Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.982.27

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ — РАДЕМАХЕРА ФУНКЦИЙ ИЗ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. В. Асташкин

Аннотация: Рассматривается задача описания пространства $F(X)$ последовательностей коэффициентов Фурье — Радемахера, соответствующего функциональному симметричному пространству X на отрезке. Используется вещественный метод интерполяции. Приводятся конкретные примеры. Библиогр. 23.

1. Предварительные замечания и определения

Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченная ортонормированная система функций на отрезке $[0,1]$. Для функции $x \in L_1[0,1]$ через $c_k = c_k(x)$ обозначим ее коэффициенты Фурье по этой системе.

Если F — оператор, ставящий в соответствие функции x последовательность ее коэффициентов Фурье, т. е. $Fx = (c_k(x))_{k=1}^{\infty}$, то он ограниченно действует из L_2 в l_2 и по теореме Мерсера [1, с. 181] из L_1 в c_0. Поэтому для произвольной $x \in L_1$ выполнено неравенство

$$\mathscr{K}(t, Fx; c_0, l_2) \le A_1 \mathscr{K}(t, x; L_1, L_2) \quad (t > 0), \tag{1}$$

где

$$\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}$$

— $\mathscr{K}$-функционал Петре, определенный для $x \in X_0 + X_1$ ((X_0, X_1) — произвольная банахова пара) и $t > 0$, а $A_1 = \max\{1, \sup\{|w_k(t)| : k = 1, 2, \dots,\ t \in [0,1]\}\}$.

На основе неравенства (1) в работе [2] получена следующая оценка для коэффициентов Фурье функции $x \in L_1$:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \left[c_k^*(x)\right]^2\right\}^{1/2} \le A_1 \left\{\sqrt{n} \int_0^{1/n} x^*(t)\,dt + \left(\int_{1/n}^{1} [x^*(t)]^2\,dt\right)^{1/2}\right\}, \tag{2}$$

где $n = 1, 2, \dots$, а через $x^*(t)$ и $(c_k^*(x))_{k=1}^{\infty}$ обозначены убывающие перестановки функции $|x(u)|$ и последовательности $(|c_i(x)|)_{i=1}^{\infty}$ соответственно.

Соотношение (2) можно рассматривать как неравенство Бесселя для суммируемых функций, и оно является в определенном смысле точным в случае тригонометрической системы [2]. В то же время для лакунарных систем, например для системы Радемахера

$$r_k(t) = \operatorname{sign} \sin 2^{k-1}\pi t \quad (k = 1, 2, \dots),$$

неравенство (2) можно существенным образом усилить.

Напомним, что банахово пространство X измеримых на отрезке $[0,1]$ функций $x = x(t)$ называется *симметричным*, если из того, что $y^*(t) \le x^*(t)$ и

$x \in X$, следуют соотношения $y \in X$ и $\|y\|_X \le \|x\|_X$. Теория симметричных пространств (СП) подробно изложена, например, в монографии [3].

Наряду с пространствами L_p $(1 \le p \le \infty)$ важными примерами СП являются пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича.

Если $S(t) \ge 0$ — выпуклая непрерывная функция на $[0, \infty)$, $S(0) = 0$, то пространство Орлича L_S состоит из всех $x = x(t)$, для которых

$$\|x\|_{L_S} = \inf\left\{u > 0 : \int\limits_0^1 S\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \le 1\right\} < \infty.$$

Если $\varphi(t) \ge 0$ — вогнутая возрастающая функция на $[0, 1]$, то пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех $x = x(t)$ таких, что

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup\left\{\frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\, ds : 0 < t \le 1\right\} < \infty,$$

а пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ $(1 \le p < \infty)$ — из всех $x = x(t)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} = \left\{\int\limits_0^1 [x^*(t)]^p \, d\varphi(t)\right\}^{1/p} < \infty.$$

В частности, $\Lambda_1(\varphi)$ будем обозначать через $\Lambda(\varphi)$.

Пусть $N(u) = e^{u^2} - 1$, L_N — пространство Орлича, построенное по этой функции, а G — замыкание L_∞ в L_N. Как показали В. А. Родин и Е. М. Семенов в работе [4], система $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ в СП X эквивалентна стандартному базису в l_2 тогда и только тогда, когда $X \supset G$. Эквивалентность $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ в X стандартному базису в l_2 означает существование константы $C > 0$ такой, что

$$C^{-1}\|(a_k)\|_2 \le \left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_X \le C\|(a_k)\|_2, \tag{3}$$

где $\|(a_k)\|_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^\infty a_k^2\right)^{1/2}$. Позднее С. Монтгомери-Смит усилил сформулированный результат, найдя распределение сумм Радемахера [5]. При этом он использовал $\mathscr{K}$-функционал, соответствующий банаховой паре (l_1, l_2).

