Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.42

ДВА МЕТОДА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАМЯТИ

А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина, В. Б. Кардаков

Аннотация: Доказаны глобальная сходимость методов Ньютона и последовательных приближений в обратной задаче восстановления памяти, входящей в интегродифференциальное уравнение по рассеянной волне, известной в фиксированной точке пространства. Библиогр. 8.

В последнее время наблюдается повышенный интерес к задачам с памятью. С одной стороны, это, вероятно, объясняется появлением новых материалов, в значительной мере обладающих указанным свойством, а с другой стороны, — повышением точности измерений, что позволяет достоверно сравнивать результаты экспериментов с предсказанием теории. Среди работ, посвященных определению памяти, входящей в гиперболическое или параболическое уравнение, отметим работы [1–6].

В работе А. Лоренци [1] рассматривалась абстрактная задача Коши для гиперболических и параболических уравнений с памятью, а в работе Д. К. Дурдиева [2] — задача восстановления памяти, входящей в интегродифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части. Для поставленных в этих работах задач доказаны теоремы единственности, существования в малом и получены оценки устойчивости на основе принципа сжимающих отображений. Локальный характер теорем существования вызван тем, что получающиеся в процессе решения нелинейные уравнения Вольтерра не удовлетворяют условию Липшица.

В работах [3, 4] замечено, что, поскольку нелинейность носит сверточный характер, можно решать получившиеся уравнения Вольтерра в пространстве с экспоненциальным весом. Это позволило доказать глобальную разрешимость таких задач (см. [5, 6]).

В настоящей работе рассматривается задача, для которой в работе [2] доказаны существование и единственность решения «в малом». Опираясь на метод, предложенный в [3], мы доказываем единственность, существование в целом решений прямой и обратной задач и получаем оценки устойчивости. Доказательство носит конструктивный характер. В отличие от [1, 2] мы применяем не только метод сжимающих отображений, но и метод Ньютона, который обеспечивает более высокую скорость сходимости.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01496).

§ 1. Постановка задач и основные результаты

Рассмотрим следующую задачу Коши для гиперболического уравнения второго порядка:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \delta(x), \tag{1.2}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $h(t)$ — память.

В случае, когда $h(t) \equiv 0$, решением задачи Коши (1.1), (1.2) является сферическая волна

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\delta(t^2 - |x|^2), \tag{1.3}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда. В противном случае решение следует искать в виде

$$u(x,t) = \mathscr{E}(x,t) + v(x,t), \tag{1.4}$$

где $v(x,t)$ представляет собой рассеянную волну, причем

$$v(x,t) \equiv 0 \text{ при } t < |x|, \quad v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0. \tag{1.5}$$

Прямая задача состоит в нахождении при заданной $h(t)$ функции $v(x,t)$ такой, что решение (1.4) удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2).

Обратная задача состоит в определении памяти $h(t)$ по информации о рассеянной волне $v(x,t)$ в любой момент времени $t \geq 0$ в произвольной фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$:

$$v(x_0,t) = f(t). \tag{1.6}$$

Чтобы сформулировать поставленные задачи в терминах рассеянной волны, подставим решение (1.4) в уравнение (1.1), принимая во внимание, что $\mathscr{E}(x,t)$ — фундаментальное решение волнового уравнения. Имеем

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t h(t-\tau)v(x,\tau)\,d\tau + \int_0^t h(t-\tau)\mathscr{E}(x,\tau)\,d\tau = 0.$$

В полученном уравнении преобразуем второй интеграл, используя правила дифференцирования свертки, представление (1.3), определение и свойства дельта-функции Дирака:

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^{t-|x|} h(t-\tau)v(x,\tau)\,d\tau + \frac{h(t-|x|)}{4\pi|x|} = 0. \tag{1.7}$$

Решение задачи (1.7), (1.5) запишем по формуле Кирхгофа

$$v(x,t) = \frac{-1}{4\pi}\iiint_{S(x,t)} \frac{d\xi}{|x-\xi|} \int_0^{t-|\xi|-|x-\xi|} h(\tau)v(\xi, t-|x-\xi|-\tau)\,d\tau - \frac{1}{16\pi^2}\iiint_{S(x,t)} \frac{h(t-|\xi|-|x-\xi|)}{|\xi||x-\xi|}\,d\xi, \tag{1.8}$$

где $S(x,t) = \{\xi \mid |\xi| + |x-\xi| \le t\}$ — эллипсоид вращения с фокусами в точках $\xi = 0$ и $\xi = x$.

