Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.512

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ФУРЬЕ — ХААРА

И. Б. Брыскин, О. В. Лелонд, Е. М. Семенов

Аннотация: Всякая последовательность λ порождает мультипликатор Λ по системе Хаара. Если E, F — перестановочно-инвариантные пространства, то $[E, F]$ — пространство последовательностей с нормой $\|\lambda\| = \|\Lambda\|_{E,F}$. Изучаются пространства $[L_p, L_q]$ и близкие к ним пространства. Библиогр. 9.

1. *Системой Хаара* называют ортонормированную на $[0,1]$ систему функций $\chi_0^0(t) \equiv 1$,

$$\chi_n^k(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & (k-1)2^{-n} < t < (k-1/2)2^{-n}, \\ -2^{n/2}, & (k-1/2)2^{-n} < t < k2^{-n}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0,1], \end{cases}$$

где $1 \le k \le 2^n$, $n = 0, 1, \dots$. Множество индексов (n, k), определяющих систему Хаара, будем обозначать через Ω. Иногда удобно использовать одноиндексную систему Хаара с естественной нумерацией. Формула $m = 2^n + k$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Ω и множеством целых чисел.

Всякая последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ порождает мультипликатор Λ, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$\Lambda\Big(\sum_{n\ge1} c_n\chi_n\Big) = \sum_{n\ge1} \lambda_n c_n \chi_n.$$

Согласно классической теореме Пэли — Марцинкевича [1, 2.с.5]

$$\|\Lambda x\|_{L_p} \le c_p \|x\|_{L_p}$$

для всех $x \in L_p$, если $1 < p < \infty$ и $|\lambda_n| \le 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Точное значение $c_p = \max(p, p') - 1$, где $1/p + 1/p' = 1$, найдено Д. Буркхолдером [2]. Мультипликаторы по системе Хаара изучались в работах [3–6] и др. Настоящая работа примыкает к указанному направлению. Получение точных теорем о мультипликаторах из L_p в L_q требует привлечения пространств Лоренца $L_{p,q}$.

2. Приведем необходимые определения. Банахово функциональное пространство E на $[0,1]$ с мерой Лебега называется *перестановочно-инвариантным* (r.i.) или *симметричным*, если

1) из $|x(t)| \le |y(t)|$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости $x(t)$ и $y(t)$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству.

Обозначим через $\varkappa_e(t)$ характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0,1]$. Так как для любого r.i. пространства E величина $\|\varkappa_e\|_E$ зависит только от меры e, существует такая функция $\varphi_E(s)$ на $[0,1]$, что

$$\|\varkappa_e\|_E = \varphi_E(s),$$

где $s = \operatorname{mes} e$ — лебегова мера. Функция $\varphi_E(t)$ называется *фундаментальной функцией пространства* E.

Для любого $\tau > 0$ оператор

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(\frac{t}{\tau}), & 0 \le t \le \min(\tau, 1), \\ 0, & \min(\tau, 1) < t \le 1, \end{cases}$$

ограничен в r.i. пространстве E и $\|\sigma_\tau\|_E \le \max(1, \tau)$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда пространства* E. Всегда $0 \le \alpha_E \le \beta_E \le 1$. Без ограничения общности считаем $\|\varkappa_{(0,1)}\|_E = 1$.

Если E — r.i. пространство, то через E' обозначается множество измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \le 1} \int_0^1 x(t) y(t)\, dt < \infty.$$

Известно, что E' также r.i. пространство. Если E сепарабельно, то E' совпадает с сопряженным пространством E^* и их нормы равны. Если E сепарабельно и не рефлексивно, то вложение $E \subset E''$ изометрично.

Пространства Лоренца $L_{p,q}$ играют важную роль в теории r.i. пространств. Если $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, то через $L_{p,q}$ обозначается множество суммируемых функций, для которых

$$\|x\|_{L_{p,q}} = \left(\frac{q}{p} \int_0^1 (x^*(t) t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty,$$

где $x^*(t)$ — перестановка функции $|x(t)|$ в убывающем порядке. Если $q > p$, то $\|\cdot\|_{L_{p,q}}$ — квазинорма, эквивалентная некоторой норме. Если $1 \le q < r \le \infty$, то $L_{p,q} \subset L_{p,r}$, и это вложение строгое. Очевидно, $L_{p,p}$ совпадает с L_p.

