Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.9

ОБ ОЦЕНКАХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н. Б. Ускова

Аннотация: Получены оценки отклонений спектральных проекторов возмущенных самосопряженных дискретных операторов от спектральных проекторов невозмущенных операторов при условии принадлежности несамосопряженного возмущения некоторым операторным пространствам. Доказана теорема о разложении собственных и присоединенных векторов возмущенного оператора по системе подпространств, и приведены конкретные примеры, иллюстрирующие полученные оценки. Рассмотрена обратная задача спектрального анализа. Библиогр. 10.

В работе изучаются спектральные проекторы возмущенных самосопряженных дискретных операторов. Исследование проведено на основе метода подобных операторов [1–3], общие положения которого изложены в § 1 в удобной для данного конкретного случая форме. В § 2 получена теорема о подобии исследуемого оператора оператору более простой структуры и на ее основе выведены оценки спектральных проекторов. Показано, что отклонение спектральных проекторов возмущенного оператора от спектральных проекторов невозмущенного оператора наследует некоторые свойства возмущения, а именно скорость убывания внедиагональных элементов матрицы возмущения в некотором базисе. С учетом полученных оценок доказана теорема о разложении собственных и присоединенных векторов возмущенного оператора по системе подпространств, и, как следствие, получены результаты И. А. Блатова [4]. В § 3 приведены примеры конкретных операторов, иллюстрирующие полученные оценки, § 4 посвящен обратной задаче спектрального анализа: что можно сказать о возмущении, если известна асимптотика разложения Фурье собственных векторов возмущенного оператора по базису из собственных векторов невозмущенного оператора?

§ 1. Метод подобных операторов

Пусть H — комплексное гильбертово пространство и $A : D(A) \subset H \to H$ — линейный замкнутый оператор. Через $\operatorname{End} H$ обозначим банахову алгебру линейных операторов, действующих в H ($\|X\|_\infty$ — норма оператора $X \in \operatorname{End} H$). Введем также пространство $\mathscr{L}_A(H)$ — банахово пространство операторов, подчиненных оператору A (т. е. $B \in \mathscr{L}_A(H)$, если $D(A) \subset D(B)$ и $\|Bx\| \leq \operatorname{const}(\|x\| + \|Ax\|)$ $\forall x \in D(A)$, $\|B\|_A = \inf \operatorname{const}$). Рассматриваемые здесь задачи таковы, что без ограничения общности можно считать $D(B) = D(A)$ $\forall B \in \mathscr{L}_A(H)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–01035) и программы «Университеты России».

Определение 1. Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset H \to H$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End} H$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 Ux = UA_2 x$ $\forall x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* A_1 в A_2.

Основная идея метода состоит в следующем. Пусть A — линейный, хорошо изученный оператор, считающийся невозмущенным, и B — другой оператор, оператор-возмущение, в некотором смысле малый по сравнению с A. При выполнении определенных условий оператор $A - B$ может быть подобен оператору $A - B_0$, где B_0 имеет несложную по отношению к A структуру. Так же, как и в [1, 2], будем придерживаться аксиоматического подхода к методу подобных операторов.

Определение 2 (см. [2]). Пусть $\mathscr{U}$ — линейное многообразие операторов из $\mathscr{L}_A(H)$ и $\Im : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$, $\Gamma : \mathscr{U} \to \operatorname{End} H$ — линейные операторы. Тройку $(\mathscr{U}, \Im, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой для оператора* A, а $\mathscr{U}$ — *допустимым пространством возмущений*, если

1) $\mathscr{U}$ — банахово пространство со своей нормой, непрерывно вложенное в $\mathscr{L}_A(H)$, т. е. $\|X\| \geq \mathrm{const}\,\|X\|_A$ $\forall X \in \mathscr{L}_A(H)$;

2) $\Im$ и Γ — непрерывные операторы;

3) $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$ и $A\Gamma X - \Gamma X A = X - \Im X$ $\forall X \in \mathscr{U}$;

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathscr{U}$ $\forall X, Y \in \mathscr{U}$, и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| < \gamma$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \leq \gamma \|X\|\,\|Y\|$ $\forall X \in \mathscr{U}$.