Кроме того, если норма СП X порядково полунепрерывна (т. е. из того, что $x_n = x_n(t) \ge 0$ и $x_n(t) \uparrow x(t)$ при $n \to \infty$ почти всюду на $[0, 1]$, следует, что $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$), то его подпространство, порожденное системой Радемахера, дополняемо в X тогда и только тогда, когда $G \subset X \subset G'$ ([6] или [7, 2.b.4]). Здесь и далее X' — пространство, двойственное к СП X. Оно состоит из всех $y = y(t)$ таких, что

$$\|y\|_{X'} = \sup\left\{\int\limits_0^1 y(t)x(t)\, dt : \|x\|_X \le 1\right\} < \infty.$$

Дополнительно заметим, что при выполнении условия $G \subset X \subset G'$ в СП X ограничен ортогональный проектор

$$Px(t) = \sum_{k=1}^\infty c_k(x) r_k(t),$$

где $c_k(x) = \int\limits_0^1 x(t) r_k(t)\, dt$ — коэффициенты Фурье — Радемахера функции x.

Из приведенных результатов следует, что оператор $Fx = (c_k(x))_{k=1}^{\infty}$ ограниченно действует из пространства G' в l_2. Действительно, ввиду (3) и ограниченности P в G'

$$\|Fx\|_2 = \left\|(c_k(x))_{k=1}^{\infty}\right\|_2 \le C\|Px\|_{G'} \le C\|P\|_{G' \to G'}\|x\|_{G'}.$$

Таким образом, по определению $\mathscr{K}$-функционала для системы Радемахера вместо (1) мы получаем неравенство

$$\mathscr{K}(t, Fx; c_0, l_2) \le A_2 \mathscr{K}(t, x; L_1, G') \quad (t > 0). \tag{4}$$

Заменим $\mathscr{K}$-функционалы из этого соотношения эквивалентными выражениями.

Как известно [8], пространство Орлича L_N совпадает с пространством Марцинкевича $M(\psi_1)$, где $\psi_1(u) = u \ln^{1/2} e/u$. Поэтому $G' = \Lambda(\psi_1)$ [3, с. 158]. Так как L_1 также пространство Лоренца, построенное по функции $\psi_0(u) = u$, то

$$\mathscr{K}(t, x; L_1, G') \asymp \int\limits_0^1 x^*(s)\, d(\min(s, ts \ln^{1/2} e/s))$$

[3, с. 164] (это означает выполнение неравенств, аналогичных неравенствам (3), с константой, не зависящей от $x \in L_1$ и $t > 0$). После несложных преобразований получим, что

$$\mathscr{K}(t, x; L_1, G') \asymp \int\limits_0^{\nu(t)} x^*(s)\, ds + t \int\limits_{\nu(t)}^1 x^*(s) \ln^{1/2} e/s\, ds, \tag{5}$$

где $\nu(t) = \exp(1 - 1/t^2)$.

Полагая $t = 1/\sqrt{n} (n = 1, 2, \dots)$, из (4), (5) и того, что по формуле Хольмстедта [9]

$$\mathscr{K}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, (a_k); c_0, l_2\right) \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left[a_k^*\right]^2\right)^{1/2},$$

приходим к неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left\{\sum_{k=1}^{n} \left[c_k^*(x)\right]^2\right\}^{1/2} \le A_2 \left\{\int\limits_0^{e^{1-n}} x^*(s)\, ds + \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{e^{1-n}}^1 x^*(s) \ln^{1/2} e/s\, ds\right\},$$

или

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \left[c_k^*(x)\right]^2\right\}^{1/2} \le A_2 \left\{\sqrt{n} \int\limits_0^{e^{1-n}} x^*(s)\, ds + \int\limits_{e^{1-n}}^1 x^*(s) \ln^{1/2} e/s\, ds\right\}, \tag{6}$$

где константа $A_2 > 0$ не зависит от $x \in L_1$ и $n = 1, 2, \dots$.

