Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.518.2+517.956

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КЛАССОВ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КОМПАКТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. В. Коробков

Аннотация: Изучаются вопросы устойчивости классов отображений $\mathfrak{Z}(G)$, порожденных компактными подмножествами G пространства $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ в следующем смысле: $\mathfrak{Z}(G)$ состоит из локально липшицевых отображений $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$ областей $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, для каждого из которых существует компонента связности K множества G, такая, что дифференциалы $g'(x)$ почти во всех точках $x \in \operatorname{dom} g$ принадлежат K. Доказано, что класс $\mathfrak{Z}(G)$ устойчив, если G допускает представление в виде $G = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \bigcup\limits_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha$, где G_i^α — выпуклые компактные множества, причем для всех $\alpha \in A$ $\quad G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing$ при $i \neq j$. Показано, что при $n = 1$ это условие становится также и необходимым для устойчивости классов $\mathfrak{Z}(G)$, а при $m = 1$ критерием устойчивости является выпуклость компонент связности G. Кроме того, получены теоремы об устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными, а также теорема об устойчивости классов конформных отображений, которые могут содержать в себе одновременно как сохраняющие, так и меняющие ориентацию отображения. Библиогр. 10.

Теория устойчивости классов отображений играет значительную роль в современном анализе. Одним из ведущих направлений в ней являются исследования по устойчивости плоских и пространственных конформных отображений (см., например, [1]). Альтернативное направление исследований было предложено Ф. Джоном в его работах по устойчивости класса изометрических преобразований [2]. Дальнейшее развитие теория устойчивости получила благодаря созданию А. П. Копыловым общих подходов к изучению проблем устойчивости классов отображений, названных им концепциями ξ- и ω-устойчивости [3, 4]. Первая из них восходит к теории устойчивости конформных отображений, в то время как вторая имеет дело с классами липшицевых отображений и регулярным образом согласуется с упомянутой теорией Ф. Джона. А именно, ω-устойчивость класса изометрических отображений и устойчивость этого класса по Ф. Джону суть одно и то же (см. [3]). Понятие ω-устойчивости означает, по существу, что из локальной близости отображения f к отображениям изучаемого класса следует его близость к ним в C-норме (см. разд. 1 настоящей статьи). В последнее время теория ω-устойчивости разрабатывалась А. А. Егоровым [5–7], который получил интересные результаты, касающиеся классов аффинных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00517) и INTAS (код проекта IR–97–0170).

отображений, а также пучков решений систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию теории устойчивости классов липшицевых отображений в рамках концепции ω-устойчивости. Главным объектом изучения является следующий класс отображений.

Определение 1. Пусть G — непустое компактное подмножество пространства $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Класс всех локально липшицевых отображений $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$ областей $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, для каждого из которых существует компонента связности K множества G такая, что дифференциалы $g'(x)$ почти во всех точках $x \in \operatorname{dom} g$ принадлежат K, будем называть классом, $(*)$-*порожденным* множеством G, и обозначать его символом $\mathfrak{Z}(G)$.

В качестве отправной точки исследования автором доказана теорема о том, что если G — выпуклое компактное множество, то класс $\mathfrak{Z}(G)$ ω-устойчив (теорема 1). Одним из основных инструментов в работе является установленная в статье теорема о сохранении свойства устойчивости при теоретико-множественных операциях над ω-устойчивыми классами отображений (теорема 2). С ее помощью автором получено следующее (существенное) усиление теоремы 1: класс $\mathfrak{Z}(G)$ является ω-устойчивым, когда G допускает представление в виде пересечения объединений конечных наборов выпуклых компактных множеств G_i^α:

$$G = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha,$$

причем $G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in A$ и любой пары различных индексов $i \neq j$ («условие (Υ)»). Проблема устойчивости классов $\mathfrak{Z}(G)$ полностью решается для случая, когда одна из размерностей n или m равна 1. А именно, при $n = 1$ критерием ω-устойчивости классов $\mathfrak{Z}(G)$ является условие (Υ) (теоремы 6, 7), а при $m = 1$ — выпуклость компонент связности множества G (теорема 8).

С помощью указанных выше результатов получены теоремы об устойчивости классов липшицевых решений систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными (теоремы 9, 10), а также теорема об ω-устойчивости классов конформных отображений, которые могут содержать в себе одновременно как сохраняющие, так и меняющие ориентацию отображения (теорема 3). Полезное применение в работе находит понятие слабой связности множеств в линейных пространствах, введенное автором в [8, 9] для изучения строения образа производной дифференцируемых векторнозначных отображений. Например, установлено, что условие (Υ) эквивалентно выпуклости компонент слабой связности компакта G (теорема 5).

Большинство результатов анонсировано в статье автора [8].

1. Напомним некоторые основные понятия теории ω-устойчивости классов липшицевых отображений. Пусть n, m — произвольная пара натуральных чисел. Класс $\mathfrak{G} = \{g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ областей Δ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *нормальным*, если он удовлетворяет следующим *условиям нормальности*, введенным А. П. Копыловым [3] (см. также [5]).

K_1^*. Класс $\mathfrak{G}$ состоит из локально липшицевых отображений с фиксированной константой липшицевости $C = C_{\mathfrak{G}} \geq 0$.

K_2^*. Если отображение $g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ принадлежит классу $\mathfrak{G}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, то отображение $g_0 : \Delta_0 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяемое

формулой
$$\Delta_0 \ni x \overset{g_0}{\to} \rho^{-1} g(\rho x + a) + b,$$
где $\Delta_0 = \{\rho^{-1}(y-a) \mid y \in \Delta\}$, также принадлежит $\mathfrak{G}$.

K_3^*. Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно локально равномерной сходимости.

K_4^*. Класс $\mathfrak{G}$ порожден пучком $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathfrak{G}}$ отображений на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ в следующем смысле: $\mathfrak{G} = \bigcup\limits_{\Delta \subset \mathbb{R}^n} \mathscr{N}(\Delta)$, где объединение строится с использованием всех областей Δ пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [10, определение 5.4.1]).

Нормальный класс $\mathfrak{G}$ называется *ω-устойчивым* [3], см. также [5], если существует функция $\sigma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что

1) $\sigma(\varepsilon) \to \sigma(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для каждого отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ с $\Omega(f, \mathfrak{G}) < \infty$ справедливо неравенство $\omega(f, \mathfrak{G}) \le \sigma(\Omega(f, \mathfrak{G}))$.

Здесь $\omega(f, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{B \subset \Delta} \omega_B(f, \mathfrak{G})$, $\Omega(f, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{x \in \Delta} \{\varlimsup\limits_{r \to 0} \omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G})\}$, причем $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$ — это шар, содержащийся в области Δ, и
$$\omega_B(f, \mathfrak{G}) = \inf_{g : B \to \mathbb{R}^m,\, g \in \mathfrak{G}} \{r^{-1} \sup_{y \in B} |f(y) - g(y)|\}.$$
Функционалы $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ и $\Omega(\cdot, \mathfrak{G})$ называются функционалами *глобальной* и соответственно *локальной близости* к классу $\mathfrak{G}$. В частном случае, когда отображение f дифференцируемо, а исследуемый нормальный класс отображений является классом вида $\mathfrak{Z}(G)$ из определения 1, малость значения функционала $\Omega(f, \mathfrak{Z}(G))$ эквивалентна малости расстояния $\operatorname{dist}(f'(x), G) = \inf\limits_{a \in G} \|f'(x) - a\|$ во всех точках x области определения f (см. лемму 1). Заметим, что условие $\omega(f, \mathfrak{G}) = 0$ равенства нулю функционала глобальной близости равносильно принадлежности f классу $\mathfrak{G}$ (в случае нормальности последнего, см. [3]).

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество класса $\mathrm{Lip} = \mathrm{Lip}^{n,m}$ всех локально липшицевых отображений в $\mathbb{R}^m$ областей пространства $\mathbb{R}^n$. Положим
$$D\mathfrak{N} = \bigcup_{f \in \mathfrak{N}} \operatorname{Im} f'$$
(под f' мы понимаем здесь отображение, сопоставляющее каждой точке дифференцируемости функции f значение дифференциала в этой точке). В этой связи напомним, что в силу хорошо известной теоремы Степанова — Радемахера всякое локально липшицево отображение f дифференцируемо почти всюду. Нетрудно убедиться в том, что если класс $\mathfrak{N}$ нормален, то множество $D\mathfrak{N}$ компактно, причем
$$D\mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cap L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m). \tag{1}$$
Таким образом, для нормальных классов вида $\mathfrak{Z}(G)$ верно равенство $D\mathfrak{Z}(G) = G$.