Теперь под решением прямой задачи (1.1), (1.2), (1.4) будем понимать решение интегрального уравнения (1.8).

Обратная задача состоит в определении пары функций $v(x,t)$ и $h(t)$ из интегрального уравнения (1.8) по информации (1.6).

Прямую и обратную задачи будем рассматривать в области $\overline{\Omega} = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R},\ |x| \le t \le T - |x - x_0|\}$, которая является пересечением двух световых конусов (прямого и обратного с вершинами в точках $(0,0)$ и (x_0, T) соответственно).

Теорема 1. *Если $h \in C[0; T - |x_0|]$, то прямая задача* (1.8) *имеет единственное решение $v \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Теорема 2. *При $f(t) \in C^1[|x_0|; T]$ обратная задача* (1.8), (1.6) *имеет единственное решение $v \in C^1(\overline{\Omega})$ и $h \in C[0; T - |x_0|]$.*

В следующем параграфе мы сведем прямую и обратную задачи к операторным уравнениям Вольтерра.

§ 2. Вывод операторных уравнений Вольтерра, эквивалентных поставленным задачам

Доказательства теорем 1, 2 опираются на следующую лемму.

Лемма 1. *При условии $v(x; |x|) \equiv 0$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Прямая задача* (1.8) *эквивалентна операторному уравнению*

$$v_t = Hv_t + b, \tag{2.1}$$

где $b = \frac{-1}{8\pi} h(t - |x|)$, а H — интегральный оператор Вольтерра, действующий на функцию v_t по формуле

$$Hv_t = \frac{-1}{4\pi} \int\limits_{|x|}^{t} \frac{(\alpha^2 - |x|^2)^2}{4}\, d\alpha \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\Theta\, d\Theta}{(\alpha - |x|\cos\Theta)^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \times \int\limits_0^{t-\alpha} h(\tau) v_t(\xi, t - \alpha - \tau + |\xi|)\, d\tau. \tag{2.2}$$

2. *Обратная задача* (1.8), (1.6) *эквивалентна операторному уравнению*

$$Gg = 0, \tag{2.3}$$

где

$$g(x,t) = \begin{bmatrix} g_1(x,t) \\ g_2(t - |x_0|) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_t(x,t) + \frac{h(t-|x|)}{8\pi} \\ f_1(t - |x_0|) + \frac{h(t-|x_0|)}{8\pi} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

$|x| \le t \le T - |x - x_0|$, $0 \le t - |x_0| \le T$, $f_1(t - |x_0|) = f_t(t)$, *а оператор G — нелинейный интегральный оператор Вольтерра второго рода*

$$G = E + F, \tag{2.5}$$

причем E — тождественный оператор, а действие оператора F на вектор-функцию g описывается формулами

$$(Fg)_1 = 2\int\limits_{|x|}^{t} \frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\Theta d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{t-\alpha} (g_2(\tau)-f_1(\tau))$$
$$\times\, (g_1(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|) - (g_2(t-\alpha-\tau) - f_1(t-\alpha-\tau)))\, d\tau, \quad (2.6)$$

$$(Fg)_2 = (Fg)_1(x_0, t), \quad (2.7)$$

где $\xi=\xi(\Theta,\varphi,\alpha)$, $\Theta\in[0;\pi]$ — угол между ξ и осью OX, $0\le\varphi\le 2\pi$ — полярный угол, $\alpha\in[|x|;t]$.