Зафиксируем допустимую для A тройку $(\mathscr{U}, \Im, \Gamma)$ и рассмотрим некоторое возмущение $B \in \mathscr{U}$. Будем искать оператор преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - \Im X$ в виде $U = I + \Gamma X$, где X — подлежащий определению оператор из $\mathscr{U}$. Тогда из равенства

$$(A - B)(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A - \Im X)$$

следует (подробности см. в [1, гл. 2]), что операторы $A - B$ и $A - \Im X$ подобны, если X является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)\Im X + B. \tag{1}$$

Теорема 1 [2]. *При выполнении условия* $4\|B\|\,\|\Gamma\| < 1$ *оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - \Im X$, *где* X *— решение нелинейного уравнения* (1), *и его можно найти методом простых итераций, используя в качестве нулевого приближения нулевой оператор.*

§ 2. Основные теоремы

Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ — самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, имеющий область определения $D(A)$. Предположим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A допускает представление

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma_j, \tag{2}$$

где σ_j, $j \geq 1$, — взаимно не пересекающиеся конечные подмножества из $\sigma(A)$. Кроме того, всюду считается, что последовательность частей спектра монотонно возрастающая, т. е. если $k < l$, то $\lambda_i < \lambda_j$ для всех $\lambda_i \in \sigma_k, \lambda_j \in \sigma_l$ и расстояние $d_{ij} = \operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_j)$ удовлетворяет для некоторого $\nu \in (-\infty, 1)$ условию

$$\lim_{i \neq j, i,j \to \infty} |\sigma_j|^{\nu} d_{ij}^{-1} = 0, \tag{3}$$

где $|\sigma| = \max\limits_{\lambda\in\sigma}\lambda$. Пусть $\delta_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m}\sigma_j$.

Символом P_k обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_k, т. е. $P_k = P(\sigma_k, A)$ и $Q_m = P(\delta_m, A)$. Каждому оператору $X \in \operatorname{End} H$ поставим в соответствие матрицу $X = (X_{ij})$, $i, j \geq 1$, составленную из операторов $X_{ij} = P_i X P_j$.

Введем в рассмотрение функцию $\alpha : Z \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую условиям:

1) $\sum\limits_n \alpha(n) < \infty$,

2) $\sum\limits_k \alpha(i-k)\alpha(k-j) \leq \operatorname{const}\alpha(i-j)$,

3) $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k|^{-1}\ln\alpha(k) = 0$.

Таким условиям удовлетворяет, например, функция $\alpha(n) = (1+|n|)^{-q}$, где $q > 1$.

Введем в рассмотрение подалгебру $\mathscr{U}_*$ операторов из $\operatorname{End} H$ следующим образом. Оператор $X \in \operatorname{End} H$ отнесем к $\mathscr{U}_*$, если существует константа c такая, что имеют место оценки

$$\|P_i X P_j\|_\infty \leq c\alpha(i-j)$$

с нормой

$$\|X\|_* = \{\inf c : \|X_{ij}\|_\infty \leq c\alpha(i-j) \quad \forall i, j \geq 1\}.$$

Далее с учетом условий 1, 2 будет показано, что $\mathscr{U}_*$ является банаховой алгеброй, причем согласно условию 3 и теореме 1 из [5] она является наполненной, т. е. каждый обратимый в $\operatorname{End} H$ оператор $X \in \mathscr{U}_*$ обратим и в $\mathscr{U}_*$.

Пусть возмущение $B : D(A) \subset H \to H$ подчинено дробной степени оператора A и имеет вид $B = B_0 A^\nu, B_0 \in \mathscr{U}_*$, т. е.

$$\|P_i B_0 P_j\|_\infty \leq c_1\alpha(i-j). \tag{4}$$

Теорема 2. *Существует такое натуральное число $m \geq 1$, что оператор $A - B$ подобен оператору блочно-диагонального вида*

$$A - \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X_0 P_i A^\nu - Q_m X_0 Q_m A^\nu,$$