Для множества U всюду в дальнейшем $\operatorname{cl} U$ означает замыкание U, $\operatorname{int} U$ — внутренность U, ∂U — границу U, $\operatorname{co} U$ — выпуклую оболочку U, $SCC(U)$ — множество компонент связности множества U (под связностью или обычной связностью мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии).

В принятых обозначениях для компакта $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеем $\mathfrak{Z}(G) = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \exists\, K \in SCC(G),\ g'(x) \in K$ для п. в. $x \in \operatorname{dom} g\}$.

Замечание 1. В случае, когда множество G связно, класс $\mathfrak{Z}(G)$ совпадает с классом липшицевых отображений, порожденным этим множеством в смысле определений А. А. Егорова (см. [6, 7]).

2. Как отправную точку настоящего исследования установим следующую теорему, которая дает ответ на вопрос, поставленный А. А. Егоровым в [7, замечание 3].

Теорема 1. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустое выпуклое компактное множество. Тогда класс $\mathfrak{Z}(G)$ является ω-устойчивым.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая полезная

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — нормальный класс отображений. Тогда существует такая вещественная функция $\delta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, что*

1) $\delta(\varepsilon) \to \delta(0) = 0$ *при* $\varepsilon \to 0$;

2) *для любой функции* $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *с* $\Omega(f, \mathfrak{G}) < \infty$ *справедливо неравенство* $\sup\limits_{x \in \operatorname{dom} f'} \operatorname{dist}(f'(x), D\mathfrak{G}) \le \delta(\Omega(f, \mathfrak{G}))$.

Доказательство леммы 1. Пусть лемма не верна, тогда существует последовательность отображений $f_\nu : \Delta_\nu \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\nu \in \mathbb{N}$, такая, что $\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}$, причем для любого номера ν существует точка $x_\nu \in \operatorname{dom} f'_\nu$, для которой $\operatorname{dist}(f'_\nu(x_\nu), D\mathfrak{G}) \ge \gamma > 0$, где γ — некоторое фиксированное число. В дальнейшем $f'_\nu(x_\nu)$ обозначим символом a_ν. По лемме 3 из [3] последовательность $a_\nu \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ограничена, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность a_{ν_k}, $k \in \mathbb{N}$, $a_{\nu_k} \to c \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Но по лемме 1 из [5] для произвольного отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$, дифференцируемого в точке $x \in \Delta$, справедливо равенство

$$\Omega(x, f, \mathfrak{G}) = \omega(f'(x), \mathfrak{G}), \tag{2}$$

где левая часть определяется по формуле

$$\Omega(x, f, \mathfrak{G}) = \varlimsup_{r \to 0} \omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G})$$

(очевидно, что $\Omega(f, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{x \in \Delta} \Omega(x, f, \mathfrak{G})$). Отсюда

$$\omega(a_\nu, \mathfrak{G}) = \Omega(x_\nu, f_\nu, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}.$$

Следовательно, $\omega(c, \mathfrak{G}) = 0$, что равносильно включениям $c \in \mathfrak{G}$, $c \in D\mathfrak{G}$. Так как последнее противоречит условию $\operatorname{dist}(c, D\mathfrak{G}) \ge \gamma$, лемма доказана.

Теорема 1 теперь прямо следует из только что доказанной леммы 1 и результатов работы [7], согласно которым класс $\mathfrak{Z}(G)$, $(*)$-порожденный непустым выпуклым компактным множеством $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, является нормальным, причем существует такая функция $v : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, что $v(\varepsilon) \to v(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$ и для $f \in \operatorname{Lip}$

$$\omega(f, \mathfrak{Z}(G)) \le v(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \operatorname{dom} f} \operatorname{dist}(f'(x), G))$$

(см. [7, предложение 1, теорема 3], а также замечание 1 настоящей статьи).

Наша главная цель в этом пункте — получение одного значительно более сильного признака устойчивости классов $\mathfrak{Z}(G)$ (см. ниже теорему 4), содержащего теорему 1 как частный случай. Это будет достигаться путем обобщения теоремы 1 с помощью следующего утверждения, которое представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть непустой класс отображений $\mathfrak{G}$ допускает представление в виде пересечения объединений конечных наборов ω-устойчивых классов отображений $\mathfrak{G}_i^\alpha$:*

$$\mathfrak{G} = \bigcap_{\alpha\in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} \mathfrak{G}_i^\alpha,$$

причем $\mathfrak{G}_i^\alpha \cap \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_j^\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in A$ и любой пары индексов $i \neq j$. Тогда $\mathfrak{G}$ также является ω-устойчивым классом отображений.

Доказательство теоремы 2 основывается на следующих трех леммах (при этом главную нагрузку несет лемма 3).

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ — нормальные классы отображений, причем $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \varnothing$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для всякого отображения $f \in \mathfrak{G}_1$ и любого шара $B \subset \operatorname{dom} f$ справедливо неравенство $\omega_B(f, \mathfrak{G}_2) > \delta$.*

Лемма 2 есть простое следствие свойств K_2^*, K_3^* и K_4^* нормальных классов отображений.

Лемма 3. *Пусть класс отображений $\mathfrak{G}$ является объединением $\mathfrak{G} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathfrak{G}_i$ конечного семейства попарно не пересекающихся нормальных классов отображений $\mathfrak{G}_i$. Тогда существует такая постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что для любого положительного числа $\varepsilon < \varepsilon_0$ и отображения $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ из выполнения неравенств*

$$\Omega(f, \mathfrak{G}) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \Omega(f, \mathfrak{G}_i) \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k, \tag{3}$$

вытекает существование пары индексов $i_1 \neq i_2$ и шара $B \subset \Delta$ таких, что

$$\Omega(f|_B, \mathfrak{G}_{i_1}) < \varepsilon, \quad \omega_B(f, \mathfrak{G}_{i_2}) \leq 2\varepsilon.$$

Доказательство леммы 3. Нетрудно проверяется, что класс $\mathfrak{G}$ является нормальным. Применяя лемму 2 к всевозможным парам классов $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_j$ при $i \neq j$, установим (ввиду конечности множества таких пар) существование такого положительного числа δ, что для любого отображения h в $\mathbb{R}^m$ некоторой области пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей шар $B(x, r)$, имеем

$$h \in \mathfrak{G}_j, \ \omega_{B(x,r)}(h, \mathfrak{G}_i) \leq \delta \Longrightarrow i = j. \tag{4}$$

Покажем, что постоянная $\varepsilon_0 = \delta/4$ действительно удовлетворяет требованиям леммы 3. Пусть в соответствии с условиями леммы 3 отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ таково, что выполнены неравенства (3) с некоторым положительным $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Для $x \in \Delta$ положим $r(x) = \sup\{r_0 \mid$ для любого $r \in (0, r_0]$, $B(x, r) \subset \Delta$ и $\omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}) \leq \varepsilon\}$. Из левого неравенства в (3) вытекает, что $r(x) > 0$ для любой точки $x \in \Delta$. Из свойств нормальных классов отображений следует, что $\omega_{B(x,r(x))}(f, \mathfrak{G}) \leq \varepsilon$. Для $r \in (0, r(x)]$ введем множество функций

$$K(x, r) = \{g : B(x, r) \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{G} \mid \sup_{y\in B(x,r)} r^{-1}|f(y) - g(y)| \leq \varepsilon\}.$$

Ясно, что $K(x, r) \neq \varnothing$ при $r \in (0, r(x)]$.

Докажем сначала, что для любой точки $x \in \Delta$ существует номер $i(x) \in \{1, \dots, k\}$ такой, что

$$\bigcup_{r\in(0,r(x)]} K(x, r) \subset \mathfrak{G}_{i(x)}. \tag{5}$$

Тем самым вследствие левого неравенства в (3), очевидно, будет установлено, что локальная аппроксимация функции f отображениями класса $\mathfrak{G}$ осуществляется в каждой точке $x \in \Delta$ только отображениями класса $\mathfrak{G}_{i(x)}$, зависящего от x, т. е. для $x \in \Delta$ справедливы формулы

$$\Omega(x, f, \mathfrak{G}_{i(x)}) = \Omega(x, f, \mathfrak{G}) < \varepsilon \tag{6}$$

(определение $\Omega(x, f, \mathfrak{G}_{i(x)})$ см. в пояснении к (2)).