Доказательство. Рассмотрим семейство $D(x,\alpha)=\{\xi \mid |\xi|+|x-\xi|=\alpha\}$, $|x|\le\alpha\le t$, софокусных эллипсоидов и сферическую систему координат (r,Θ,φ) с полюсом в нуле и полярной осью OX, соединяющей точки 0 и x. Тогда $\xi = \xi(\Theta,\varphi,\alpha)$, где $\Theta\in[0;\pi]$ — угол между ξ и осью OX, $0\le\varphi\le 2\pi$ — полярный угол. Используя уравнение эллипсоида в виде

$$r = \frac{\alpha^2-|x|^2}{2(\alpha-|x|\cos\Theta)}, \quad (2.8)$$

нетрудно вывести (см. [7]) равенства

$$\frac{d\xi}{|x-\xi|} = \frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4(\alpha-|x|\cos\Theta)^3}\, d\omega d\alpha, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\xi}{|\xi||x-\xi|} = \frac{(\alpha^2-|x|^2)}{2(\alpha-|x|\cos\Theta)^2}\, d\omega d\alpha, \quad (2.10)$$

где $d\omega = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ — элемент телесного угла. Переходя к новым координатам в уравнении (1.8) и преобразуя второй интеграл с помощью формул (2.9), (2.10), получим

$$v(x,t) = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{|x|}^{t} h(\tau)\, d\tau$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x|}^{t} \frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4}\, d\alpha \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\Theta\, d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{t-\alpha} h(\tau) v(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|)\, d\tau. \quad (2.11)$$

Из (2.11), в частности, следует, что

$$v(x,|x|)\equiv 0. \quad (2.12)$$

Дифференцируя (2.11), находим

$$v_t = -\frac{1}{8\pi} h(t-|x|)$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x|}^{t} \frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4}\, d\alpha \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\Theta\, d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{t-\alpha} h(\tau) v_t(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|)\, d\tau. \quad (2.13)$$

Записав это уравнение в операторной форме, получим уравнение (2.1), где оператор H определяется формулой (2.2), а свободный член $\frac{-1}{8\pi}h(t-|x|)$.

Чтобы завершить доказательство первой части леммы, покажем, что обратные преобразования тоже имеют место. Действительно, перейдем от (2.1) к уравнению (2.13) и проинтегрируем его по переменной t в пределах от нуля до $t-|x|$, изменяя, где необходимо, порядок интегрирования. С учетом условия (2.12) в этом случае легко получим уравнение (2.11). Применяя далее формулы (2.8)–(2.10), преобразуем полученное уравнение к виду (1.8). Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Из условия (1.6) и уравнения (2.13) вытекает равенство

$$f_t(t) = -\frac{1}{8\pi}h(t-|x_0|) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x_0|}^{t}\frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4}\,d\alpha\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\Theta\,d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{t-\alpha}h(\tau)v_t(\xi,t-\alpha-\tau+|\xi|)\,d\tau. \tag{2.14}$$

Введем теперь функцию $f_1(t-|x_0|)=f_t(t)$, вектор-функцию $g(x,t)$ по формулам (2.4) и перейдем в (2.13), (2.14) к новым переменным. Затем, учитывая представления (2.6), (2.7) и (2.5), получим операторное уравнение (2.3). Легко перейти от (2.3) обратно к (2.14), (2.13). Интегрируя (2.14) по t в пределах от нуля до $t-|x_0|$, по аналогии с первой частью доказательств с учетом условия (2.12) на функцию $v(x,t)$ выведем (1.6). Доказательство эквивалентности (2.13) и (1.8) было проведено в первой части леммы. Лемма доказана.

§ 3. Доказательства основных результатов

Пусть X_σ — банаховы пространства, порожденные семейством весовых норм

$$\|g\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|g_1(x,t)e^{-\sigma(t-|x|)}| + \sup_{t\in[0;T-|x_0|]}|g_2(t)e^{-\sigma t}|, \quad \sigma\geq 0, \tag{3.1}$$

для вектор-функций $g=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\end{bmatrix}$ из этих пространств. Будем использовать это же обозначение нормы для отдельных компонент g_1 и g_2, отождествляя компоненту g_1 с вектором $g=\begin{bmatrix}g_1\\0\end{bmatrix}$, а g_2 — с вектором $g=\begin{bmatrix}0\\g_2\end{bmatrix}$. Очевидно, значению $\sigma=0$ соответствует пространство $X_0=C(\overline{\Omega})\times C[\,0;T-|x_0|\,]$. Норму $\|g\|_0$ этого пространства будем обозначать далее через $\|g\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma T}\|g\|\leq\|g\|_\sigma\leq\|g\| \tag{3.2}$$

нормы $\|g\|_\sigma$ и $\|g\|$ эквивалентны для любого $T<\infty$. Обозначим через $S_\sigma(g_0,R)$ шар радиуса R с центром в точке g_0 некоторого весового пространства X_σ $(\sigma>0)$.