С помощью операции

$$x^{**}(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t x^*(s)\, ds$$

можно получить неравенство, аналогичное (6), в правой части которого будет лишь одно выражение.

Прежде всего для любого $0 < t \le 1$

$$\int_t^1 x^{**}(s)\,ds = \int_0^t x^*(u)\int_t^1 \frac{ds}{s}\,du + \int_t^1 x^*(u)\int_u^1 \frac{ds}{s}\,du$$
$$= \ln\frac{1}{t}\int_0^t x^*(u)\,du + \int_t^1 x^*(u)\ln\frac{1}{u}\,du. \quad (7)$$

Заметим, что при $0 < u \le e^{-2}$ выполнено неравенство $\ln^{1/2} e/u \le \ln 1/u$. Поэтому

$$\int_t^1 x^*(u)\ln 1/u\,du \ge \int_t^{e^{-2}} x^*(u)\ln 1/u\,du \ge \int_t^{e^{-2}} x^*(u)\ln^{1/2} e/u\,du,$$

и если $0 < t \le e^{-3}$, то

$$\int_t^1 x^*(u)\ln 1/u\,du \ge \int_{e^{-3}}^{e^{-2}} x^*(u)\ln 1/u\,du \ge \frac{2(e-1)}{e^3}x^*(e^{-2})$$
$$\ge \frac{1}{e(e+1)}\int_{e^{-2}}^1 x^*(u)\ln^{1/2} e/u\,du.$$

Таким образом, при $0 < t \le e^{-3}$

$$\int_t^1 x^*(u)\ln 1/u\,du \ge \frac{1}{e(e+2)}\int_t^1 x^*(u)\ln^{1/2} e/u\,du,$$

откуда ввиду (7) для всех $n \ge 4$

$$\int_{e^{1-n}}^1 x^{**}(u)\,du \ge (n-1)\int_0^{e^{1-n}} x^*(u)\,du + \frac{1}{e(e+2)}\int_{e^{1-n}}^1 x^*(u)\ln^{1/2} e/u\,du$$
$$\ge \frac{1}{e(e+2)}\left(\sqrt{n}\int_0^{e^{1-n}} x^*(u)\,du + \int_{e^{1-n}}^1 x^*(u)\ln^{1/2} e/u\,du\right).$$

В итоге из неравенства (6) получаем

$$\left\{\sum_{k=1}^n \left[c_k^*(x)\right]^2\right\}^{1/2} \le A_3\int_{e^{1-n}}^1 x^{**}(u)\,du, \quad (8)$$

где константа $A_3 > 0$ не зависит от $x \in L_1$ и $n \ge 4$.

Однако (и доказательство этого — главная цель работы) для коэффициентов Фурье — Радемахера функций из СП можно получить и гораздо более точную информацию, нежели соотношения (6) и (8).

Для измеримых на $[0,1]$ функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ положим

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt \quad \text{(если интеграл существует).}$$

Аналогично для последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ и $b = (b_k)_{k=1}^{\infty}$

$$(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad \text{(если ряд сходится).}$$

Тогда если

$$Ta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t), \tag{9}$$

то для произвольных функции $x = x(t)$ и финитной последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ выполнено соотношение

$$(Fx, a) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) a_k = \int_0^1 x(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t)\,dt = (x, Ta). \tag{10}$$

Используя двойственность, нетрудно получить описание множества коэффициентов Фурье — Радемахера СП X, если $X \subset G'$. Прежде всего ввиду неравенства Хинчина для пространства L_1 [10]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|Ta\|_{L_2} \le \|Ta\|_{L_1} \le \|Ta\|_{L_2}.$$

Следовательно, из равенства $\|Ta\|_{L_2} = \|a\|_2$ следует, что T — инъективный ограниченный оператор из l_2 в L_1. Но тогда сопряженный T^* — сюръективный ограниченный оператор из L_∞ в l_2 [11, с. 20]. Ввиду (10) $T^* = F$ и, значит, $F(L_\infty) = l_2$. Так как для любого СП X на $[0,1]$ имеет место вложение $X \supset L_\infty$ [3, с. 123], тем более $F(X) \supset l_2$. В то же время, как показано ранее, $F(G') \subset l_2$. Таким образом, получаем

Предложение 1. *Если симметричное пространство X содержится в G', то соответствующее ему пространство коэффициентов Фурье — Радемахера есть $F(X) = l_2$.*

Перейдем теперь к изучению более интересного случая: $X \supset G'$.