Чтобы доказать (5), возьмем произвольно точку $x \in \Delta$. Зафиксируем какое-нибудь отображение $g_0 \in K(x, r(x))$. Так как $g_0 \in \mathfrak{G}$, найдется номер $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ такой, что $g \in \mathfrak{G}_{i_0}$. Для отображения

$$g : B(x, r) \to \mathbb{R}^m, \quad g \in K(x, r), \quad 0 < r \le r(x),$$

выберем убывающую последовательность чисел $r(x) = r_0 \ge r_1 \ge \dots \ge r_l = r$ таких, что $\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}} < 2$. Для каждого $\nu = 1, \dots, l$ возьмем отображение $g_\nu \in K(x, r_\nu)$, полагая при этом $g_l = g$. Докажем по индукции, что все g_ν принадлежат $\mathfrak{G}_{i_0}$. Для $\nu = 0$ это уже известно. Если $g_\nu \in \mathfrak{G}_{i_0}$, то

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B(x, r_{\nu+1})} r_{\nu+1}^{-1} |g_{\nu+1}(y) - g_\nu(y)| &\le \sup_{y \in B(x, r_{\nu+1})} r_{\nu+1}^{-1} |g_{\nu+1}(y) - f(y)| \\ &+ \frac{r_\nu}{r_{\nu+1}} \sup_{y \in B(x, r_{\nu+1})} r_\nu^{-1} |g_\nu(y) - f(y)| \le \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega_{B(x, r_{\nu+1})}(g_{\nu+1}, \mathfrak{G}_{i_0}) \le 3\varepsilon. \tag{7}$$

Тот факт, что $g_{\nu+1} \in \mathfrak{G}$, означает, что $g_{\nu+1} \in \mathfrak{G}_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Последнее вместе с (4) и (7) дает нам, что $j = i_0$, т. е. $g_{\nu+1} \in \mathfrak{G}_{i_0}$. Таким образом, по индукции доказано, что все g_ν принадлежат $\mathfrak{G}_{i_0}$, поэтому и $g = g_l \in \mathfrak{G}_{i_0}$. Это означает, что в качестве $i(x)$ можно взять номер i_0. Очевидно, функция $i(x)$ определяется однозначно.

Покажем, что функция $i(x)$ непрерывна, а значит, ввиду дискретности значений локально постоянна на каждом из множеств $A_l = \{x \in \Delta \mid r(x) \ge \frac{1}{l}\}$, $l \in \mathbb{N}$. Вследствие того, что функция $r(x)$ положительна на Δ, объединение семейства множеств A_l совпадает с Δ:

$$\bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l = \Delta. \tag{8}$$

Из нормальности класса $\mathfrak{G}$ следует замкнутость множеств A_l относительно Δ, т. е. для всех $l \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\Delta \cap \operatorname{cl} A_l = A_l. \tag{9}$$

Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$. Пусть $x_1, x_2 \in A_l$ и $|x_1 - x_2| < \frac{1}{l}$. Для $r = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$ рассмотрим шар $B(x_3, r)$ с центром в точке $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. В силу (5) и способа задания множества A_l существуют отображения $g_1 : B(x_1, 2r) \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{G}_{i(x_1)}$, $g_2 : B(x_2, 2r) \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{G}_{i(x_2)}$ такие, что

$$\frac{1}{2r} \sup_{y \in B(x_1, 2r)} |f(y) - g_1(y)| \le \varepsilon, \quad \frac{1}{2r} \sup_{y \in B(x_2, 2r)} |f(y) - g_2(y)| \le \varepsilon.$$

Очевидно, что

$$B(x_3, r) \subset B(x_1, 2r) \cap B(x_2, 2r), \quad \frac{1}{r} \sup_{y \in B(x_3, r)} |g_1(y) - g_2(y)| \le 4\varepsilon.$$

Это значит, что $\omega_{B(x_3,r)}(g_1,\mathfrak{G}_{i(x_2)}) \le 4\varepsilon$. Принимая во внимание (4), заключаем, что $i(x_1) = i(x_2)$. Тем самым утверждение о локальном постоянстве сужения $i(x)|_{A_l}$ функции $i(x)$ на множество A_l доказано для произвольного $l \in \mathbb{N}$. Отсюда и из соотношений (8) и (9), в частности, получим, что $i(x)$ является функцией первого класса Бэра.

Обозначим $E_i = \{x \in \Delta \mid i(x) = i\}$. Очевидно, $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i$ и $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \ne j$. Введем также в рассмотрение следующие множества: $V_i = \operatorname{int} E_i$, $V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ и $C = \Delta \setminus V$. Тогда из правой части условия (3) и неравенства (6) следует, что $i(x) \ne \mathrm{const}$, т. е. $E_i \ne \Delta$ ни для какого $i \in \{1,\dots,k\}$. Отсюда и из связности области Δ вытекает, что $C \ne \varnothing$. В соответствии с их определением множество V является открытым, а множество C — замкнутым в Δ. По теореме Бэра существует точка $y_0 \in C$, в которой сужение $i(x)|_C$ непрерывно (мы полагаем, как это и принято, что отображение непрерывно во всякой изолированной точке своей области определения). Таким образом, для достаточно малого радиуса $r_0 > 0$ будет $i(x) = i(y_0)$ при $x \in C \cap B(y_0, r_0)$, т. е. имеет место включение

$$\widetilde{C} \subset E_{i(y_0)}, \tag{10}$$

где $\widetilde{C} = C \cap B(y_0, r_0)$. При этом полагаем r_0 столь малым, что $B(y_0, r_0) \subset \Delta$. Так как $y_0 \in C$, то $y_0 \notin V_{i(y_0)}$. Поэтому существует точка $y_1 \in B(y_0, r_0)$ такая, что $i(y_1) \ne i(y_0)$. Ввиду (10) $y_1 \notin C$, значит, $y_1 \in V_{i(y_1)}$. Отсюда следует, что открытое множество $\widetilde{V}_{i(y_1)} = V_{i(y_1)} \cap B(y_0, r_0)$ непусто. Тем самым в силу определения множества C и свойств семейства открытых непересекающихся множеств $(V_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ нетрудно убедиться в том, что $\varnothing \ne B(y_0, r_0) \cap \partial \widetilde{V}_{i(y_1)} \subset \widetilde{C}$. Выберем точку $w \in \widetilde{V}_{i(y_1)}$ такую, что расстояние от w до граничной сферы шара $B(y_0, r_0)$ больше расстояния от w до $\widetilde{C}$. Рассмотрим шар $B(w, r)$ радиуса $r = \operatorname{dist}(w, \widetilde{C})$. Из выбора точки w следуют соотношения $\widetilde{C} \cap \operatorname{cl} B(w, r) \ne \varnothing$ и

$$B(w, r) \subset \widetilde{V}_{i(y_1)}. \tag{11}$$

Возьмем точку $z \in \widetilde{C} \cap \operatorname{cl} B(w, r)$. Из (10) и (11) вытекает, что z лежит на граничной сфере шара $B(w, r)$ и

$$i(z) = i(y_0) \ne i(y_1). \tag{12}$$

Зафиксируем достаточно малое число $0 < s < 1$ такое, что $2sr < r(z)$. Покажем, что в качестве искомой пары индексов i_1, i_2 и шара B, существование которых утверждается в лемме 3, можно взять соответственно индексы $i(y_1)$, $i(z)$ и шар $B(z_s, sr)$, где $z_s = (1 - s)z + sw$. Так как $|w - z| = r$, справедливо включение

$$B(z_s, sr) \subset B(z, 2sr) \cap B(w, r). \tag{13}$$

По определению функции $r(z)$ из $0 < 2sr < r(z)$ и (5) следует, что существует отображение $g : B(z, 2sr) \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{G}_{i(z)}$, которое удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2sr} \sup_{y \in B(z,2sr)} |f(y) - g(y)| \le \varepsilon.$$

Используя (13), приходим к оценке

$$\omega_{B(z_s,sr)}(f, \mathfrak{G}_{i(z)}) \le 2\varepsilon. \tag{14}$$

Ввиду включений (11), (13) и определения множества $\widetilde{V}_{i(y_1)}$ для точек $x \in B(z_s, sr)$ выполняется тождество $i(x) \equiv i(y_1)$. Отсюда с помощью (6) заключаем, что $\Omega(f|_{B(z_s,sr)}, \mathfrak{G}_{i(y_1)}) < \varepsilon$. Последнее неравенство вместе с (12) и (14) завершает доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{G}_1$ — устойчивый, а $\mathfrak{G}_2$ — нормальный классы отображений, причем $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \varnothing$. Тогда найдется такая постоянная $\varepsilon_1 > 0$, что для всякого отображения $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и шара $B \subset \Delta$ из условия $\Omega(f|_B, \mathfrak{G}_1) < \varepsilon_1$ следует неравенство $\omega_B(f, \mathfrak{G}_2) > 2\varepsilon_1$.*

Лемма 4 непосредственно вытекает из леммы 2, определения ω-устойчивости и свойств функционала $\omega_B(\cdot, \cdot)$.