где $X = X_0 A^\nu$ — решение нелинейного уравнения (1), *причем*

$$\|P_i X_0 P_j\|_\infty \leq c_2\alpha(i-j), \quad c_2 > 0.$$

Доказательство. Следуя принятой в методе подобных операторов схеме [2], построим допустимую для A тройку. Введем пространство допустимых возмущений $\mathscr{U}$ следующим образом. Считаем, что оператор Y принадлежит допустимому пространству возмущений $\mathscr{U}$, если он представим в виде $Y = Y_0 A^\nu$, где $Y_0 \in \mathscr{U}_*$ и $\|Y\| = \|Y\|_{\mathscr{U}} = \|Y_0\|_*$. Из оценок

$$\|P_i X_0 A^\nu P_j A^{-1}\|_\infty \leq c|\sigma_{j-1}|^{\nu-1}\alpha(i-j)\|X_0\|_*, \quad j > 1,$$

$$\|XA^{-1}\|_\infty \leq \|X_0\|_* \sup_{j>1}|\sigma_{j-1}|^{\nu-1}\sum_n \alpha(n)$$

и предположений 1 и 2 на функцию α следует, что

$$\|X\|_A \leq \|XA^{-1}\|_\infty = \|X_0 A^{\nu-1}\|_\infty \leq \operatorname{const}\|X_0\|_* = \operatorname{const}\|X\|.$$

Отметим, что

$$\|X_0\|_\infty \le \|X_0\|_* \sum_n \alpha(n).$$

Легко показать, что $\mathscr{U}$ — полное пространство.

Перейдем теперь к построению трансформаторов $\Im$ и Γ. Положим

$$\Im X = Q_m X Q_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X_0 P_i A^\nu,$$

где число m определим позднее.

Определим трансформатор $\Gamma : \mathscr{U}_* \to \operatorname{End} H$ на блоках $P_i X_0 P_j = X_{0ij}$, $i, j \ge 1$. В качестве ΓX_{0ij} возьмем оператор $Y_{ij} = P_i Y P_j \in \operatorname{End} H$, являющийся решением уравнения

$$AY_{ij} - Y_{ij}A = X_{0ij} - \Im X_{0ij}, \quad i \ne j, \tag{5}$$

и удовлетворяющий условию $Y_{ii} = 0$. Уравнения (5) разрешимы, и каждое имеет единственное решение (см. [6, 7]). Положим $\Gamma X_{ij} = \Gamma X_{0ij} A^\nu$. Так как

$$\|\Gamma X_{0ij} A^\nu\|_\infty \le \|P_j A^\nu\|_\infty \|\Gamma X_{0ij}\|_\infty \le \operatorname{const} |\sigma_j|^\nu d_{ij}^{-1} \|X_{0ij}\|_\infty, \quad i \ne j,$$

а (см. [2, теорема 1.6])

$$X = \lim_{n\to\infty} \sum_{|p|\le n} \left(1 - \frac{|p|}{n}\right) X_p, \quad X_p = \sum_{i-j=p} X_{ij},$$

для оператора ΓX_p имеем

$$\|\Gamma X_p\|_\infty \le \operatorname{const} \sup_{i-j=p} |\sigma_j|^\nu d_{ij}^{-1} \|X_{0ij}\|_\infty. \tag{6}$$

Из приведенных оценок следует, что ряд $\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} \Gamma X_p$ сходится в $\operatorname{End} H$ по операторной норме в силу выполнения неравенства (6). Таким образом, оператор $\Gamma : \mathscr{U} \to \operatorname{End} H$ построен. Проверим выполнение свойств допустимой тройки, относящейся к нему. Сначала покажем, что если $B_0 \in \mathscr{U}_*$, $C_0 \in \mathscr{U}_*$, то и $B_0 C_0 \in \mathscr{U}_*$. Это вытекает из оценок

$$\begin{aligned}\|P_i B_0 C_0 P_j\|_\infty &\le \Big\| P_i B_0 \sum_k P_k C_0 P_j \Big\|_\infty \le \sum_k \|P_i B_0 P_k\|_\infty \|P_k B_0 P_j\|_\infty \\ &\le \|B_0\|_* \|C_0\|_* \sum_k \alpha(i-k)\alpha(k-j) \le \operatorname{const} \|B_0\|_* \|C_0\|_* \alpha(i-j).\end{aligned}$$