Так как система Радемахера обладает свойством Сидона, то F — сюръективный ограниченный оператор из L_1 на c_0 [1, с. 295], т. е.

$$F(L_1) = c_0. \tag{11}$$

Одновременно ввиду только что сформулированного предложения

$$F(G') = l_2. \tag{12}$$

Мы покажем, что соотношения сюръективности (11) и (12) можно «проинтерполировать» и для пространств, промежуточных между G' и L_1, пространства коэффициентов Фурье — Радемахера также являются вполне определенными симметричными пространствами последовательностей.

Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) — банаховы пары. Тройка пространств (X_0, X_1, X), $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ называется *интерполяционной относительно* *тройки* (Y_0, Y_1, Y), $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$, если любой линейный оператор A, ограниченный из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1, ограничен из X в Y. Если при этом дополнительно

$$\|A\|_{X\to Y} \le \max\{\|A\|_{X_i\to Y_i} : i = 0, 1\},$$

то тройку (X_0, X_1, X) называют *точной интерполяционной относительно тройки* (Y_0, Y_1, Y). Если $X_i = Y_i$ $(i = 0, 1)$ и $X = Y$, то говорят, что X — (*точное*) *интерполяционное пространство относительно пары* (X_0, X_1).

Важную роль в дальнейшем играет вещественный метод интерполяции. Напомним его определение.

Пусть E — банахово идеальное пространство (БИП) двусторонних числовых последовательностей $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$. Если (X_0, X_1) — произвольная банахова пара, то пространство $\mathscr{K}$-метода $(X_0, X_1)_E^{\mathscr{K}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$\|x\| = \|(\mathscr{K}(2^j, x; X_0, X_1))_j\|_E < \infty.$$

В пространство $\mathscr{J}$-метода $(X_0, X_1)_E^{\mathscr{J}}$ входят все $x \in X_0 + X_1$, допускающие представление

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \quad \text{(сходимость в } X_0 + X_1), \tag{13}$$

где $u_j \in X_0 \cap X_1$. Норма в $(X_0, X_1)_E^{\mathscr{J}}$ полагается равной

$$\inf_{\{u_j\}} \|(\mathscr{J}(2^j, u_j; X_0, X_1))_j\|_E,$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, для которых выполнено соотношение (13).

Если E — БИП двусторонних последовательностей и $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, то пространство $E(\alpha_k)$ состоит из всех $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ таких, что $(a_k\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in E$ и $\|a\|_{E(\alpha_k)} = \|(a_k\alpha_k)\|_E$. Предположим, что $E \supset \Delta(\vec{l}_\infty) = l_\infty(\max(1, 2^{-k}))$ (соответственно $\{0\} \ne E \subset \Sigma(\vec{l}_1) = l_1(\min(1, 2^{-k}))$). Тогда отображение $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathscr{K}}$ (соответственно $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathscr{J}}$) определяет точный интерполяционный функтор. Это означает, что для произвольных банаховых пар (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) тройка
$\big(X_0, X_1, (X_0, X_1)_E^{\mathscr{K}}\big)$ является точной интерполяционной относительно тройки $\big(Y_0, Y_1, (Y_0, Y_1)_E^{\mathscr{K}}\big)$ (и аналогично для $\mathscr{J}$-метода). Совокупность всех таких функторов называется *вещественным* $\mathscr{K}$- (соответственно $\mathscr{J}$-) *методом интерполяции.*

В частности, для $0 < \theta < 1$, $1 \le p \le \infty$ получаем классические интерполяционные пространства

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_0, X_1)_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathscr{K}} = (X_0, X_1)_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathscr{J}}.$$

2. Основные результаты

Как отмечалось ранее, пространство G' совпадает с пространством Лоренца $\Lambda(u\ln^{1/2} e/u)$. Поэтому оно q-вогнуто при любом $q > 1$ [12] и эластично в смысле работы [13]. Но тогда по следствию 5.10 из [13] интерполяция в банаховой паре (G', L_1) описывается $\mathscr{K}$-методом. Это означает, что для произвольного пространства X, интерполяционного относительно этой пары, выполнено равенство

$$X = (G', L_1)^{\mathscr{K}}_E \tag{14}$$

при некотором БИП E двусторонних последовательностей, которое можно считать точным интерполяционным относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$ [14].