Доказательство теоремы 2. Проверка того, что $\mathfrak{G}$ есть нормальный класс отображений, не требует больших усилий. Доказательство его устойчивости будем вести от противного. Если класс $\mathfrak{G}$ не ω-устойчив, то, как это было показано в [5] (см. начало доказательства теоремы 4 из [5]), найдется последовательность отображений $f_\nu : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$ таких, что

$$\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}, \tag{15}$$

но при этом f_ν равномерно сходятся на шаре $B(0,1)$ к отображению $f : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$, $f \notin \mathfrak{G}$. В соответствии с определением класса $\mathfrak{G}$ существует индекс $\alpha \in A$ такой, что

$$f \notin \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} \mathfrak{G}_i^\alpha. \tag{16}$$

Зафиксируем указанный индекс α. Положим $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_i^\alpha$, $i = 1, \dots, k_\alpha$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{G}_i \neq \varnothing$, и поэтому ввиду нормальности классов $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_i^\alpha$ классы $\mathfrak{G}_i$ являются нормальными. Из условий теоремы 2 следует, что

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} \mathfrak{G}_i, \quad \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_i^\alpha \cap \mathfrak{G}_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \text{ и классы } \mathfrak{G}_i^\alpha \ \ \omega\text{-устойчивы.}$$

Применяя лемму 4 к всевозможным парам классов $\mathfrak{G}_i^\alpha$ и $\mathfrak{G}_j$ при $i \neq j$, установим (ввиду конечности множества таких пар и включений $\mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{G}_i^\alpha$), что существует положительное число ε_1 такое, что для всякого отображения f_ν и шара $B(x,r) \subset B(0,1)$ справедлива импликация

$$i \neq j, \ \Omega(f_\nu|_{B(x,r)}, \mathfrak{G}_i) < \varepsilon_1 \Longrightarrow \omega_{B(x,r)}(f_\nu, \mathfrak{G}_j) > 2\varepsilon_1. \tag{17}$$

Применим лемму 3 к разложению $\mathfrak{G} = \bigcup\limits_{i=1}^{k_\alpha} \mathfrak{G}_i$ и возьмем соответствующую постоянную ε_0. Из леммы 3 и (15), (17) получаем, что для $\nu > 1/\min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ найдется индекс $i_\nu \in \{1, \dots, k_\alpha\}$, для которого выполняется неравенство $\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}_{i_\nu}) < \frac{1}{\nu}$. Так как число классов $\mathfrak{G}_i$ конечно, мы можем, выбрав соответствующую подпоследовательность и произведя необходимую перенумерацию, прийти к ситуации, когда $i_\nu \equiv 1$, т. е. $\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}_1) < \frac{1}{\nu}$. Но тогда ввиду включения $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_1^\alpha$ справедливо неравенство $\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}_1^\alpha) < \frac{1}{\nu}$. Отсюда и из ω-устойчивости класса $\mathfrak{G}_1^\alpha$ вытекает, что $\omega\big(f_\nu, \mathfrak{G}_1^\alpha\big) \to 0$ при $\nu \to \infty$. В силу полунепрерывности снизу функционала $\omega\big(\cdot, \mathfrak{G}_1^\alpha\big)$ относительно равномерной сходимости справедливо равенство $\omega(f, \mathfrak{G}_1^\alpha) = 0$, которое равносильно включению $f \in \mathfrak{G}_1^\alpha$. Получили противоречие с (16). Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Непустое пересечение любой совокупности ω-устойчивых классов отображений есть ω-устойчивый класс отображений. Объединение конечного семейства попарно не пересекающихся ω-устойчивых классов отображений есть также ω-устойчивый класс отображений.*

Покажем возможное применение только что полученных результатов. Классические теоремы об устойчивости конформных отображений, как правило, описывают устойчивость класса конформных отображений, сохраняющих ориентацию (см., например, [1]). Следствие 1 позволяет избежать этого ограничения при формулировке соответствующих результатов на языке теории ω-устойчивости.

Теорема 3. *Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, лежащий в множестве всех (не равных тождественно нулю) линейных конформных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (как сохраняющих, так и меняющих ориентацию). Тогда класс $\mathfrak{Z}(G)$ ω-устойчив.*

Чтобы доказать теорему 3, заметим, что класс $\mathfrak{Z}(G)$ является объединением двух непересекающихся нормальных классов отображений $\mathfrak{Z}(G) = \mathfrak{Z}(G^+) \cup \mathfrak{Z}(G^-)$, где G^+ — линейные конформные отображения из G, сохраняющие ориентацию, а G^- — линейные конформные отображения из G, меняющие ориентацию. ω-Устойчивость каждого из классов $\mathfrak{Z}(G^+)$ и $\mathfrak{Z}(G^-)$ вытекает, например, из леммы 1 и [1, гл. 4, теорема 4.1]. Остается применить следствие 1.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что этот эффект возникает потому, что в теории ω-устойчивости локальная близость отображения к исследуемому классу вычисляется с помощью функционала Ω в каждой точке области определения отображения, тогда как в классической теории это делается на основе дифференциальных признаков почти в каждой точке области определения. Теорему 3 полезно сравнить с теоремой 1.3.9 из [4], в которой рассматривается устойчивость конформных отображений (возможно, и меняющих ориентацию) относительно класса топологических отображений.

Введем следующее, важное для дальнейшего

Определение 2. Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Будем говорить, что G *удовлетворяет условию* (Υ), если он допускает представление в виде пересечения объединений конечных наборов выпуклых компактных множеств G_i^α:

$$G = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha,$$

причем $G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in A$ и любой пары индексов $i \neq j$.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что выпуклые, не более чем счетные, а также лежащие на прямой в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ непустые компактные множества удовлетворяют условию (Υ).

Главным результатом этой части статьи является

Теорема 4. *Пусть G — компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Тогда если G удовлетворяет условию (Υ), то*

1) *класс $\mathfrak{Z}(G)$, $(*)$-порожденный множеством G, является ω-устойчивым;*

2) *для любого ω-устойчивого класса $\mathfrak{G}$ такого, что $G \subset \mathfrak{G}$, выполняется включение $\mathfrak{Z}(G) \subset \mathfrak{G}$.*

Доказательство теоремы 4. Первая часть теоремы непосредственно вытекает из теорем 1, 2, определения 2 и равенства (1). Докажем вторую. Условие (Υ) влечет выпуклость всех компонент связности множества G. Учитывая определение 1, достаточно показать справедливость второго утверждения теоремы для случая, когда множество G выпукло.

Так как $G \subset \mathfrak{G}$, в силу (2) все отображения $g \in \mathfrak{Z}(G) \cap C^1$ из пересечения класса $\mathfrak{Z}(G)$ с множеством непрерывно дифференцируемых отображений имеют нулевую локальную близость относительно класса $\mathfrak{G}$, т. е. $\Omega(g, \mathfrak{G}) = 0$. Отсюда вследствие ω-устойчивости класса $\mathfrak{G}$ получаем, что

$$\mathfrak{Z}(G) \cap C^1 \subset \mathfrak{G}. \tag{18}$$

Пусть теперь $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — произвольное отображение из класса $\mathfrak{Z}(G)$. Беря усреднения f по методу Соболева и учитывая выпуклость компакта G, нетрудно показать, что для любой компактной подобласти $\Delta_1 \Subset \Delta$ существует последовательность гладких отображений $f_\nu : \Delta_1 \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{Z}(G) \cap C^1$, равномерно сходящаяся к сужению $f|_{\Delta_1}$ отображения f на эту подобласть. Включение (18) влечет $f_\nu \in \mathfrak{G}$, откуда по свойству K_3^* нормальных классов отображений следует, что $f|_{\Delta_1} \in \mathfrak{G}$. По свойству K_4^* класс $\mathfrak{G}$ порожден пучком отображений. Поэтому ввиду произвольности области Δ_1 теорема 4 полностью доказана.

Условию (Υ) можно придать естественное геометрическое истолкование. В предшествующих работах автора [8, 9] введено следующее понятие слабой связности множеств в линейных пространствах.