Система Хаара — полная ортонормированная система. Если r.i. пространство E сепарабельно, то множество полиномов по системе Хаара плотно в E. Обозначим через $S_n x$ частичную сумму порядка n функции $x \in L_1$. Неравенство

$$\|S_n x\| \le \|x\|_E \tag{1}$$

справедливо для любых r.i. пространств E, $x \in E$, и всех n. Если x, y, $xy \in L_1$, то

$$\int_0^1 x(t) y(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 x(t) S_n y(t)\, dt. \tag{2}$$

Неравенство (1) означает, что система Хаара образует шаудеровский базис в любом сепарабельном r.i. пространстве. Для того чтобы система Хаара была безусловным базисом в сепарабельном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_E \le \beta_E < 1$.

Если для некоторых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ выполнены неравенства $\frac{1}{c}\alpha_n \le \beta_n \le c\alpha_n$ при некотором $c > 0$ и при всех $n = 1, 2, \ldots$, то в этом случае будем писать $\{\alpha_n\} \approx \{\beta_n\}$.

Все изложенные выше сведения о r.i. пространствах содержатся в [1, 5], о системе Хаара — в [1, 6–8].

3. Если x, y — полиномы по системе Хаара, то

$$\int_0^1 \Lambda x(t)y(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\Lambda y(t)\,dt. \tag{3}$$

Отсюда вытекает следующее утверждение. Если E, F — рефлексивные r.i. пространства и Λ непрерывен из E в F, то $\Lambda^* = \Lambda$ и Λ непрерывен из F^* в E^*. Следовательно, $\|\Lambda\|_{E,F} = \|\Lambda\|_{F^*,E^*}$. Это простое утверждение допускает следующее уточнение.

Если Λ непрерывен из E в F, то Λ непрерывен из F' в E' и

$$\|\Lambda\|_{E,F} = \|\Lambda\|_{F',E'}. \tag{4}$$

Действительно, в силу (2)

$$\|\Lambda\|_{E,F} = \sup_{\substack{\|x\|_E\le 1\\ \|y\|_{F'}\le 1}} \int_0^1 \Lambda x(t)y(t)\,dt = \sup_{\substack{\|x\|_E\le 1\\ \|y\|_{F'}\le 1}} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Lambda x(t)S_n y(t)\,dt$$

$$= \sup_{\substack{\|x\|_E\le 1\\ \|y\|_{F'}\le 1}} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Lambda S_n x(t)S_n y(t)\,dt = \sup_{\substack{\|x\|_E\le 1\\ \|y\|_{F'}\le 1,\ x,y\in P}} \int_0^1 \Lambda x(t)y(t)\,dt, \tag{5}$$

где S_n — частичные суммы ряда Фурье — Хаара и P — множество полиномов по системе Хаара. Точно так же доказывается, что

$$\|\Lambda\|_{F',E'} = \sup_{\substack{\|x\|_{E''}\le 1\\ \|y\|_{F'}\le 1,\ x,y\in P}} \int_0^1 x(t)\Lambda y(t)\,dt = \sup_{\substack{\|x\|_E\le 1\\ \|y\|_{F'}\le 1, x,y\in P}} \int_0^1 x(t)\Lambda y(t)\,dt.$$

Из полученных формул и (3) следует (4). Из (5) также вытекает, что

$$\|\Lambda\|_{E,F} = \|\Lambda\|_{E_0,F} \tag{6}$$

для любого r.i. пространства $E \ne L_\infty$, где E_0 — замыкание P в E.

Всякая пара r.i. пространств (E, F) порождает нормированное пространство последовательностей $[E, F]$ с нормой

$$\|\lambda\|_{[E,F]} = \|\Lambda\|_{E,F} = \sup_{\|x\|_E\le 1} \|\Lambda x\|_F.$$

Например, в силу равенства Парсеваля пространства $[L_2, L_2]$ и ℓ_∞ изометрически изоморфны.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < q < \infty$. Если мультипликатор Λ действует из L_p в L_q, то Λ действует из $L_{p,r}$ в $L_{q,r}$ для любого $1 \le r \le \infty$. В частности, Λ действует из L_p в $L_{q,p}$.*