Доказательство теоремы 1. Для уравнения (2.1) построим итерационный процесс

$$(v_t)_n = H(v_t)_{n-1}+b, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (v_t)_0=b, \tag{3.3}$$

который, как известно (см., например, [8]), сходится, если $\|H\|<1$. Из условия теоремы 1, формул (3.3) и линейности оператора H следует, что каждое приближение $(v_t)_n$ будет непрерывной функцией. Обозначим $v_t=\lim\limits_{n\to\infty}(v_t)_n$ и докажем существование этого предела.

С помощью равенства

$$\frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4}\int\limits_0^\pi \frac{\sin\Theta\,d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3}=\frac{\alpha}{2} \tag{3.4}$$

оценим

$$\|Hv_t\|_\sigma=\sup_{\overline{\Omega}}\left|\frac{-1}{4\pi}\int\limits_{|x|}^{t}\frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4}\,d\alpha\int\limits_0^\pi\frac{\sin\Theta\,d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{t-\alpha}h(\tau)e^{-\sigma\tau}\right.$$
$$\left.\times\, v_t(\xi,t-\alpha-\tau+|\xi|)e^{-\sigma(t-\alpha-\tau)}e^{-\sigma(\alpha-|x|)}\,d\tau\right|\le\frac{T(T-|x_0|)\|h\|_\sigma}{4\sigma}\|v_t\|_\sigma.$$

Выбирая σ_0 так, чтобы для любого $\sigma>\sigma_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{T(T-|x_0|)\|h\|_\sigma}{4\sigma}<1,$$

получаем сходимость итерационного процесса к единственному непрерывному решению v_t. Интегрируя v_t (как в лемме 1), находим, что функция $v(t)$ непрерывна. Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о разрешимости обратной задачи.

Покажем, что приближения к решению нелинейного уравнения (2.3) можно строить методом последовательных приближений по формуле

$$g_{n+1}=-Fg_n,\quad n=0,1,2\dots, \tag{3.5}$$

где g_0 — заданное нулевое приближение.

Теорема 3. *Решение g уравнения $Gg=0$, где $g\in S_\sigma(g_0,R)$, а оператор G определен формулами* (2.5)–(2.7), *может быть найдено методом последовательных приближений по формуле* (3.5), *причем $g_0=\begin{bmatrix}0\\ f_t\end{bmatrix}$ — центр шара $S_\sigma(g_0,R)$, и для любого $\sigma>\sigma_0$, где $\sigma_0=8\pi RT(T-|x_0|)$, верна оценка*

$$\|g_n-g\|\le\frac{(\sigma_0/\sigma)^n e^{\sigma T}}{1-\sigma_0/\sigma}\|f_t\|. \tag{3.6}$$

Уравнение (2.3) можно решать также методом Ньютона. В этом случае приближения к решению имеют вид

$$g_{n+1}=g_n-(G'[g_n])^{-1}Gg_n, \tag{3.7}$$

$n=0,1,2,3\dots$, g_0 — заданное нулевое приближение.

Теорема 4. *Решение g уравнения $Gg=0$, где $g\in S_\sigma(g_0,R)$, а оператор G определен формулами* (2.5)–(2.7), *может быть найдено методом Ньютона по формуле* (3.7), *где $g_0=\begin{bmatrix}0\\ f_t\end{bmatrix}$ — центр шара $S_\sigma(g_0,R)$, и для любого $\sigma>\sigma_0$, где $\sigma_0=32\pi T(T-|x_0|)\|f_t\|$, верна оценка*

$$\|g_n-g\|\le\frac{e^{\sigma T}}{2^n}(2\mu_0)^{2^n-1}\|f_t\|, \tag{3.8}$$

причем $\mu_0\le 1/2$.