Определение 3. Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство. Множество $U \subset X$ называется *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup\limits_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$, $U_t \cap \operatorname{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$ для каждого $t \in T$ и $U_{t_1} \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_{t_2} = \varnothing$, если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$.

Замечание 3. Понятие слабой связности играет важную роль в исследованиях автора строения образов производной вектор-функций (см. [8, 9]). В частности, были доказаны следующие теоремы.

(1) Образ $\operatorname{Im} f'$ производной дифференцируемого отображения $f : \Delta \to X$ в метризуемое локально выпуклое пространство X области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ является слабо связным множеством в пространстве $L(\mathbb{R}^n, X)$ (теорема 1 из [9]).

(2) Если непустой слабо связный компакт G пространства Фреше X является к тому же локально слабо связным множеством, то существует такое дифференцируемое отображение $f : [0, 1] \to X$, что $\operatorname{Im} f' = G$ (теорема 2 из [8, 9]).

Нам понадобятся следующие простые свойства слабой связности (см. [8, 9]):

1) всякое связное множество слабо связно;

2) пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство слабо связных множеств, причем существует такое $\beta \in A$, что $U_\beta \cap \operatorname{cl} U_\alpha \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in A$. Тогда объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ слабо связно.

Определение 4. Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство и $U \subset X$. *Компонентой слабой связности множества U, содержащей точку $a \in U$*, называется объединение всех слабо связных подмножеств множества U, содержащих a.

Применением свойства 2 слабо связных множеств легко проверяется, что введенная таким образом компонента слабой связности сама является слабо связным множеством.

Теорема 5. *Непустой компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию (Υ) в том и только том случае, когда все компоненты слабой связности множества G выпуклы.*

Доказательство теоремы 5. Сначала проверим необходимость. Пусть компакт G удовлетворяет условию (Υ), т. е. для G имеет место представление, описанное в определении 2, и пусть K — компонента слабой связности G. Для любого $\alpha \in A$ множество K разлагается в конечное объединение непересекающихся множеств

$$K = \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} \big(K \cap G_i^\alpha\big).$$

Очевидно, что

$$\big(K \cap G_i^\alpha\big) \cap \operatorname{cl} \operatorname{co}\big(K \cap G_j^\alpha\big) \subset G_i^\alpha \cap G \cap \operatorname{cl} \operatorname{co} G_j^\alpha = G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing$$

при $i \neq j$. Так как K — слабо связное множество, (по определению 3) найдется такое целое l, что $K = K \cap G_l^\alpha$, т. е. $K \subset G_l^\alpha$. Но тогда

$$\operatorname{co} K \subset \operatorname{co} G_l^\alpha = G_l^\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha.$$

Отсюда ввиду произвольности индекса α получаем, что $\operatorname{co} K \subset G$. Но $\operatorname{co} K$ — связное множество, следовательно, оно является и слабо связным. Это обстоятельство вследствие последнего включения и определения 4 позволяет заключить, что справедливо равенство $\operatorname{co} K = K$.

Установим достаточность. Для $\varepsilon > 0$ введем на G отношение эквивалентности $\sim_\varepsilon$, полагая

$$a \sim_\varepsilon b \Leftrightarrow \ \exists\, F \subset G, a, b \in F \text{ и } \varepsilon\text{-оболочка } F \text{ слабо связна.} \tag{19}$$

Отношение $\sim_\varepsilon$ разбивает G на конечное множество классов эквивалентности $\widetilde{G}_i^\varepsilon$, $i = 1, \dots, k_\varepsilon$, которые являются компактными множествами (это следует из того, что в соответствии с (19) и свойством 1 слабой связности если $a, b \in G$ и $\|a - b\| < 2\varepsilon$, то $a \sim_\varepsilon b$). Символом $N_\varepsilon(F)$ будем обозначать ε-оболочку множества F. Из (19), определения 3 и свойства 2 слабо связных множеств вытекает, что $N_\varepsilon(\widetilde{G}_i^\varepsilon)$ является слабо связным множеством для любого $i = 1, \dots, k_\varepsilon$, причем

$$\widetilde{G}_i^\varepsilon \cap \operatorname{cl} \operatorname{co} \widetilde{G}_j^\varepsilon = \varnothing \quad \text{при } i \neq j. \tag{20}$$

Для $a \in G$ через $\widetilde{G}^\varepsilon(a)$ обозначим класс эквивалентности $\widetilde{G}_i^\varepsilon$, содержащий точку a. Используя тот очевидный факт, что

$$\widetilde{G}^{\varepsilon_1}(a) \subset \widetilde{G}^{\varepsilon_2}(a) \quad \text{при } 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2, \tag{21}$$

а также принимая во внимание общие свойства компактных множеств, нетрудно доказать, что последовательность компактов $\widetilde{G}^\varepsilon(a)$ имеет компактный предел $G(a) = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \widetilde{G}^\varepsilon(a)$ в метрике Хаусдорфа при $\varepsilon \to 0$. Так как $N_\varepsilon(\widetilde{G}^\varepsilon(a))$ является слабо связным множеством, компактное множество $G(a)$ есть предел в метрике Хаусдорфа некоторой последовательности слабо связных множеств. Отсюда нетрудно заключить, что и само множество $G(a)$ слабо связно. С другой стороны, вследствие определения (19) любое слабо связное подмножество компакта G, содержащее точку a, содержится в классе эквивалентности $\widetilde{G}^\varepsilon(a)$ при всех $\varepsilon > 0$, поэтому всякое такое подмножество содержится и в $G(a)$. Из последнего утверждения, слабой связности множества $G(a)$ и определения 4 следует, что $G(a)$ совпадает с компонентой слабой связности множества G, содержащей точку a. Положим

$$G_i^\varepsilon = \mathrm{co}\widetilde{G}_i^\varepsilon, \quad G^\varepsilon(a) = \mathrm{co}\widetilde{G}^\varepsilon(a). \tag{22}$$

Имеем очевидное включение

$$G \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} G_i^\varepsilon, \tag{23}$$

причем в соответствии с (20)

$$G_i^\varepsilon \cap G \cap G_j^\varepsilon = \varnothing, \tag{24}$$

если $i \neq j$. Кроме того, в силу предположения о выпуклости компонент слабой связности G множество $G(a)$ выпукло при любом $a \in G$. Поэтому

$$G^\varepsilon(a) = \mathrm{co}\widetilde{G}^\varepsilon(a) \to \mathrm{co}G(a) = G(a) \subset G \tag{25}$$

в метрике Хаусдорфа для любого $a \in G$.

Из (21) и (22) непосредственно вытекают включения

$$G^{\varepsilon_1}(a) \subset G^{\varepsilon_2}(a) \quad \text{при } 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2. \tag{26}$$

С помощью (23), (25) и (26), прибегая опять к использованию элементарных фактов из общей топологии, получаем

$$G = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} G_i^\varepsilon.$$

Из последнего равенства, определения 2 и (24) следует, что множество G удовлетворяет условию (Υ). Теорема 5 полностью доказана.

Замечание 4. Из определений 3, 4 и теоремы 5 следует, что условие (Υ) для непустого компакта $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ эквивалентно одновременному выполнению двух требований:

1) все компоненты связности множества G выпуклы;

2) компоненты связности G совпадают с компонентами слабой связности G.

Второе из этих свойств, вообще говоря, не вытекает из первого. А именно, в [9, теорема 4] показано, что существует состоящий более чем из одной точки компакт $G \subset L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, компоненты связности которого одноточечны, но в то же время G — слабо связное множество.

3. В данном разделе обсуждается проблема ω-устойчивости классов отображений в том случае, когда размерность пространства прообраза равна 1, т. е. когда отображения определены на интервалах вещественной прямой. Определяющую роль условия (Υ) для этой ситуации выявляет следующая

Теорема 6. *Пусть $n = 1$ и $\mathfrak{G}$ — ω-устойчивый класс отображений в $\mathbb{R}^m$ интервалов вещественной прямой $\mathbb{R}$, где $m \geq 1$. Тогда множество $D\mathfrak{G}$ дифференциалов отображений класса $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию* (Υ).