Доказательство. Обозначим $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. В силу [3] или [6, 12.1]

$$\|\Lambda\|_{L_p,L_q} \asymp \sup_{n,k} |\lambda_{n,k}| 2^{n\gamma}. \tag{7}$$

Константы эквивалентности зависят только от p, q. Поэтому если $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \gamma$, $1 < r < s < \infty$, то Λ непрерывен из L_r в L_s. Таким образом, для любого $r \in (1, 1/\gamma)$ оператор Λ непрерывен из L_r в L_s, где $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \gamma$. К семейству пространств (L_r, L_s), $1 < r < \frac{1}{\gamma}$, и оператору Λ применим интерполяционную теорему 2.6.1 из [5]. В силу этой теоремы оператор Λ непрерывен из r.i. пространства E в r.i. пространство E_γ, где

$$\|x\|_{E_\gamma} = \|x^*(t)t^{-\gamma}\|_E,$$

если $\gamma < \alpha_E \le \beta_E < 1$. В частности, Λ непрерывен из $L_{p,r}$ в $(L_{p,r})_\gamma$. Согласно [5, 2.6.15] пространство $(L_{p,r})_\gamma$ совпадает с $L_{q,r}$ с точностью до эквивалентности. Если взять $r = p$, то отсюда вытекает, что Λ непрерывен из L_p в $L_{q,p}$. $\square$

Пару r.i. пространств (E, F), будем называть *точной*, если для любого r.i. пространства $F_1 \subset F$, $F_1 \ne F$, нормы пространств $[E, F]$ и $[E, F_1]$ не эквивалентны. Так как $[E, F_1] \subset [E, F]$, то точность пары (E, F) означает, что это вложение является строгим.

Дадим эквивалентное определение точной пары. Рассмотрим множество $Q = \{\Lambda x\}$, где $\|\Lambda\|_{E,F} \le 1$, $\|x\|_E \le 1$. Очевидно, это множество содержится в единичном шаре пространства F. Обозначим через $\omega(E, F)$ r.i. пространство такое, что единичный шар $\omega(E, F)$ содержит Q и норма $\omega(E, F)$ максимальна в множестве таких r.i. пространств. Точность пары (E, F) эквивалентна равенству $\omega(E, F) = F$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p, q < \infty$. Для того чтобы пара (L_p, L_q) была точной, необходимо и достаточно, чтобы $p \ge q$.*

Доказательство. Если $p < q$, то $L_{q,p} \subset L_q$, и это вложение является строгим [1, 2.b.9]. Теорема 1 показывает, что $[L_p, L_q] \subset [L_p, L_{q,p}]$. Обратное включение $[L_p, L_q] \supset [L_p, L_{q,p}]$ очевидно. Следовательно, пространства $[L_p, L_q]$ и $[L_p, L_{q,p}]$ совпадают с точностью до эквивалентности. Более того, в силу (7)

$$\|\lambda\|_{[L_p, L_q]} \approx \|\lambda\|_{[L_p, L_{q,p}]} \approx \sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Точность пары (L_p, L_p) очевидна.

Предположим, что $q < p$. Пусть

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})}(t), \tag{8}$$

где $0 \le y_1 \le y_2 \le \dots$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^q 2^{-n} = 1. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{q/p} \chi_n^2(t)$$

и последовательность

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} y_n^{q/r}, & k = 2, \\ 0, & k \ne 2, \end{cases} \tag{10}$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Ясно, что $x \in L_p$ и $\|x\|_{L_p} = 1$. Функция

$$\mu(t) = \sup_{n,k} |\lambda_{n,k} 2^{-n/2} \chi_n^k(t)| = y^{q/r}(t)$$

принадлежит L_r, и $\|\mu\|_{L_r} = 1$. В силу [6, 12.2] мультипликатор Λ, определяемый последовательностью (10), непрерывно действует из L_p в L_q. По определению

$$|\Lambda x(t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n^{q/r} y_n^{q/p} 2^{-n/2} \chi_n^2(t)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} y_n |2^{-n/2}\chi_n^2(t)| = y(t).$$

Таким образом, для любой функции из L_q вида (8) с $\|y\|_{L_q} = 1$ найдутся такие $x \in L_p$ и мультипликатор Λ, действующий из L_p в L_q, что $\Lambda x = y$.