Представим оператор $Y(\Gamma X)$, $Y, X \in \mathscr{U}$, в виде

$$Y(\Gamma X) = Y_0 A^\nu \Gamma X_0 A^\nu = Z_0 A^\nu, \tag{7}$$

где $Z_0 = Y_0 A^\nu \Gamma X_0$. Из оценок

$$\begin{aligned}\|P_i Z_0 P_j\|_\infty &\le \sum_k \|P_i Y_0 P_k\|_\infty \|A^\nu P_k\|_\infty \|\Gamma X_{0kj}\|_\infty \\ &\le \operatorname{const} \sup_{k\ne j} |\sigma_k|^\nu d_{kj}^{-1} \|X_0\|_* \|Y_0\|_* \sum_k \alpha(i-k)\alpha(k-j) \\ &\le \operatorname{const} \alpha(i-j) \|X_0\|_* \|Y_0\|_* \sup_{k\ne j} \big|\sigma_k^\nu\big| d_{kj}^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

следует, что $Z_0 \in \mathscr{U}_*$.

Для оператора $(\Gamma X)Y$ доказательство аналогично.

Проверим свойство $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)\ \forall X \in \mathscr{U}$. Обозначим символом Z_n оператор $Q_n \Gamma X A^{-1}$, где $Q_n = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i$. Отметим, что $AZ_n = AQ_n\Gamma X A^{-1} \in \operatorname{End} H$. Тогда для любого вектора $x \in H$ имеем

$$AZ_n x = AQ_n \Gamma X A^{-1} x = Q_n \Gamma X x + Q_n(X - \Im X)A^{-1}x.$$

Поскольку $Q_n\Gamma X x \to \Gamma X x$ и $Q_n(X - \Im X)A^{-1}x \to (X - \Im X)A^{-1}x$, $n \to \infty$, то и последовательность $AZ_n x$ сходится к некоторому элементу $y \in H$. Пусть $y_n = AZ_n x$. Так как $(Z_n x)$ — сходящаяся к вектору $x_0 = \Gamma X A^{-1}x$ последовательность и оператор A замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$, где $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Таким образом, $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)\ \forall X \in \mathscr{U}$.

Итак, выполняются все свойства допустимой тройки. Норму трансформатора Γ можно сделать сколь угодно малой за счет подходящего выбора числа m. Следовательно, по теореме 1 оператор $A - B$ подобен оператору $A - \Im X$, где X — решение нелинейного уравнения (1), и так как $X = X_0 A^{\nu} \in \mathscr{U}$, то имеет место оценка

$$\|P_i X_0 P_j\|_\infty \le c_2 \alpha(i - j), \quad c_2 > 0.$$

Замечание. Из теоремы 2 и [1, § 27] следует разделенность спектральных подмножеств $\tilde{\delta}_m, \tilde{\sigma}_{m+1}, \tilde{\sigma}_{m+2}, \dots$ возмущенного оператора $A - B$.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2 для спектральных операторов $\widetilde{P}_k = P(\tilde{\sigma}_k, A - B)$, $k > m$, и $\widetilde{Q}_m = P(\tilde{\delta}_m, A - B)$ возмущенного оператора $A - B$ имеют место представления*

$$\widetilde{P}_k = P_k U^{-1} + \Gamma X P_k U^{-1}, \tag{9}$$

$$\widetilde{Q}_m = Q_m U^{-1} + \Gamma X Q_m U^{-1}, \tag{10}$$

причем

$$\|P_i(P_k - \widetilde{P}_k)P_j\|_\infty \le c_3 \alpha(i - k)\gamma(i, k) \quad (\text{кроме случая } i = k), \tag{11}$$

$$\|P_i(Q_m - \widetilde{Q}_m)P_j\|_\infty \le c_4 \alpha(i - j) \sup_{i \le l \le m} \gamma(i, l) \quad (\text{кроме случая } i \le m), \tag{12}$$

где $U = I + \Gamma X$ и $\gamma(i, j) = |\sigma_j|^{\nu} d_{ij}^{-1}$.