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{G}$ — ω-устойчивый класс отображений в $\mathbb{R}^m$ интервалов вещественной прямой $\mathbb{R}$ и $a, b \in D\mathfrak{G}$. Пусть, далее, для любого $\varepsilon > 0$ существуют отображения $g_1 : \Delta_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ и $g_2 : \Delta_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ такие, что*

1) $\Omega(g_1, \mathfrak{G}) < \varepsilon$ *и* $\Omega(g_2, \mathfrak{G}) < \varepsilon$;

2) $g_1'(\alpha_1) = g_2'(\beta_2) = a$, $g_1'(\beta_1) = g_2'(\alpha_2) = b$, *где* $\alpha_1, \beta_1 \in \Delta_1$ *и* $\alpha_2, \beta_2 \in \Delta_2$ — *некоторые числа, причем* $\alpha_1 < \beta_1$ *и* $\alpha_2 < \beta_2$.

Тогда $[a, b] \subset D\mathfrak{G}$.

Доказательство леммы 5. Из условий леммы в силу инвариантности значений функционала $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ относительно преобразований, описанных в условии нормальности K_2^*, следует, что для произвольного натурального ν и любой пары чисел $\alpha < \beta$ найдутся отображения замкнутых промежутков $g_{\alpha\beta}^{ab\nu} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$, $g_{\alpha\beta}^{ba\nu} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ такие, что

1) $\Omega(g_{\alpha\beta}^{ab\nu}, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}$ и $\Omega(g_{\alpha\beta}^{ba\nu}, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}$ (здесь и далее через $\Omega(g_{\alpha\beta}^{ab\nu}, \mathfrak{G})$ мы обозначаем значение функционала локальной близости, взятого от сужения функции $g_{\alpha\beta}^{ab\nu}$ на открытый интервал (α, β));

2) $(g_{\alpha\beta}^{ab\nu})'(\alpha) = (g_{\alpha\beta}^{ba\nu})'(\beta) = a$, $(g_{\alpha\beta}^{ab\nu})'(\beta) = (g_{\alpha\beta}^{ba\nu})'(\alpha) = b$;

3) $g_{\alpha\beta}^{ab\nu}(\alpha) = g_{\alpha\beta}^{ba\nu}(\alpha) = 0$ (последнее условие носит технический характер).

Чтобы упростить выкладки, ограничимся доказательством того, что середина отрезка $[a, b]$ лежит в $D\mathfrak{G}$, т. е. что $c = \frac{a+b}{2} \in D\mathfrak{G}$.

Определим последовательность отображений $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $\nu \geq 2$, следующим образом. Полагаем $f_\nu(0) = 0$. Дальнейшее построение ведем по индукции. Если $f_\nu(x)$ определена при $x \in [0, \frac{k}{\nu}]$, то полагаем

$$f_\nu(x) = \begin{cases} f_\nu\left(\dfrac{k}{\nu}\right) + g^{ab\nu}_{\frac{k}{\nu}, \frac{k}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}(x), & x \in \left[\dfrac{k}{\nu}, \dfrac{k}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^2}\right], \ k \text{ четно}; \\ f_\nu\left(\dfrac{k}{\nu}\right) + g^{ab\nu}_{\frac{k}{\nu}, \frac{k}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}\left(\dfrac{k}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^2}\right) + b\left(x - \dfrac{k}{\nu} - \dfrac{1}{\nu^2}\right), & x \in \left(\dfrac{k}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^2}, \dfrac{k+1}{\nu}\right), \ k \text{ четно}; \\ f_\nu\left(\dfrac{k}{\nu}\right) + g^{ba\nu}_{\frac{k}{\nu}, \frac{k}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}(x), & x \in \left[\dfrac{k}{\nu}, \dfrac{k}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^2}\right], \ k \text{ нечетно}; \\ f_\nu\left(\dfrac{k}{\nu}\right) + g^{ba\nu}_{\frac{k}{\nu}, \frac{k}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}\left(\dfrac{k}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^2}\right) + a\left(x - \dfrac{k}{\nu} - \dfrac{1}{\nu^2}\right), & x \in \left(\dfrac{k}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^2}, \dfrac{k+1}{\nu}\right), \ k \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{27}$$

Таким образом, мы определили функцию $f_\nu(x)$ для неотрицательных значений переменной x. Полагая $f_\nu(-x) = f_\nu(x)$, доопределим f_ν на всем $\mathbb{R}$. Несложная проверка показывает, что

$$\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}. \tag{28}$$

В самом деле, $\Omega(x, f_\nu, \mathfrak{G}) = \Omega(x, g^{ab\nu}_{\frac{k}{\nu}, \frac{k}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}$ в точках $x \in (\frac{k}{\nu}, \frac{k}{\nu} + \frac{1}{\nu^2})$ при четном k вследствие условия 1 на вспомогательные функции. Аналогично рассматривается случай нечетных k. Если же $x \in [\frac{k}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}, \frac{k+1}{\nu}]$, то по формуле (2) $\Omega(x, f_\nu, \mathfrak{G}) = \omega(f_\nu'(x), \mathfrak{G}) = 0$, так как производная $f_\nu'(x)$ в таких точках равна a или b (в зависимости от четности k) и $a, b \in D\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}$.

Из (27) следует, что для произвольного конечного интервала $I = (x_1, x_2)$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ справедливы оценки

$$\frac{|\{x \in I : f_\nu'(x) = a\}|}{|I|} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \frac{|\{x \in I : f_\nu'(x) = b\}|}{|I|} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

(здесь через $|\cdot|$ мы обозначили меру Лебега). Из этих оценок в силу равенства $f_\nu(0) = 0$ и того факта, что функции последовательности f_ν удовлетворяют условию Липшица с единой константой (последнее является следствием (28) и леммы 3 из [3]), вытекает локально равномерная сходимость последовательности f_ν к линейному отображению c:

$$f_\nu(x) \rightrightarrows \frac{ax}{2} + \frac{bx}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right) x = cx. \tag{29}$$

Из неравенства (28) по определению ω-устойчивости получаем, что $\omega(f_\nu, \mathfrak{G}) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Принимая во внимание последнее соотношение, сходимость (29) и полунепрерывность снизу функционала $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ относительно равномерной сходимости на шарах, приходим к равенству $\omega(c, \mathfrak{G}) = 0$, что в силу условий нормальности эквивалентно включению $c \in \mathfrak{G}$. Это по формуле (1) означает, что $c \in D\mathfrak{G}$. Полученное соотношение завершает доказательство леммы 5.

Доказательство теоремы 6. Ввиду теоремы 5 достаточно показать, что все компоненты слабой связности компактного множества $D\mathfrak{G}$ выпуклы. Действительно, пусть K — произвольная компонента слабой связности множества $D\mathfrak{G}$. В силу простейших свойств слабой связности K является компактным слабо связным множеством.

Обозначим через K_ε замыкание ε-оболочки множества K (здесь и в дальнейшем предполагается, что $\varepsilon > 0$).

По свойству 2 слабой связности K_ε является слабо связным множеством. В то же время, привлекая простые геометрические рассуждения, видим, что K_ε есть локально связное множество. Следовательно, по свойству 1 слабой связности K_ε является и локально слабо связным множеством. По теореме 2 из [8, 9] (см. также замечание 3 настоящей статьи) о слабо связных компактах, являющихся к тому же локально слабо связными множествами, существует всюду дифференцируемое отображение $g_1 : (-1, 1) \to \mathbb{R}^m$, образ производной которого совпадает с K_ε:

$$\operatorname{Im} g_1' = K_\varepsilon \supset K. \tag{30}$$

Применяя для данной ситуации уже неоднократно использовавшееся равенство (2), получаем

$$\Omega(g_1, \mathfrak{G}) = \sup_{x \in \Delta} \Omega(x, g_1, \mathfrak{G}) = \sup_{x \in \Delta} \omega(g_1'(x), \mathfrak{G}) \le \sup_{x \in \Delta} \operatorname{dist}(g_1'(x), D\mathfrak{G}) \le \varepsilon. \tag{31}$$

Аналогичная оценка справедлива для отображения $g_2 : (-1, 1) \to \mathbb{R}^m$, определенного по формуле $g_2(x) = -g_1(-x)$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и соотношений (30) и (31) мы можем применить лемму 5 для любой пары линейных отображений $a, b \in K$ (меняя, если необходимо, нумерацию отображений g_1 и g_2). Это дает нам, что $[a, b] \subset D\mathfrak{G}$. Так как K — компонента слабой связности множества $D\mathfrak{G}$ и $a, b \in K$, отрезок $[a, b]$ на самом деле лежит в K. Из произвольности элементов a, b множества K следует, что K — выпуклое множество. Теорема 6 ввиду высказанных ранее замечаний полностью доказана.