Перейдем к доказательствам. Для доказательства теоремы 3 потребуется

Лемма 2. *В шаре $S_\sigma(g_0, R)$ банахова пространства X_σ оператор F из условия теоремы 3 имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что отображение F переводит шар в шар, т. е. докажем включение $F(S_\sigma(g_0, R)) \subseteq S_\sigma(g_0, R)$, а затем — что оператор F сжимающий.

Пусть $\|g - g_0\|_\sigma \leq R$. Оценим $\|Fg\|_\sigma$. Для этого воспользуемся равенством (3.4). Из (2.6), (3.1) имеем

$$\|(Fg)_1\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |(Fg)_1 e^{-\sigma(t-|x|)}| = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \Bigg| 2\int_{|x|}^{t} \frac{(\alpha^2 - |x|^2)^2}{4}\, e^{-\sigma(\alpha-|x|)}\, d\alpha$$
$$\times \int_0^\pi \frac{\sin\Theta\, d\Theta}{(\alpha - |x|\cos\Theta)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t-\alpha} (g_2(\tau) - f_1(\tau)) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\alpha-\tau)}$$
$$\times (g_1(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|) - g_2(t-\alpha-\tau) + f_1(t-\alpha-\tau))\, d\tau \Bigg|$$
$$\leq \frac{2\pi RT(T - |x_0|)}{\sigma} R = \frac{C_1(R)}{\sigma} R.$$

Аналогично из (2.7) и (3.1), используя (3.4), получим

$$\|(Fg)_2\|_\sigma = \sup_{t\in[0;T-|x_0|]} |(Fg)_2 e^{-\sigma t}| \leq \frac{2\pi RT(T-|x_0|)}{\sigma} R = \frac{C_1(R)}{\sigma} R.$$

Следовательно,

$$\|Fg\|_\sigma \leq \frac{2C_1(R)}{\sigma} R.$$

Полагая $\sigma_1 = \sigma_1(R) = 2C_1(R)$ и выбирая $\sigma \geq \sigma_1$, получаем, что F переводит шар $S_\sigma(g_0, R)$ в шар $S_\sigma(g_0, R)$. Рассмотрим теперь

$$\|(Fg)_1 - (F\tilde{g})_1\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \Bigg| 2\int_{|x|}^{t} \frac{(\alpha^2 - |x|^2)^2}{4}\, d\alpha \int_0^\pi \frac{\sin\Theta\, d\Theta}{(\alpha - |x|\cos\Theta)^3}$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t-\alpha} (g_2(\tau) - \tilde{g}_2(\tau))(g_1(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|) - g_2(t-\alpha-\tau) + f_1(t-\alpha-\tau))$$
$$+ (\tilde{g}_2(\tau) - f_1(\tau))((g_1(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|) - \tilde{g}_1(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|))$$
$$- (g_2(t-\alpha-\tau) - \tilde{g}_2(t-\alpha-\tau))) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\alpha-\tau)} e^{-\sigma(\alpha-|x|)}\, d\tau \Bigg|$$
$$\leq \frac{8\pi RT(T-|x_0|)}{\sigma} \|g - \tilde{g}\|_\sigma,$$

$$\|(Fg)_2 - (F\tilde{g})_2\|_\sigma \leq \frac{8\pi RT(T-|x_0|)}{\sigma} \|g - \tilde{g}\|_\sigma.$$

Отсюда

$$\|Fg - F\tilde{g}\|_\sigma \leq \frac{16\pi RT(T-|x_0|)}{\sigma} \|g - \tilde{g}\|_\sigma = \frac{8C_1(R)}{\sigma} \|g - \tilde{g}\|_\sigma.$$

Выбирая $\sigma > \sigma_2(R) = 8C_1(R)$, получим, что F — сжимающий оператор. Обозначим $\sigma_0 = \max(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2$. Тогда для любого $\sigma > \sigma_0$ оба условия выполняются одновременно, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Как известно, в условиях леммы 2 верны оценки (см. [8])

$$\|g_n - g\|_\sigma \le \frac{(\sigma_0/\sigma)^n}{1-\sigma_0/\sigma}\|g_0 + Fg_0\|_\sigma, \quad n = 1, 2, 3\dots. \tag{3.9}$$

Подставляя значение $g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_t \end{bmatrix}$ в равенства (2.4), (2.5), получим $Fg_0 \equiv 0$, откуда, учитывая (3.2), имеем

$$\|g_0 + Fg_0\|_\sigma = \|g_0\|_\sigma = \|f_t(t)\|_\sigma. \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) легко получить (3.4), и теорема доказана.