Для любой функции $z \in L_q$ построим функцию

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z^*(2^{-n}) \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})}(t).$$

Функция $u(t)$ имеет вид (8), и

$$u(t) \geq z^*(t) \geq \sigma_{1/2} u. \tag{11}$$

Поэтому $\|u\|_{L_q} \geq \|z\|_{L_q} \geq 2^{-1/q}\|u\|_{L_q}$. Этим доказано, что для любой функции $z \in L_q$ существуют функция $x \in L_p$ и мультипликатор Λ, действующий из L_p в L_q, такие, что $\Lambda x = y$. $\square$

В связи с теоремой 2 естественно возникает вопрос о нахождении $\omega(L_p, L_q)$ в случае, когда пара (L_p, L_q) не является точной.

Теорема 3. *Если* $1 < p < q < \infty$, *то*

$$\omega(L_p, L_q) = L_{q,p}.$$

Доказательство. Включение $\omega(L_p, L_q) \subset L_{q,p}$ непосредственно вытекает из теоремы 1. Докажем противоположное включение. Пусть $y \in L_{q,p}$. Это означает, что

$$\int_0^1 (y^*(t) t^{\frac{1}{q}})^p \frac{dt}{t} < \infty. \tag{12}$$

Следовательно, $x(t) = y^*(t) t^{-\gamma} \in L_p$. Напомним, что $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. В силу (12) функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^*(2^{-n}) \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})}(t)$$

принадлежит L_p. Отсюда вытекает, что функция

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y^*(2^{-n}) 2^{n\gamma} 2^{-n/2} \chi_n^2(t)$$

также принадлежит L_p.

Рассмотрим мультипликатор Λ, порожденный последовательностью

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} 2^{-n\gamma}, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2. \end{cases}$$

Ввиду теоремы 1 и [6, 12.1] Λ действует из L_p в $L_{q,p}$. Так как

$$|\Lambda v(t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\gamma} y^*(2^{-n}) 2^{n\gamma} 2^{-n/2} \chi_n^2(t)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} y^*(2^{-n}) \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})}(t) \geq y^*(t),$$

то $y \in \omega(L_p, L_q)$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 \le r \le \infty$. Для того чтобы*

$$\|\lambda\|_{[L_p, L_{q,r}]} \approx \sup_{n,k\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n(1/p-1/q)},$$

необходимо и достаточно, чтобы $r \ge p$.

Доказательство. Неравенство

$$\|\lambda\|_{[L_p, L_{q,r}]} \ge \sup_{(n,k)\in\Omega} \frac{\|\Lambda\chi_n^k\|_{L_{q,r}}}{\|\chi_n^k\|_{L_p}} = \sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n(1/p-1/q)}$$

справедливо для всех $r \in [1, \infty]$.

Так как $L_{q,r} \supset L_{q,p}$, то $[L_p, L_{q,r}] \supset [L_p, L_{q,p}]$. Отсюда и из теоремы 1 следует оценка

$$\|\lambda\|_{[L_p, L_{q,r}]} \le c_1 \|\lambda\|_{[L_p . L_{q,p}]} \le c_2 \sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n(1/p-1/q)}$$

для всех $r \ge p$.

Если же для некоторых $r < p$, $c_3 > 0$

$$\|\lambda\|_{[L_p, L_{q,r}]} \le c_3 \sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n(1/p-1/q)},$$

то это означает, что $\omega(L_p, L_q) \subset L_{q,r}$. Тогда в силу теоремы 3 $L_{q,p} \subset L_{q,r}$. Полученное противоречие доказывает вторую часть утверждения. $\square$

Понятие оптимальной интерполяционной тройки, изученное в [5, 2.6.6], тесно связано с понятием точной пары. Теоремы 2 и 3 означают, что некоторые оптимальные тройки могут быть найдены с помощью мультипликаторов Фурье — Хаара.

Как отмечалось выше, в [6, гл. 12] описаны пространства $[L_p, L_q]$. Задача об описании $[E, F]$, где E, F — r.i. пространства с одинаковой фундаментальной функцией, является объективно более сложной. Ее удалось решить при дополнительных ограничениях на класс мультипликаторов. Ради кратности обозначим норму мультипликатора Λ из $L_{p,\infty}$ в $L_{p,1}$ через $\|\Lambda\|_p$. Рассмотрим мультипликаторы Λ такие, что $\lambda_{n,k}$ не зависит от k, и обозначим

$$\lambda_{n,k} = \lambda_n. \tag{13}$$

Теорема 4. *Пусть $1 < p < \infty$, Λ — мультипликатор вида (13) и $|\lambda_0| \ge |\lambda_1| \ge \dots$. Для непрерывности Λ из $L_{p,\infty}$ в $L_{p,1}$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda \in \ell_1$. Более того,*

$$\|\Lambda\|_p \approx \|\lambda\|_{\ell_1}.$$

Константы эквивалентности зависят только от p.