Из теорем 4, 6 вытекает

Следствие 2. *Пусть $n = 1$ и $\mathfrak{G}$ — ω-устойчивый класс отображений. Тогда класс $\mathfrak{Z}(D\mathfrak{G})$ содержится в $\mathfrak{G}$ и также является ω-устойчивым.*

Таким образом, если компакт $G \subset L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ таков, что семейство всех ω-устойчивых классов $\mathfrak{G}$ с $D\mathfrak{G} = G$ непусто, то класс $\mathfrak{Z}(G)$ является минимальным (по включению) элементом этого семейства.

Теоремы 4 и 6 позволяют также получить следующий критерий устойчивости классов $\mathfrak{Z}(G)$.

Теорема 7. *Класс отображений $\mathfrak{Z}(G)$, $(*)$-порожденный непустым компактным множеством $G \subset L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, является ω-устойчивым тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условию (Υ).*

4. Исследуем теперь устойчивость изучаемого класса $\mathfrak{Z}(G)$ при $m = 1$. Следующая теорема будет играть здесь роль, аналогичную роли теоремы 7 для ситуации, когда $n = 1$.

Теорема 8. *Класс отображений $\mathfrak{Z}(G)$, $(*)$-порожденный непустым компактным множеством $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, является ω-устойчивым тогда и только тогда, когда все компоненты связности множества G выпуклы.*

Обращаем внимание на следующую связь между теоремами 7 и 8: последнюю теорему можно получить из теоремы 7, заменяя в ней слабую связность обычной связностью (при этом, конечно же, необходимо учесть теорему 5).

В ходе доказательства теоремы 8 будем использовать следующие понятия и обозначения. Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Для $\varepsilon > 0$ введем на G отношение эквивалентности $\sim_\varepsilon$, полагая

$$a \sim_\varepsilon b \Leftrightarrow \ \exists\ \varepsilon\text{-цепь } a_1 = a, a_2, \dots, a_k = b,\ a_i \in G,\ \text{и } \|a_i - a_{i+1}\| \le \varepsilon. \tag{32}$$

Через G_i^ε, $i = 1, \dots, k_\varepsilon$, обозначим возникающие при этом классы эквивалентности, через $G^\varepsilon(a)$ — класс эквивалентности, содержащий точку $a \in G$, и пусть $G(a) = G^0(a) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} G^\varepsilon(a)$. Из теоремы Кантора о континуумах следует, что $G(a)$ совпадает с компонентой связности множества G, содержащей точку a.

Ясно, что каждый класс эквивалентности G_i^ε является компактным множеством, причем

$$SCC(G_i^\varepsilon) \subset SCC(G). \tag{33}$$

Для описанных выше понятий несложными топологическими рассуждениями можно установить также следующую техническую лемму.

Лемма 6. *Для всякого компакта $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ существует функция $\gamma : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, удовлетворящая следующим условиям:*

1) *$\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;*

2) *для любых $\varepsilon > 0$ и точки $a \in G$ найдется точка $b \in G$ такая, что класс эквивалентности $G^\varepsilon(a)$ лежит в $\gamma(\varepsilon)$-оболочке компоненты связности $G(b)$.*

Следующая полезная лемма содержит признак нормальности классов $\mathfrak{Z}(G)$, справедливый для любых размерностей n и m.

Лемма 7. *Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, все компоненты связности которого выпуклы. Тогда класс отображений $\mathfrak{Z}(G)$ является нормальным.*

То, что класс $\mathfrak{Z}(G)$ удовлетворяет условиям нормальности K_1^*, K_2^*, K_4^*, сомнений не вызывает. Замкнутость класса $\mathfrak{Z}(G)$ относительно локально равномерной сходимости (т. е. выполнение условия K_3^*) доказывается стандартными средствами с помощью леммы 6 и [7, предложение 1] (см. также обсуждение доказательства теоремы 1 настоящей статьи).

Важным этапом доказательства теоремы 8 является

Лемма 8. *Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, все компоненты связности которого выпуклы. Пусть, далее, $f_\nu : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — последовательность числовых функций такая, что f_ν равномерно сходится к отображению $f : B(0,1) \to \mathbb{R}$ и $\Omega(f_\nu, \mathfrak{Z}(G)) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Тогда $f'(x) \in G$ для почти всех $x \in B(0,1)$.*

Доказательство леммы 8. По лемме 7 класс $\mathfrak{Z}(G)$ является нормальным. Отсюда по лемме 3 из [3] отображения последовательности f_ν удовлетворяют условию Липшица с некоторой общей постоянной. Поэтому f также является липшицевой функцией и, следовательно, она дифференцируема почти всюду в своей области определения. Ввиду этого достаточно показать, что $f'(x_0) \in G$ в точках дифференцируемости x_0 функции f. Итак, пусть $f'(x_0)$ существует. Модифицируя последовательность f_ν с помощью преобразований, описанных в условии нормальности K_2^*, и учитывая инвариантность значений функционала $\Omega(\cdot, \mathfrak{Z}(G))$ относительно такого рода преобразований, мы можем построить новую последовательность функций $\tilde{f}_\nu : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с тем же свойством $\Omega(\tilde{f}_\nu, \mathfrak{Z}(G)) \to 0$, которая равномерно сходится к сужению линейного отображения $f'(x_0)$ на шар $B(0,1)$. Предположим, что $f'(x_0) \notin G$. Используя сдвиг на $-f'(x_0)$, без потери общности будем далее считать, что $f'(x_0) = 0$. Таким образом,

$$\tilde{f}_\nu \rightrightarrows 0, \quad 0 \notin G, \quad \Omega(\tilde{f}_\nu, \mathfrak{Z}(G)) \to 0. \tag{34}$$

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $|a| \geq \varepsilon$ при $a \in G$. Отсюда для произвольной компоненты связности K множества G ввиду ее выпуклости найдется единичный вектор $w \in \mathbb{R}^n$ такой, что для всех $a \in K$ верно неравенство

$$aw \geq \varepsilon,$$

т. е. частная производная линейного отображения $a \in K$ по направлению w не меньше ε. Оценивая приращение функции вдоль направления w через ее частную производную по этому направлению и учитывая, что все липшицевы функции абсолютно непрерывны, для произвольного отображения $g \in \mathfrak{Z}(K)$ имеем

$$g(x + rw) - g(x) \geq \varepsilon r,$$

если $[x, x + rw] \subset \operatorname{dom} g$. В частности, для всякого шара $B(x, r) \subset \operatorname{dom} g$ выполняется неравенство

$$\sup_{y \in B(x,r)} g(y) - g(x) \geq \varepsilon r. \tag{35}$$

Видим, что последнее неравенство не зависит от выбора компоненты связности K множества G, поэтому оно справедливо для любой функции $g \in \mathfrak{Z}(G)$.

Из неравенства (35) в силу определения функционала локальной близости $\Omega(\cdot, \mathfrak{Z}(G))$ следует, что для любой точки $x \in B(0,1)$ при достаточно малых значениях радиуса r имеет место неравенство

$$\sup_{y \in B(x,r)} \tilde{f}_\nu(y) - \tilde{f}_\nu(x) \geq \left[\frac{\varepsilon}{2} - 2\Omega(\tilde{f}_\nu, \mathfrak{Z}(G))\right] r.$$

Простое вычисление показывает, что из последних локальных оценок следует глобальная оценка

$$\sup_{y\in B(0,1)} \tilde f_\nu(y) - \tilde f_\nu(0) \geq \frac{\varepsilon}{2} - 2\Omega(\tilde f_\nu, \mathfrak{Z}(G)).$$

Однако установленное неравенство противоречит (34). Полученное противоречие завершает доказательство леммы 8.

Доказательство теоремы 8. Необходимость в теореме 8 устанавливается легко. В самом деле, пусть $a, b \in G$ лежат в одной компоненте связности G, причем $c = \frac{a+b}{2} \notin G$. Совершая линейный пересчет координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ и соответствующий сдвиг в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, мы можем без потери общности считать, что $a = -b = (1, 0, \dots, 0)$, $c = 0$. Положим

$$f_1(x) = f_1(x^1, x^2, \dots, x^n) = \begin{cases} \{x^1\}, & x^1 \in [2k, 2k+1); \\ 1 - \{x^1\}, & x^1 \in [2k+1, 2k+2), \end{cases}$$

где $\{x^1\}$ — дробная часть числа x^1, и $f_\nu(x) = \frac{1}{\nu} f_1(\nu x)$.