Доказательство. Из подобия операторов $A - B$ и $A - \Im X$ вытекают равенства

$$\widetilde{P}_k = UP_kU^{-1} = P_kU^{-1} + \Gamma X P_k U^{-1}, \quad \widetilde{Q}_m = UQ_mU^{-1} = Q_mU^{-1} + \Gamma X Q_m U^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|P_i(P_k - \widetilde{P}_k)P_j\|_\infty = \|P_iP_k(U^{-1} - I)P_j\|_\infty + \|P_i\Gamma X P_k U^{-1}P_j\|_\infty,$$

$$\|P_i(Q_m - \widetilde{Q}_m)P_j\|_\infty \le \|P_iQ_m(U^{-1} - I)P_j\|_\infty + \|P_i\Gamma X Q_m U^{-1}P_j\|_\infty.$$

Заметим, что оператор $U = I + \Gamma X$ ограничен и имеет ограниченный обратный.

Пусть $i \ne k$, тогда

$$\|P_i(P_k - \widetilde{P}_k)P_j\|_\infty \le \|P_i\Gamma X P_k U^{-1}P_j\|_\infty \le c_3\alpha(i - k)\gamma(i, k).$$

В силу определения оператора Γ и доказательства теоремы 2 из $\Gamma X \in \mathscr{U}_*$, $\Gamma Y \in \mathscr{U}_*$ следует, что $(\Gamma X)\Gamma Y \in \mathscr{U}_*$. При этом важно отметить, что $\mathscr{U}_*$ — банахова алгебра. Норму оператора ΓX можно сделать меньше единицы за счет подходящего выбора числа m, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\Gamma X)^n$ сходится в пространстве $\mathscr{U}_*$. Следовательно, при $i > m$

$$\|P_i(Q_m - \widetilde{Q}_m)P_j\|_\infty = \|P_i\Gamma X Q_m U^{-1}P_j\|_\infty \le \sum_{l=1}^{m}\|P_i\Gamma X P_l\|_\infty\|P_l U^{-1}P_j\|_\infty$$
$$\le c_4\alpha(i-j)\sup_{i\le l\le m}\gamma(i,l).$$

Теорема доказана.

Замечание. При $i = k$ справедлива оценка

$$\|P_i(P_k - \widetilde{P}_k)P_j\|_\infty = \left\|P_k\sum_{n=1}^{\infty}(\Gamma X)^n P_j\right\|_\infty \le \mathrm{const}\,\alpha(k-j).$$

Следствие. *При выполнении условий теоремы 2 для спектральных проекторов $\widetilde{P}_k = P(\tilde{\sigma}_k, A-B)$, $k > m$, возмущенного оператора $A-B$ имеют место оценки*

$$\|P_i(P_k - \widetilde{P}_k)P_j\|_\infty \le c_5\alpha(i-j)\gamma(i,k) \quad \textit{при } i \ne k.$$

Доказательство. Поскольку U^{-1} принадлежит алгебре $\mathscr{U}_*$, при $i \ne k$ имеем

$$\|P_i(P_k - \widetilde{P}_k)P_j\|_\infty \le \|P_i\Gamma X P_k U^{-1}P_j\|_\infty$$
$$\le c\gamma(i,k)\sum_k \alpha(i-k)\alpha(k-j) \le c_4\gamma(i,k)\alpha(i-j).$$

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы 2 для собственных и присоединенных векторов $\tilde{e}_k$, $k \in Z$, возмущенного оператора $A-B$ имеют место представления*

$$\tilde{e}_k = W_k + \sum_{n\ge m+1} V_{n,k} \quad \textit{при } \lambda_k \in \bigcup_{i=1}^{m}\sigma_i,$$
$$\tilde{e}_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} V_{n,k} \quad \textit{при } \lambda_k \notin \bigcup_{i=1}^{m}\sigma_i,$$

где $V_{n,k} \in \operatorname{Im} P_k$, $W_k \in \operatorname{Im} Q_m$ и

$$\|V_{n,k}\| \le \mathrm{const}\, n_k\gamma(n,k)\alpha(n-k), \quad n \ne k,\ n_k = \dim\operatorname{Im} P_k,\ P_k e_k = e_k.$$