Доказательство. Последовательность функций

$$x_m(t) = \sum_{n=1}^{m} 2^{n/p} 2^{-n/2} \chi_n^2(t)$$

равномерно ограничена в $L_{p,\infty}$, так как $|x_m(t)| \le 2^{1/p} t^{-1/p}$ и $t^{-1/p} \in L_{p,\infty}$, $\|t^{-1/p}\|_{L_{p,\infty}} = \frac{p}{p-1}$. Имеем

$$|\Lambda x_m(t)| = \left| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n 2^{n/p} 2^{-n/2} \chi_n^2(t) \right| = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n 2^{n/p} \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})}(t).$$

В силу [9] существует такая константа $c_p > 0$, что

$$\|\Lambda x_m\|_{L_{p,1}} \geq c_p \sum_{n=1}^{m} \|\lambda_n 2^{n/p} \varkappa_{(2^{-n},2^{-n+1})}\|_{L_{p,1}} \geq c_p \sum_{n=1}^{m} |\lambda_m|.$$

Поэтому

$$\|\Lambda\|_p \geq c_p \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n| \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-1}$$

и

$$\|\Lambda\|_p \geq \frac{c_p(p-1)}{p} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|.$$

Для доказательства противоположного неравенства обозначим через Λ_m мультипликатор, порожденный последовательностью $\lambda^m = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, 0, \dots)$, где m — натуральное число. С учетом (2) имеем

$$\|\Lambda\|_{E,F} = \sup_{m \geq 1} \|\Lambda_m\|_{E,F}$$

для любой пары r.i. пространств E, F. В частности,

$$\|\Lambda\|_p = \sup_m \|\Lambda_m\|_p. \tag{14}$$

Хорошо известно [1, 2.c.6], что система Хаара образует безусловный базис в $L_{p,1}$ и $L_{p,\infty}$. Поэтому мы можем предполагать, что $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1.$$

Пусть m — натуральное число. Обозначим через Q_m множество таких последовательностей $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots)$, что выполнены указанные выше условия и $\lambda_k = 0$ для $k > m$. Тогда

$$Q_m = \operatorname{conv}\left\{ \frac{1}{j+1} (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{j+1}, 0, \dots, 0),\ 0 \leq j \leq m \right\}$$

и

$$\sup_{\lambda \in Q_m} \|\Lambda\|_p = \max_{0 \leq j \leq m} \|M_j\|_p, \tag{15}$$

где $\mu_j = \frac{1}{j+1}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{j+1}, 0, 0, \dots, 0)$ и M_j — мультипликатор, соответствующий последовательности μ_j. Ясно, что $\|M_j\|_p$ совпадает с нормой $\frac{1}{j+1}\|S_{2^{j+1}}\|_{L_{p,\infty}, L_{p,1}}$, где $S_{2^{j+1}}$ — частичная сумма порядка 2^{j+1}.

Пусть $x \in L_{p,\infty}$, $\|x\|_{L_{p,\infty}} \leq 1$. Оператор S_n имеет единичную норму в любом r.i. пространстве E [1, 2.c.1], поэтому $y = S_{2^{j+1}}$ — полином по системе Хаара порядка 2^{j+1} и $\|y\|_{L_{p,\infty}} \leq 1$. В силу [5, 2.5.3] $y^*(t) \leq t^{-1/p}$ для всех $t \in (0, 1]$. Функция $y^*(t)$ принимает постоянное значение на интервале $(0, 2^{-j-1})$. Следовательно,

$$y^*(t) \leq \min(2^{(j+1)/p}, t^{-1/p}).$$

Отсюда

$$\|y\|_{L_{p,1}} = \frac{1}{p}\int\limits_0^1 y^*(t)t^{1/p-1}\,dt \le \frac{1}{p}\int\limits_0^{2^{-j-1}} 2^{\frac{j+1}{p}}t^{1/p-1}\,dt + \frac{1}{p}\int\limits_{2^{-j-1}}^1 \frac{dt}{t}$$

$$= 2^{\frac{j+1}{p}}2^{-\frac{j+1}{p}} + \frac{1}{p}\ln 2^{j+1} = 1 + \frac{\ln 2}{p}(j+1)$$