Для доказательства теоремы 4 нам потребуется

Лемма 3. *Для любого $g \in S_\sigma(g_0, R) \subset X_\sigma$, где $g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_t \end{bmatrix}$ у оператора G из теоремы 4 существует производная Фреше G', удовлетворяющая условию Липшица $\|G'[g] - G'[\tilde g]\|_\sigma \le L\|g - \tilde g\|_\sigma$, причем $L = O(\sigma^{-1})$.*

Доказательство. Для доказательства существования сильной производной (производной Фреше) достаточно показать, что слабая производная (производная Гато) является непрерывным оператором. По определению оператор $G[g]$ имеет слабую производную $\partial G[g]\psi$, если последовательность операторов

$$G_\gamma[g]\psi = \frac{G[g+\gamma\psi] - G[g]}{\gamma}$$

сходится в сильной топологии при $\gamma \to 0$ к оператору $\partial G[g]\psi$, называемому слабой производной (производной Гато) оператора G. Вычислим $\partial G[g]\psi$ по определению. Для $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ имеем

$$(\partial G[g]\psi)_1 = \psi_1(x,t) + 2\int\limits_{|x|}^{t} \frac{(\alpha^2 - |x|^2)^2}{4}\,d\alpha \int\limits_0^\pi \frac{\sin\Theta\,d\Theta}{(\alpha - |x|\cos\Theta)^3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\times \int\limits_0^{t-\alpha} (\psi_2(\tau) g_1(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|) - (g_2(\tau) - f_1(\tau))\psi_1(\xi, t-\alpha-\tau+|\xi|) - 2\psi_2(\tau)$$

$$\times (g_2(t-\alpha-\tau) - f_1(t-\alpha-\tau))d\tau = \psi_1(x,t) + (\partial F[g]\psi)(x,t),$$

$$(\partial G[g]\psi)_2 = \psi_2(x,t) + (\partial F[g]\psi)(x_0,t).$$

В силу линейности полученных операторов для их непрерывности достаточно проверить ограниченность, которая легко получается из вышенаписанных формул. Действительно,

$$\|\partial G[g]\psi)_1\|_\sigma \le \|\psi_1(x,t)\|_\sigma + \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\Bigg|2\int\limits_{|x|}^{t}\frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4}e^{-\sigma(\alpha-|x|)}\,d\alpha$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\Theta\,d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi$$

$$\times\int\limits_0^{t-\alpha}[((\psi_2(\tau)(g_1(\xi,t-\alpha-\tau+|\xi|)-(g_2(\tau)-f_1(\tau))\psi_1(\xi,t-\alpha-\tau+|\xi|)$$

$$2\psi_2(\tau)(g_2(t-\alpha-\tau)-f_1(t-\alpha-\tau))]e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\alpha-\tau)}d\tau\Bigg|$$

$$\le\left(1+\frac{8\pi RT(T-|x_0|)}{\sigma}\right)\|\psi\|_\sigma\le\left(1+\frac{4C_1(R)}{\sigma}\right)\|\psi\|_\sigma;$$

$$\|\partial G[g]\psi)_2\|_\sigma\le\left(1+\frac{8\pi RT(T-|x_0|)}{\sigma}\right)\|\psi\|_\sigma=\left(1+\frac{4C_1(R)}{\sigma}\right)\|\psi\|_\sigma.$$

Таким образом,

$$\|\partial G[g]\psi)\|_\sigma\le 2\left(1+\frac{4C_1(R)}{\sigma}\right)\|\psi\|_\sigma.$$

Следовательно, $\partial G[g]\psi$ непрерывен, а это означает, что существует сильная производная оператора G, совпадающая со слабой, т. е. $G'[g]\psi=\partial G[g]\psi$.