Доказательство. Вначале установим равенство $\operatorname{Im}\widetilde{P}_k = \operatorname{Im}\widetilde{P}_k P_k$ $\forall k > m$. Поскольку $\widetilde{P}_k P_k = \widetilde{P}_k(I+\Gamma X)^{-1}\widetilde{P}_k(I+\Gamma X) = \widetilde{P}_k + V_k$, где норма оператора V_k может быть сделана сколь угодно малой для достаточно больших m, то (см. [8]) операторы $\widetilde{P}_k P_k$ и $\widetilde{P}_k$ подобны и поэтому $\dim\operatorname{Im}\widetilde{P}_k P_k = \dim\operatorname{Im}\widetilde{P}_k$. Отсюда в силу конечномерности образа проектора $\widetilde{P}_k$ и очевидного включения $\operatorname{Im}\widetilde{P}_k P_k \subset \operatorname{Im}\widetilde{P}_k$ вытекает доказываемое равенство.

Следовательно, любой собственный или присоединенный вектор $\tilde{e}_j$ оператора $A-B$, отвечающий собственному значению $\tilde{\lambda}_j$, лежащему в $\tilde{\sigma}_k > m$, допускает представление вида

$$\tilde{e}_j = \widetilde{P}_k\tilde{e}_k = \widetilde{P}_k P_k y_j, \quad y_j \in H.$$

В свою очередь, вектор $P_k y_j$ представим в виде линейной комбинации $P_k y_j = \sum \beta_{j,l} e_l$, где суммирование ведется по всем l таким, что $\lambda_l \in \sigma_k$. Значит,

$$\tilde{e}_j = \sum \beta_{j,l} \widetilde{P}_k e_l = \sum_{n \geq 1} P_n \sum_l \beta_{j,l} \widetilde{P}_k e_l = \sum_{n \geq 1} V_{n,j},$$

где $V_{n,j} \in \operatorname{Im} P_n$.

Покажем, что $|\beta_{j,l}| < \mathrm{const}\ \forall j, l$. Заметим, что в силу теоремы 3 операторы $\widetilde{P}_k$ и P_k отличаются на оператор $D_k(m)$, норма которого достаточно мала при больших m. Следовательно, используя формулу (9), имеем

$$\widetilde{P}_k e_l = P_k e_l + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i P_k (\Gamma X)^i e_l + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Gamma X P_k (\Gamma X)^i e_l = e_l + D_k(m) e_l.$$

Тогда

$$\tilde{e}_j = \sum_l \beta_{j,l} (e_l + D_k(m) e_l).$$

Умножая обе части последнего равенства скалярно на вектор e_l, получим систему уравнений относительно $\beta_{j,l}$:

$$\beta_{j,l} + \sum_l \beta_{j,l} (D_k(m) e_l, e_l) = (\tilde{e}_j, e_l).$$

Так как в матрице системы диагональные элементы преобладают по модулю, такая система разрешима относительно $\beta_{j,l}$ и решение ограничено. Таким образом, константы $\beta_{j,l}$ равномерно ограничены.

Заметим, что из (9) следует очевидная оценка

$$\|P_n \widetilde{P}_k\| \leq \|P_n \Gamma X P_k U^{-1}\| \leq \mathrm{const}\, \gamma(n,k) \alpha(n-k).$$

Оценим теперь векторы $V_{n,j}$ по норме:

$$\|V_{n,j}\| = \left\| P_n \sum_l \beta_{j,l} \widetilde{P}_k e_l \right\| \leq \mathrm{const}\, \gamma(n,k) \alpha(n-k) n_k.$$

Следствие. *Пусть оператор A таков, что $\dim \operatorname{Im} P_k = 2\ \forall k$ и*

$$P_k x = (x, e_k) e_k + (x, e_{-k}) e_{-k}.$$

Тогда собственные или присоединенные векторы $\tilde{e}_k$, $k \in \mathbb{N}$, оператора $A - B$ имеют ряды Фурье вида

$$\tilde{e}_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_{k,n} e_n, \tag{13}$$

причем

$$|\eta_{n,k}| \leq \mathrm{const}\, \gamma(n,k) \alpha(|n| - k), \quad |n| \neq k. \tag{14}$$

Замечание. Все изложенные выше результаты имеют место без условия положительной определенности оператора A.

