неразличимого множества $I \subseteq M$;*

(3) *$M$ $\omega$-однородна и $\dim(p, M) \geq \lambda$ для любого такого стационарного 1-типа $p$ над конечным подмножеством модели $M$, что $\dim(p, M) \geq \omega$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Допустим, что существует максимальное бесконечное неразличимое множество $I \subseteq M$ мощности $|I| < \lambda$. Пусть $a \in I$ и $f : I - \{a\} \to I$ — произвольная биекция. Так как $I$ — неразличимое множество, отображение $f$ элементарно. Поскольку модель $M$ $\lambda$-однородна, $f$ продолжается до элементарного отображения $g : I \to M$. Но тогда $I$ — собственное подмножество неразличимого множества $g(I)$, что противоречит максимальности $I$.

(2)⇒(3). Если $p$ — стационарный тип над $A$, то любое независимое над $A$ множество реализаций типа $p$ в $M$ является неразличимым.

(3)⇒(1). Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, и пусть $f : A \to M$ — элементарное отображение. Пусть $a \in M$ и $p = \mathrm{tp}(a/A)$. Нужно доказать, что $f(p)$ реализуется в $M$. Пусть $D = D(M)$. По предложению 2.2 работы [5] существует $(D, \omega)$-однородная модель $N$, которая содержит $A$ и проста над $A$ в классе $(D, \omega)$-однородных моделей теории $T$. Так как $N$ проста над $A$, можно предполагать, что $N$ — элементарная подмодель модели $M$. Если $a \in N$, то $f(a)$ реализует $f(p)$, и лемма доказана. Предположим, что $a \notin N$. Пусть $q = \mathrm{tp}(a/N)$. Поскольку теория $T$ тотально трансцендентна, существует конечное $B \subseteq M$ такое, что $q$ не ответвляется над $B$ и $q\lceil B$ стационарен. Индукцией по $n < \omega$ найдем элемент $a_n \in M$, реализующий тип $q_n = q\lceil(B \cup \{a_i : i < \omega\})$. Это можно сделать с помощью леммы 10, потому что модель $M$ $(D, \omega)$-однородна, а $q_n$, очевидно, является $D$-типом над конечным множеством. Тогда $I = \{f(a_n) : n < \omega\}$ будет независимым над $f(B)$ множеством реализаций типа $f(q\lceil B)$. Расширим $I$ до максимального такого множества $J$ в $M$. В силу (3) $|J| \geq \lambda$. В силу того, что тип $p$ стационарен, $J$ — неразличимое множество и $Av(J/N) = f(q)$. Так как теория $T$ тотально трансцендентна, существует $J' \subseteq J$ такое, что $J - J'$ неразличимо над $f(A)$ и $|J'| \leq \omega + |f(A)| < \lambda$. Тогда $J - J'$ бесконечно и любой его элемент реализует $Av(J - J'/f(A)) = Av(J/f(A)) = f(q\lceil A) = f(p)$.

Лемма 12 доказана.

**Лемма 13.** *Понятия неответвляемости и независимости абсолютны.*

Доказательство. Множество $I$ независимо над $A$, если и только если для любого $a \in I$ тип $\mathrm{tp}(a/A \cup (I - \{a\}))$ не ответвляется над $A$. Тип $p$ не ответвляется над $A$, если и только если некоторая формула из $p$ не ответвляется над $A$. Остается заметить, что формула $\varphi(x, \bar{c})$ не ответвляется над множеством $A$, если и только если существует формула $\delta(\bar{x})$ с параметрами из $A$, $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$, такая, что

$$\models (\exists \bar{x})\delta(\bar{x}) \wedge (\forall \bar{x})[\delta(\bar{x}) \to (\varphi(x_0, \bar{c}) \vee \dots \vee \varphi(x_n, \bar{c}))]$$

(см., например, [6]).

Лемма 13 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathscr{N}$ — расширение модели $\mathscr{M}$, которое сохраняет кардиналы. Работаем в $\mathscr{N}$. Как известно, понятие тотальной трансцендентности абсолютно, поэтому $\mathrm{Th}(M)$ тотально трансцендентна (в $\mathscr{N}$). Докажем, что $M$ $\lambda$-однородна, с помощью леммы 12. Как мы уже отмечали, понятие $\omega$-однородности абсолютно, поэтому $M$ $\omega$-однородна (в $\mathscr{N}$). Пусть $p$ — тип над конечным подмножеством $A$ модели $M$, и пусть $\dim(p, M) \geq \omega$. В частности, некоторый элемент $a \in M$ реализует $p$. Заметим, что $a \in \mathscr{M}$, $A \in \mathscr{M}$ (так как $A$ конечно) и $L(A) \in \mathscr{M}$, где $L(A)$ — множество формул с параметрами из

$A$. Так как $p = \{\varphi(x) \in L(A) : M \models \varphi(a)\}$ и «$M \models \varphi(a)$» абсолютно, то $p \in \mathscr{M}$. Поскольку по лемме 13 понятие неответвляемости абсолютно и $p$ стационарен (в $\mathscr{N}$), то $\mathscr{M} \models$ ($p$ стационарен). Пусть $I$ — независимое над $A$ множество реализаций типа $p$ в $M$, $|I| = n < \omega$. Тогда $I \in \mathscr{M}$, и по лемме 13, $\mathscr{M} \models$ ($I$ независимо). В силу того, что $\mathscr{M} \models$ ($M$ $\omega$-однородна), $\mathscr{M} \models (\dim(p, M) \geq n)$ для любого $n < \omega$ и потому $\mathscr{M} \models (\dim(p, M) \geq \omega)$. Так как $\mathscr{M} \models$ ($M$ $\lambda$-*однородна*), по лемме 12 $\mathscr{M} \models (\dim(p, M) \geq \lambda)$. Отсюда и из леммы 11 следует, что $\mathscr{N} \models (\dim(p, M) \geq \lambda)$, поэтому по лемме 12 $\mathscr{N} \models$ ($M$ $\lambda$-однородна).

Теорема 9 доказана.

Замечание. Точно так же доказывается аналог теоремы 9 для насыщенности.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Берджес Дж. П.* Вынуждение // Справочная книга по математической логике. Ч. II: Теория множеств. М.: Наука, 1982. С. 99–157.
2. *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam: North--Holland, 1978.
3. *Кудайбергенов К. Ж.* Об одной гипотезе Шелаха // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. С. 191–203.
4. *Keisler H. J., Morley M. D.* On the number of homogeneous models of a given power // Israel J. Math. 1967. V. 5. P. 73–78.
5. *Кудайбергенов К. Ж.* Об однородных моделях одноразмерностных теорий // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 1. С. 61–78.
6. *Harnik V.* Generic formulas and types a la Hodges // The model theory of groups. Notre Dame: Notre Dame Univ. Press, 1989. P. 88–99.


*Статья поступила 8 февраля 1998 г.*

*г. Алматы*
*Институт математики МОиН РК*
kanat@math.kz