Теорема 1. *Предположим, что X — сепарабельное* СП, *интерполяционное относительно пары (G', L_1), такое, что выполнено соотношение* (14). *Тогда соответствующее пространство коэффициентов Фурье — Радемахера $F(X)$ совпадает с сепарабельным пространством*

$$R = (l_2, c_0)^{\mathscr{K}}_E. \tag{15}$$

Доказательство. Ввиду соображений двойственности [11, с. 20] достаточно проверить, что сопряженный оператор F^* будет инъективен из R^* в X^*.

Прежде всего БИП E в соотношении (14) можно взять так, что будут выполнены условия теоремы двойственности для вещественного метода интерполяции [14, с. 128]:

$$\Delta(\vec{l}_\infty) \quad \text{всюду плотно в } E \tag{16}$$

и

$$E \not\subset l_\infty \quad \text{и} \quad E \not\subset l_\infty(2^{-k}). \tag{17}$$

Для доказательства (16) обозначим через E_0 замыкание $\Delta(\vec{l}_\infty)$ в E и покажем, что

$$X = (G', L_1)^{\mathscr{K}}_{E_0}. \tag{18}$$

Так как X сепарабельно, в нем всюду плотно пространство L_∞ [3, с. 138]. Поэтому по определению пространств $\mathscr{K}$-метода для произвольной функции $x \in X$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L_\infty$ такая, что при $n \to \infty$

$$\|x_n - x\|_X = \|(\mathscr{K}(2^k, x_n - x; G', L_1))_k\|_E \to 0.$$

При каждом $t > 0$ $\mathscr{K}$-функционал $\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1)$ является нормой на пространстве $X_0 + X_1$. Следовательно, если $n \to \infty$, то из предыдущего соотношения вытекает, что

$$\|(\mathscr{K}(2^k, x_n; G', L_1))_k - (\mathscr{K}(2^k, x; G', L_1))_k\|_E \to 0. \tag{19}$$

По определению $\mathscr{K}$-функционала при $k \le 0$ имеем $\mathscr{K}(2^k, x_n; G', L_1) \le 2^k \|x_n\|_{L_1}$, а при $k > 0$ будет $\mathscr{K}(2^k, x_n; G', L_1) \le \|x_n\|_{G'}$. Тем самым при каждом $n = 1, 2, \ldots$ последовательность $(\mathscr{K}(2^k, x_n; G', L_1))_{k=-\infty}^\infty$ лежит в $\Delta(\vec{l}_\infty)$ и из (19) следует, что $(\mathscr{K}(2^k, x; G', L_1))_{k=-\infty}^\infty \in E_0$, т. е. $x \in (G', L_1)^{\mathscr{K}}_{E_0}$. Соотношение (18) доказано, и, значит, условие (16) можно считать выполненным.

Перейдем теперь к условиям (17). Так как $\|y\|_{L_1} \le 2\|y\|_{G'}$, то для $y \in L_1$ и $0 < t \le 1$

$$\frac{1}{2} t \|y\|_{L_1} \le \mathscr{K}(t, y; G', L_1) \le t \|y\|_{L_1}.$$

Поэтому ввиду вложения $E \supset \Delta(\vec{l}_\infty) = l_\infty(\max(1, 2^{-k}))$ можно предположить, что $E \supset c_0$ (иначе вместо E возьмем пространство $E + c_0$, в котором по-прежнему будет всюду плотно $\Delta(\vec{l}_\infty)$). Отсюда, в частности, выводим, что $E \not\subset l_\infty(2^{-k})$.

Если же $E \subset l_\infty$, то из полноты пространства G' относительно L_1 получаем

$$G' \subset X = (G', L_1)^{\mathscr{K}}_E \subset (G', L_1)^{\mathscr{K}}_{l_\infty} = G'$$

[15, p. 384], т. е. $X = G'$. Совершенно аналогично $(l_2, c_0)^{\mathscr{K}}_E = l_2$, и утверждение теоремы содержится в соотношении (12). Таким образом, можно предположить, что $E \not\subset l_\infty$ и условия (17) также будем считать выполненными.