§ 3. Примеры

Приведем несколько примеров конкретных операторов, для которых выпишем оценки спектральных проекторов или собственных векторов.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ интегродифференциальный оператор вида

$$(Lu)(x) = -a^2\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \alpha u(x) + a^2\int\limits_0^x e^{-a(x-s)}u(s)\,ds, \quad a \neq 0,$$

с областью определения, задаваемой краевыми условиями $u(0) = u(1) = 0$. Такой оператор возникает в задачах химической кинетики [9]. Невозмущенным считаем оператор $A : D(L) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ вида

$$A = -a^2\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \alpha u(x),$$

а возмущенным — оператор

$$(Bu)(x) = -a^2\int\limits_0^x e^{-a(x-s)}u(s)ds, \quad a \neq 0.$$

Здесь $B \in \operatorname{End} H$ (т. е. $\nu = 0$), $P_k = P(\{\lambda_k\}, A)$, $\lambda_k = (a\pi k)^2 + \alpha$, $k \geq 1$, — простые собственные значения оператора A, условие (3) очевидно и непосредственным подсчетом приходим к оценкам матричных элементов оператора B относительно ортонормированного базиса из собственных векторов оператора A:

$$|b_{ij}| \leq c(1 + |i-j|)^{-2}, \quad c > 0.$$

Применив теорему 3, получим для спектральных проекторов $\widetilde{P}_k$ оператора $A - B$ оценки (11), (12) с $\alpha(n) = (1+n)^{-2}$, $\gamma(i,j) = (a^2\pi^2(i^2 - j^2))^{-1}$.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + p_2\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + p_{n-1}\frac{d}{dt} + p_n$$

с периодическими коэффициентами p_i, $i = 2,\dots,n$, и областью определения $D(L) \subset H = L_2[0,2\pi]$, задаваемой периодическими краевыми условиями

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(2\pi), \quad j = 0,\dots,n-1.$$

Пусть коэффициенты p_i имеют ряды Фурье $p_i(t) = \sum\limits_l c_{il}\exp(ilt)$ и $|c_{il}| \leq \mathrm{const}(1 + |l|)^{-q}$, $q > 1$.

Такой оператор рассматривался в [4], где были получены оценки коэффициентов Фурье собственных векторов оператора L с использованием алгебр операторов с псевдоразреженными матрицами. Мы получим аналогичные оценки, используя следствие из теоремы 4.

Невозмущенным оператором считаем оператор $A : D(L) \subset H \to H$ вида $A = \frac{d^n}{dt^n}$, а возмущение составляет оператор $B = A - L$. Рассматриваемый нами оператор A сводится к самосопряженному умножением на i при нечетных n.

Собственные значения оператора A имеют вид $\lambda_s(A) = (is)^n$, $s = 1,2,\dots$, собственные функции являются тригонометрическими полиномами $e_s(t) = (2\pi)^{-0,5}\exp(ist)$.

Пусть $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $P_k = P(\{\lambda_k\}, A)$ и в данном случае $\alpha(n) = (1 + |n|)^{-q}$. Следовательно, ряды Фурье для собственной или присоединенной функций оператора A имеют вид (13) и справедлива оценка (14).

§ 4. К одной обратной задаче спектрального анализа

Пусть теперь известны некоторые оценки коэффициентов Фурье собственных векторов возмущенного оператора $A - B$, а сам оператор B неизвестен. Приводимая ниже теорема 5 позволяет определить в этом случае некоторые характеристики оператора B.

Теорема 5. *Пусть оператор A возмущается некоторым оператором $B \in \mathscr{L}_A(H)$, причем $B = B_0 A^\nu$, $B_0 \in \operatorname{End} H$, где $\nu \in (-\infty, 1)$ такое, что верно* (3) *и выполнены условия*

1) $\dim \operatorname{Im} P_k = 1\ \forall k$,
2) $\sup\limits_{i \neq j} (d_{ij}^{-1} |\sigma_j|^\nu) < \infty$,
3) $\|B_0\|_{\mathscr{U}_\nu} < \frac{2}{\pi} \inf\limits_{i \neq j} d_{ij}$,