Проверим выполнение условия Липшица. По определению имеем

$$\|G'[g]-G'[\tilde g]\|_\sigma=\sup_{\|\psi\|_\sigma=1}\frac{\|G'[g]\psi-G'[\tilde g]\psi\|_\sigma}{\|\psi\|_\sigma}.$$

Оценим

$$\|(G'[g]\psi)_1-(G'[\tilde g]\psi)_1\|_\sigma=\|(F'[g]\psi)_1-(F'[\tilde g]\psi)_1\|_\sigma$$

$$=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\Bigg|2\int\limits_{|x|}^{t}\frac{(\alpha^2-|x|^2)^2}{4}\,d\alpha\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\Theta\,d\Theta}{(\alpha-|x|\cos\Theta)^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi$$

$$\times\int\limits_0^{t-\alpha}[4\pi(\psi_2(\tau)(g_1(\xi,t-\alpha-\tau+|\xi|)-\tilde g_1(\xi,t-\alpha-\tau+|\xi|))$$

$$-(g_2(\tau)-\tilde g_2(\tau))\psi_1(\xi,t-\alpha-\tau+|\xi|)-2\psi_2(\tau)(g_2(t-\alpha-\tau)-\tilde g_2(t-\alpha-\tau))]$$

$$\times e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\alpha-\tau)}e^{-\sigma(\alpha-|x|)}d\tau\Bigg|\le\frac{8\pi T(T-|x_0|)}{\sigma}\|\psi\|_\sigma\|g-\tilde g\|_\sigma.$$

Аналогично получим

$$\|(G'[g]\psi)_2-(G'[\tilde g]\psi)_2\|_\sigma\le\frac{8\pi T(T-|x_0|)}{\sigma}\|\psi\|_\sigma\|g-\tilde g\|_\sigma.$$

Отсюда

$$\|G'[g]-G'[\tilde g]\|_\sigma\le L\|g-\tilde g\|_\sigma,\quad L=\frac{16\pi T(T-|x_0|)}{\sigma},$$

т. е. оператор G' удовлетворяет условию Липшица, причем $L = O(\sigma^{-1})$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4. Как следует из условий теоремы Ньютона — Канторовича (см. [8]), для доказательства теоремы 4 необходимо получить оценки

$$\|\Gamma_0\| = \|(G'[g_0])^{-1}\|_\sigma \leq b_1 \text{ и } \|\Gamma_0 G g_0\|_\sigma \leq b_2$$

и проверить выполнение неравенства

$$\mu_0 = b_1 L b_2 \leq \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Из определения оператора $G'[g]$ следует, что оператор $G'[g_0] = E$ тождественный, отсюда $b_1 = 1$, а $\|\Gamma_0 G g_0\|_\sigma = \|f_t\|_\sigma \leq \|f_t\|$ из условия (3.2). Таким образом, выбирая $\sigma > \sigma_0 = 32\pi T(T - |x_0|)\|f_t\|$, приходим к выполнению неравенства (3.11). Это означает (см. [7]), что верна оценка

$$\|g_n - g\|_\sigma \leq \frac{1}{2^n}(2\mu_0)^{2^n - 1}\|f_t\|.$$

Отсюда и из (3.2) легко перейдем к (3.8), что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из доказательств теорем 3 или 4.

Замечание. По аналогичной схеме может быть исследована обратная задача определения памяти для уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-\tau)\Delta u(x,\tau)\,d\tau = 0$$

с данными Коши (1.2) и информацией (1.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A.* Identification problems for integrodifferential equations // Ill-posed problems in natural sciences. Moscow: TVP Sci. Publ., 1992. P. 342–366.
2. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Математический анализ и дискретная математика. Новосибирск: НГУ, 1989. С. 19–26.
3. *Bukhgeĭm A. L.* Inverse problems of memory reconstruction // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 3. P. 193–206.
4. *Janno J.* Global existence for a hyperbolic integrodifferential inverse problem // Forum Math. 1996. V. 8, N 3. P. 303–317.
5. *Бухгейм А. Л., Калинина Н. И.* Обратные задачи восстановления памяти // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 6. С. 727–729.
6. *Бухгейм А. Л., Калинина Н. И.* Глобальная сходимость метода Ньютона в обратных задачах восстановления памяти // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1018–1033.
7. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1969.
8. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 3 декабря 1998 г.,
окончательный вариант — 28 февраля 2000 г.

г. Новосибирск
bukhgeim@math.nsc.ru