Так как $(G')^* = L_N$, $N(u) = e^{u^2} - 1$ [16, с. 97], по теореме двойственности для вещественного метода [14, с. 128] получаем

$$X^* = (L_N, L_\infty)^{\mathscr{J}}_{E^+} \quad \text{и} \quad R^* = (l_2, l_1)^{\mathscr{J}}_{E^+}, \tag{20}$$

где E^+ — БИП двусторонних последовательностей, дуальное к E относительно билинейного функционала

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k 2^{-k}, \quad a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}, \quad b = (b_k)_{k=-\infty}^{\infty},$$

т. е.

$$\|a\|_{E^+} = \sup\{\langle a, b\rangle : \|b\|_E \leq 1\}.$$

Из соотношений (16) и (17) следует, что l_2 всюду плотно в R [14, с. 106] и, значит, R сепарабельно. Поэтому сопряженные пространства X^* и R^* совпадают с двойственными X' и R' соответственно [17, с. 254], и ввиду (10) $F^* = T$. Далее, так как E — точное интерполяционное пространство относительно пары $\vec{l}_\infty$, то E^+ — точное интерполяционное пространство относительно пары $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$. Кроме того, из (17) следует, что $E^+ \not\subset l_1$ и $E^+ \not\subset l_1(2^{-k})$. Поэтому, применяя [14, с. 68], $\mathscr{J}$-пространства в соотношении (20) можно заменить $\mathscr{K}$-пространствами

$$X' = (L_N, L_\infty)^{\mathscr{K}}_{\widetilde{E}} \quad \text{и} \quad R' = (l_2, l_1)^{\mathscr{K}}_{\widetilde{E}},$$

где $\widetilde{E} = (\vec{l}_\infty)^{\mathscr{J}}_{E^+}$. Ввиду равенства $\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = t\mathscr{K}(1/t, x; X_1, X_0)$ отсюда получаем

$$X' = (L_\infty, L_N)^{\mathscr{K}}_{\widetilde{E}_1} \quad \text{и} \quad R' = (l_1, l_2)^{\mathscr{K}}_{\widetilde{E}_1},$$

где $\|(a_k)\|_{\widetilde{E}_1} = \|(2^k a_{-k})_k\|_{\widetilde{E}}$.

Так как $L_\infty \subset G$ и G — подпространство L_N, для $x \in G$

$$\mathscr{K}(t, x; L_\infty, G) = \mathscr{K}(t, x; L_\infty, L_N). \tag{21}$$

Поэтому пространство $Y = (L_\infty, G)^{\mathscr{K}}_{\widetilde{E}_1}$ изометрически вложено в X'. По теореме 1 из работы [18] (см. также [19]) оператор T инъективен из пространства R' в пространство Y, а значит, и в X'. Отсюда, как отмечалось в начале доказательства, следует, что сам оператор F сюръективен из X в R, т. е. $F(X) = R$. Теорема доказана.

Так как по теореме Спарра [20] интерполяция в паре (l_2, c_0) также описывается $\mathscr{K}$-методом, совершенно аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что R — сепарабельное банахово пространство последовательностей, интерполяционное относительно пары (l_2, c_0), для которого выполнено соотношение* (15). *Тогда для сепарабельного* СП X, *удовлетворяющего соотношению* (14), *имеет место равенство $F(X) = R$.*

Последнее утверждение резко контрастирует со случаем $X \subset G'$, рассмотренным в предложении 1.

Теорема 3. *Пусть* X_0 *и* X_1 *— сепарабельные* СП *на* $[0,1]$, *интерполяционные относительно пары* (G', L_1). *Если соответствующие им пространства коэффициентов Фурье — Радемахера* $F(X_0)$ *и* $F(X_1)$ *совпадают, то* $X_0 = X_1$ *с эквивалентностью норм.*

Доказательство. Как отмечалось перед теоремой 1, интерполяция в паре (G', L_1) описывается $\mathscr{K}$-методом. Поэтому существуют БИП двусторонних последовательностей E_0 и E_1, точные интерполяционные относительно пары $\vec{l}_\infty$, такие, что

$$X_i = (G', L_1)^{\mathscr{K}}_{E_i} \quad (i = 0, 1).$$

Тогда по условию и теореме 1

$$F(X_0) = F(X_1) = (l_2, c_0)^{\mathscr{K}}_{E_0} = (l_2, c_0)^{\mathscr{K}}_{E_1}.$$

Обозначим это пространство через R.