и

$$\|M_j\|_p \le \frac{1}{j+1} + \frac{\ln 2}{p} \le 2.$$

Этим показано, что $\|\Lambda\|_p \le 2$ для любого $\lambda \in Q_m$. Доказанное неравенство и (14), (15) влекут

$$\|\Lambda\|_p \le 2C_p\|\lambda\|_{\ell_1}$$

для любых $\lambda \in \ell_1$, $|\lambda_k| \downarrow 0$, где C_p — безусловная константа системы Хаара в пространстве $L^0_{p,\infty}$.

Критерий непрерывности Λ из $L_{p,\infty}$ в $L_{p,1}$ не зависит от p. Поэтому из теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *Пусть* Λ *— мультипликатор вида* (13) *и* $|\lambda_0| \ge |\lambda_1| \ge \dots$. *Если* Λ *непрерывен из* $L_{p,\infty}$ *в* $L_{p,1}$ *для некоторого* $p \in (1,\infty)$, *то* Λ *непрерывен из* $L_{p,\infty}$ *в* $L_{p,1}$ *для всех* $p \in (1,\infty)$.

Условие монотонности последовательности $|\lambda_k|$ в теореме 4 существенно. Действительно, обозначим через T_n мультипликатор, соответствующий последовательности

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots),$$

где $n \ge 0$. Ясно, что $\|e_n\|_{\ell_1} = 1$. Функции

$$x_n(t) = 2^{-\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{2^n}{k}\right)^{1/p}\chi_n^k(t)$$

обладают следующими очевидными свойствами:

1) $T_n x_n = x_n$;
2) $(2t)^{-1/p} \le x_n(t)$ для $t \in [2^{-n}, 1]$;
3) $x_n(t) \le t^{-1/p}$ для $t \in (0,1]$.

Используя свойства 2 и 3, получаем

$$\|x_n\|_{L_{p,1}} = \frac{1}{p}\int\limits_0^1 x_n^*(t)t^{\frac{1}{p}-1}\,dt \ge \frac{1}{p}\int\limits_0^1 (2t)^{-1/p}t^{1/p-1}\,dt = \frac{2^{-1/p}}{p}\int\limits_{2^{-n}}^1 \frac{dt}{t} = \frac{2^{-1/p}\ln 2}{p}n$$

и

$$\|x_n\|_{L_{p,\infty}} \le \|t^{-1/p}\|_{L_{p,\infty}} = \frac{p}{p-1}.$$

Отсюда

$$\|T_n\|_p \ge \frac{\|x_n\|_{L_{p,1}}}{\|x_n\|_{L_{p,\infty}}} \ge \frac{(p-1)\ln 2}{2^{1/p}p^2}n, \tag{16}$$

что и доказывает наше утверждение.

Нетрудно показать, что оценка (16) точна в следующем смысле: существует такая константа $c_p > 0$, что

$$\|T_n\|_p \le c_p n$$

для всех натуральных n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lindenstrauss L., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Functional spaces. Berlin: Springer Verl., 1979.
2. *Burkholder D. L.* A nonlinear partial differential equation and unconditional constant of the Haar system in L_p // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. N 7. P. 591–595.
3. *Yano S.* On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. 1959. N 11. P. 191–215.
4. *Кротов В. Г.* О безусловной сходимости рядов Хаара в Λ_ω^p // Мат. заметки. 1978. Т. 5, № 23. С. 685–695.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
6. *Novikov I., Semenov E.* Haar series and linear operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
7. *Голубов Б. И.* Ряды Фурье по системе Хаара // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 109–146. (Итоги науки).
8. *Кашин Б. С., Саакян А. Л.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
9. *Новиков И. Я.* Последовательности характеристических функций в симметричных пространствах // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 193–196.

Статья поступила 14 января 1999 г.

Центр технического образования при университете Тель-Авива, Израиль;
Воронежский гос. университет
root@func.vsu.ru