Очевидно, что отображения f_ν липшицевы с константой 1 и производная $f'_\nu(x)$ почти всюду равна a или b, поэтому $f_\nu \in \mathfrak{Z}(G)$. С другой стороны, последовательность функций $f_\nu(x)$ равномерно стремится к 0. Так как линейное отображение 0 по исходному предположению не лежит в G и, следовательно, $0 \notin \mathfrak{Z}(G)$, сходимость $f_\nu \rightrightarrows 0$ означает, что класс $\mathfrak{Z}(G)$ не удовлетворяет условию K_3^*, не является нормальным, а потому он не может быть ω-устойчивым.

Докажем теперь достаточность в теореме 8. Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, все компоненты связности которого выпуклы. Для $\varepsilon > 0$ введем на G отношение эквивалентности $\sim_\varepsilon$ в соответствии с (32). Из выпуклости элементов $SCC(G)$ и включения (33) вытекает, что все компоненты связности классов эквивалентности G_i^ε выпуклы (см. обозначения ниже (32)). По лемме 7 каждый из классов отображений $\mathfrak{G}_i^\varepsilon = \mathfrak{Z}(G_i^\varepsilon)$ является нормальным. Таким образом, при $\varepsilon > 0$ класс $\mathfrak{Z}(G)$ разлагается на объединение непересекающихся нормальных классов $\mathfrak{Z}(G) = \bigcup\limits_{i=1}^{k_\varepsilon} \mathfrak{G}_i^\varepsilon$.

Рассуждениями от противного (наподобие тех, которые использовались в начале доказательства теоремы 2) с помощью лемм 6–8 нетрудно показать, что для завершения доказательства теоремы 8 достаточно установить следующее утверждение: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если отображение $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $\Omega(f, \mathfrak{Z}(G)) < \delta$, то $\Omega(f, \mathfrak{G}_i^\varepsilon) < \varepsilon$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k_\varepsilon\}$.

Пусть это утверждение неверно. Тогда найдутся число $\varkappa > 0$ и последовательность функций $f_\nu : \Delta_\nu \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\Omega(f_\nu, \mathfrak{Z}(G)) < \frac{1}{\nu}, \quad \Omega(f_\nu, \mathfrak{G}_i^\varkappa) \geq \varkappa \tag{36}$$

для всех $i \in \{1, \dots, k_\varkappa\}$.

Применяя лемму 3 к разложению

$$\mathfrak{Z}(G) = \bigcup_{i=1}^{k_\varkappa} \mathfrak{G}_i^\varkappa$$

и учитывая (36), получаем, что для достаточно больших ν существует шар $B_\nu \subset \Delta_\nu$ и пара индексов $i_\nu \neq j_\nu$ такие, что

$$\Omega(f_\nu|_{B_\nu}, \mathfrak{G}^{\varkappa}_{i_\nu}) < \frac{1}{\nu}, \quad \omega_{B_\nu}(f_\nu, \mathfrak{G}^{\varkappa}_{j_\nu}) \leq \frac{2}{\nu}, \quad i_\nu \neq j_\nu. \tag{37}$$

Так как число классов $\mathfrak{G}^{\varkappa}_i$ конечно, мы можем, выбрав соответствующую подпоследовательность и перенумеровав ее, прийти к ситуации, когда в соотношениях (37) $i_\nu \equiv i_1$, $j_\nu \equiv j_1$, $i_1 \neq j_1$. Далее, совершая преобразования, описанные в условии нормальности K_2^*, которые не изменяют значения функционалов близости, сведем рассуждения к случаю, когда $B_\nu \equiv B(0,1)$, $f_\nu(0) = 0$. Поскольку из (37) и леммы 3 из [3] следует, что f_ν локально липшицевы с общей постоянной, по теореме Арцела — Асколи из последовательности f_ν можно выбрать подпоследовательность f_{ν_μ}, равномерно сходящуюся на шаре $B(0,1)$ к отображению $f : B(0,1) \to \mathbb{R}$. Соединяя вместе сказанное выше, имеем при $\mu \to \infty$

$$f_{\nu_\mu}|_{B(0,1)} \rightrightarrows f, \quad \Omega(f_{\nu_\mu}|_{B(0,1)}, \mathfrak{G}^{\varkappa}_{i_1}) \to 0, \tag{38}$$

$$\omega_{B(0,1)}(f_{\nu_\mu}, \mathfrak{G}^{\varkappa}_{j_1}) \to 0, \quad i_1 \neq j_1. \tag{39}$$

Применяя лемму 8 для компакта $G^{\varkappa}_{i_1}$ и последовательности f_{ν_μ}, получаем из (38), что $f'(x) \in G^{\varkappa}_{i_1}$ для почти всех $x \in B(0,1)$. Но из (38), (39), нормальности класса отображений $\mathfrak{G}^{\varkappa}_{j_1}$ и полунепрерывности снизу функционала $\omega_{B(0,1)}(\cdot, \mathfrak{G}^{\varkappa}_{j_1})$ относительно равномерной сходимости следует, что $f \in \mathfrak{G}^{\varkappa}_{j_1}$, т. е. $f'(x) \in G^{\varkappa}_{j_1}$ почти всюду в $B(0,1)$. Получили противоречие с условием (39), согласно которому классы эквивалентности $G^{\varkappa}_{i_1}$ и $G^{\varkappa}_{j_1}$ различны. Теорема 8 доказана.

5. Установленные теоремы находят применение при исследовании устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Пусть Q — произвольный дифференциальный оператор следующего вида:

$$(Qg)_\kappa(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a^{\nu}_{\kappa\mu} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(x), \quad \kappa = 1, \dots, k, \tag{40}$$

где $a^{\nu}_{\kappa\mu} \in \mathbb{R}$, и пусть q — вектор пространства $\mathbb{R}^k$. Определим класс отображений $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{Q,q}$ как множество всех W^1_1-решений $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$ системы

$$Qg(x) = q, \tag{41}$$

заданных на областях Δ пространства $\mathbb{R}^n$. Заметим, что W^1_1-решениями системы (41) мы называем отображения $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$ класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Delta, \mathbb{R}^m)$, обобщенные частные производные 1-го порядка которых удовлетворяют системе (41) почти всюду в Δ.

Выберем произвольный компакт G в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и рассмотрим класс $\mathfrak{Z}_{Q,q}(G) = \mathfrak{Z}(G) \cap \mathfrak{Q}_{Q,q}$, являющийся множеством локально липшицевых решений системы (41), удовлетворяющих условию: для каждого из этих решений g существует такая компонента связности множества G, что дифференциалы $g'(x)$ почти во всех точках $x \in \operatorname{dom} g$ принадлежат этой компоненте связности.

Следующий результат является следствием теоремы 4 и того факта, что если пересечение выпуклого замкнутого множества с множеством, удовлетворяющим условию (Υ), непусто, то это пересечение также удовлетворяет (Υ).

Теорема 9. *Пусть Q — дифференциальный оператор вида* (40), *q — вектор пространства $\mathbb{R}^k$ и G — удовлетворяющий условию* (Υ) *компакт в $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, содержащий по крайней мере одно решение системы* (41). *Тогда класс $\mathfrak{Z}_{Q,q}(G)$ ω-устойчив.*

В том частном случае, когда G — шар с центром в нуле, теорема 9 доказана А. А. Егоровым (см. теорему 1 из [7]).

Если оператор Q эллиптический, то накладываемое на G в предыдущей теореме условие (Υ) излишне. А именно, имеет место

Теорема 10. *Для произвольных эллиптического дифференциального оператора Q вида* (40) *и вектора q пространства $\mathbb{R}^k$ подкласс $\mathfrak{G}$ класса $\mathfrak{Q}_{Q,q}$ W_1^1-решений системы* (41) *ω-устойчив в том и только том случае, когда существует компакт G пространства $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $G\cap\mathfrak{Q}_{Q,q}\neq\varnothing$ такой, что $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}_{Q,q}(G)$.*

Теорема 10 является следствием леммы 1 настоящей статьи и теоремы 2 из работы [7] об устойчивости в W_p^1-норме липшицевых подклассов решений эллиптической системы уравнений.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору А. П. Копылову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, N 3. P. 391–413.
3. *Копылов А. П.* Об устойчивости изометрических преобразований // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 132–144.
4. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
5. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1080–1095.
6. *Егоров А. А.* Устойчивость классов липшицевых решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 5. С. 583–587.
7. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов липшицевых решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 538–553.
8. *Коробков М. В.* Об одном обобщении понятия связности и его применении в дифференциальном исчислении и в теории устойчивости классов отображений // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 5. С. 590–593.
9. *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118–133.
10. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975.

Статья поступила 5 ноября 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск
korob@math.nsc.ru