Точно так же, как при доказательстве теоремы 1, можно считать, что для E_i $(i = 0, 1)$ выполнены условия (16) и (17). Следовательно, T (см. (9)) — инъективный ограниченный оператор из R' в X_0' и X_1'. Иначе говоря, для любой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in R'$

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_{X_0'} \asymp \left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_{X_1'} \asymp \|a\|_{R'}.$$

Если Y_i — замыкание L_∞ в X_i' $(i = 0, 1)$, то

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_{Y_0} \asymp \left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_{Y_1}.$$

Так как X_0' и X_1' являются $\mathscr{K}$-интерполяционными пространствами относительно пары (L_N, L_∞) (см. доказательство теоремы 1), ввиду соотношения (21) пространства Y_0 и Y_1 интерполяционны относительно пары (G, L_∞). Следовательно, для них выполнены условия теоремы 3 из работы [18] и, значит, $Y_0 = Y_1$. Из определения двойственного пространства получаем, что $Y_i' = X_i''$ $(i = 0, 1)$ и, таким образом, $X_0'' = X_1''$. Отсюда ввиду сепарабельности X_0 и X_1 заключаем, что $X_0 = X_1$ с эквивалентностью норм. Теорема доказана.

3. Заключительные замечания и примеры

Замечание 1. Пусть $Z_0 = \{x \in L_1 : Fx = 0\}$, $Z_1 = \{x \in G' : Fx = 0\}$. Тогда фактор-пространство G'/Z_1 естественным образом вложено в фактор-пространство L_1/Z_0: $\tilde{x} = x + Z_1 \mapsto x + Z_0$ и это вложение непрерывно относительно фактор-норм. На L_1/Z_0 определим линейный оператор $\widetilde{F}$: $\widetilde{F}\tilde{x} = \widetilde{F}(x + Z_0) = Fx = (c_k(x))_{k=1}^\infty$. Ввиду соотношений (11) и (12) этот оператор будет изоморфизмом пространств L_1/Z_0 и c_0, а также G'/Z_1 и l_2. Следовательно,

$$\mathscr{K}(t, \tilde{x}; G'/Z_1, L_1/Z_0) \asymp \mathscr{K}(t, \widetilde{F}\tilde{x}; l_2, c_0) \tag{22}$$

с константой, не зависящей от $\tilde{x} \in L_1/Z_0$ и $t > 0$.

Предположим, что БИП E двусторонних последовательностей удовлетворяет условиям (16) и (17). Тогда по теореме 1 оператор $\widetilde{F}$ является изоморфизмом пространств $(G', L_1)^{\mathscr{K}}_E / Z_E$ и $(l_2, c_0)^{\mathscr{K}}_E$, где $Z_E = \left\{x \in (G', L_1)^{\mathscr{K}}_E : Fx = 0\right\}$. Поэтому согласно (22)

$$(G'/Z_1, L_1/Z_0)^{\mathscr{K}}_E = (G', L_1)^{\mathscr{K}}_E / Z_E$$

(нормы эквивалентны).

Замечание 2. Ввиду неравенства Хинчина [1, с. 153, 154] для $1 < p \leq \infty$ выполнено равенство $F(L_p) = l_2$. Тем не менее утверждения теорем 1 и 2 перестают быть верными, если в их формулировке G' заменить на L_p при каком-либо p из этого промежутка. Действительно, $(L_p, L_1)_{\theta,q} = L_q$, если $\theta \in (0,1)$ такое, что $q = p/(p\theta - \theta + 1)$ [21, с. 157]. Одновременно для тех же θ и q имеет место равенство $(l_2, c_0)_{\theta,q} = l_{r,q}$, где $r = 2q(p-1)/p(q-1)$ [21, с. 146]. Так как $q < p$, то $r > 2$, и поэтому $F(L_q) = l_2 \neq l_{r,q}$.

Полученные результаты позволяют находить симметричные пространства функций с заданными пространствами коэффициентов Фурье — Радемахера. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $R = l_p$, $2 \leq p < \infty$. Так как $l_p = (l_2, c_0)_{\theta,p}$, где $\theta = (p-2)/p$ [21, с. 146], пространство X_p, для которого $F(X_p) = l_p$, находится по формуле

$$X_p = (G', L_1)_{\theta,p}.$$

Пространства G' и L_1 совпадают с пространствами Лоренца $\Lambda(u\ln^{1/2} e/u)$ и $\Lambda(u)$ соответственно. Поэтому

$$G' = (L_1, L_\infty)^{\mathscr{J}}_{l_1(2^{-k}(1-k)^{-1/2})}, \quad L_1 = (L_1, L_\infty)^{\mathscr{J}}_{l_1(2^{-k})},$$

причем, так как рассматриваются СП функций, определенных на $[0,1]$, в качестве параметров $\mathscr{J}$-метода берем БИП последовательностей $a = (a_j)_{j=0}^{-\infty}$ [22]. Применяя теперь теорему реитерации для $\mathscr{J}$-метода, получаем, что пространство X_p совпадает с пространством Лоренца $\Lambda_p(\varphi_p)$, где $\varphi_p(u) = u\ln^{1/p} e/u$.

Пример 2. Пусть $R = \lambda(1/k)$ — пространство Лоренца всех последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|a\|_{\lambda(1/k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^*}{k}.$$

Это пространство сепарабельно; подбирая подходящее БИП последовательностей E, можно показать, что $(l_2, c_0)^{\mathscr{K}}_E = \lambda(1/k)$. Мы, однако, поступим по-другому, используя пример 2 из работы [18] (подробнее см. в [19]).

Отметим, что

$$\lambda(1/k)^* = \lambda(1/k)' = l_1(\log) \quad \text{и} \quad l_1(\log)' = \lambda(1/k), \tag{23}$$

где пространство Марцинкевича $l_1(\log)$ состоит из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|a\|_{l_1(\log)} = \sup_{k=1,2,\dots} \log_2^{-1}(2k) \sum_{i=1}^{k} a_i^*$$

[23, с. 190]. Так как пространство $l_1(\log)$ интерполяционно относительно пары (l_1, l_2) (см. пример 2 в [18]), с учетом (23) пространство $\lambda(1/k)$ интерполяционно относительно пары (l_2, c_0). Таким образом, по теореме 2 оператор F сюръективен из некоторого сепарабельного СП X в $\lambda(1/k)$. При этом сопряженный к нему оператор T является инъекцией из $\lambda(1/k)' = l_1(\log)$ в X'. Тогда из результатов [18] получаем, что $X' = M(\varphi)$, где $\varphi(u) = u\log_2\log_2(16/u)$. Следовательно, ввиду сепарабельности пространства X оно совпадает с пространством Лоренца $\Lambda(\varphi)$ [3, с. 138]. Итак, $F(\Lambda(\varphi)) = \lambda(1/k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

2. *Овчинников В. И., Распопова В. Д., Родин В. А.* Точные оценки коэффициентов Фурье суммируемых функций и $\mathscr{K}$-функционалы // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 3. С. 292–302.

3. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

4. *Rodin V. A., Semyonov E. M.* Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. 1975. V. 1, N 3. P. 207–222.

5. *Montgomery-Smith S.* The distribution of Rademacher sums // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109, N 2. P. 517–522.

6. *Родин В. А., Семенов Е. М.* О дополняемости подпространства, порожденного системой Радемахера, в симметричном пространстве // Функцион. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 2. С. 91–92.

7. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. V. 2: Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1979.

8. *Рутицкий Я. Б.* О некоторых классах измеримых функций // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 205–208.

9. *Holmstedt T.* Interpolation of quasi-normed spaces // Math. Scand. 1970. V. 26, N 1. P. 177–199.

10. *Szarek S. J.* On the best constants in the Khinchin inequality // Studia Math. 1976. V. 58. P. 197–208.

11. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

12. *Новиков С. Я.* Котип и тип функциональных пространств Лоренца // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 3. С. 213–221.

13. *Kalton N. J.* Calderon couples of rearrangement invariant spaces // Studia Math. 1993. V. 103, N 3. P. 233–277.

14. *Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я.* Функторы вещественной интерполяции. Ярославль, 1981. 211 с. (Деп. в ВИНИТИ, № 2620-81.)

15. *Ovchinnikov V. I.* The method of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser 2. 1984. N 1. P. 349–515.

16. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

17. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

18. *Асташкин С. В.* О рядах по системе Радемахера в симметричных пространствах, «близких» к L_∞ // Функцион. анализ и его прил. 1998. Т. 32, № 3. С. 62–65.

19. *Асташкин С. В.* Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1, № 1. С. 18–35.

20. *Sparr G.* Interpolation of weighted L_p-spaces // Studia Math. 1978. V. 62. P. 229–271.

21. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

22. *Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И.* Основы теории интерполяции линейных операторов // Межвуз. темат. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1977. С. 31–74.

23. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 22 декабря 1998 г.

г. Самара
Самарский гос. университет
astashkn@ssu.samara.ru