а собственные векторы e_k, $k \in \mathbb{Z}$, невозмущенного оператора A и собственные векторы $\tilde{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, возмущенного оператора $A - B$, где $B = B_0 A^\nu$, $B_0 \in \operatorname{End} H$, связаны равенством

$$\tilde{e}_k = e_k + \sum_{i \neq k} \beta_{ik} e_i,$$

причем

$$|\beta_{ik}| \leq \operatorname{const} \gamma(i,k) \alpha(i-k). \tag{15}$$

Тогда имеют место оценки

$$\|P_i B_0 P_j\|_\infty \leq \operatorname{const} \alpha(i-j), \quad \operatorname{const} > 0.$$

Доказательство. Пусть пространство $\mathscr{U}_\nu$ допустимых возмущений теперь состоит из операторов, представимых в виде $X = X_0 A^\nu$, $X_0 \in \operatorname{End} H$, оператор $\Im : \mathscr{U}_\nu \to \mathscr{U}_\nu$ определяется формулой

$$\Im X = Q_m X Q_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X P_i,$$

где $Q_m = \sum\limits_{i=1}^{m} P_i X P_i$. Оператор $\Gamma : \mathscr{U}_\nu \to \operatorname{End} H$ задается в виде

$$\Gamma X = \Gamma X A^\nu = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i-j=p}^{\infty} \Gamma X_{0ij} A^\nu,$$

где ΓX_{0ij} — решение уравнения $A \Gamma X_{0ij} - \Gamma X_{0ij} A = X_{0ij} - \Im X_{oij}$. В [10, гл. II] показано, что такая тройка $(\mathscr{U}_\nu, \Im, \Gamma)$ является допустимой для оператора A тройкой и выполнение условия 3 обеспечивает подобие оператора $A - B$ оператору $A - \Im X$, где $X = X_0 A^\nu$.

Отметим, что матрица оператора ΓX_0 имеет вид

$$P_i \Gamma X_0 P_j = \begin{cases} \frac{X_{0ij}}{\lambda_i - \lambda_j} & \text{при } j \neq i, \\ 0 & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{16}$$

В данном случае векторы e_k, $k \in \mathbb{Z}$, и $\tilde{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, связаны равенством

$$\tilde{e}_k = e_k + \Gamma X e_k = e_k + \sum_{i \neq k} P_i \Gamma X P_k e_k = e_k + \sum_{i \neq k} \frac{X_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k} e_k. \tag{17}$$

Так как собственные векторы оператора A (или оператора $A-\Im X$) образуют базис и разложение любого вектора по базису единственно, из (15) и (17) следует, что

$$\|P_l \Gamma X P_k\|_\infty \le \mathrm{const}\,\gamma(l,k)\alpha(l-k).$$

Из формулы (16) получаем, что $X_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)(\Gamma X)_{ij}$, кроме случая $i = j$. Пусть $P_i X_0 P_j = P_i X P_j A^{-\nu}$. Тогда

$$\begin{aligned}\|P_i X_0 P_j\|_\infty = \|P_i X P_j A^{-\nu}\|_\infty = |\lambda_i - \lambda_j||\lambda_j|^{-\nu}\|P_i \Gamma X P_j\|_\infty \\ \le c|\lambda_i - \lambda_j||\lambda_j|^{-\nu}\gamma(i,j)\alpha(i-j) = \mathrm{const}\,\alpha(i-j).\end{aligned}$$

Таким образом, оператор X_0 принадлежит пространству $\mathscr{U}_*$, и $X = X_0 A^\nu \in \mathscr{U}$.

Вернемся к нелинейному уравнению (1) и перепишем его в виде

$$B = (X + \Gamma X \Im X)(I + \Gamma X)^{-1}.$$

Операторы, стоящие в левой части равенства, принадлежат $\mathscr{U}$, а значит, и $B \in \mathscr{U}$. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть невозмущенным оператором является оператор A из примера 1, возмущение B представимо в виде $B = B_0 A^\nu$, $B_0 \in \operatorname{End} H$, $\nu < 1$, и выполнены условия теоремы 5. Тогда оператор B_0 имеет скорость убывания элементов, расположенных на диагоналях, параллельных главной диагонали, порядка $\alpha(n)$, $n = i - j$, где i и j — номера соответственно строки и столбца элемента.

В случае оператора A из примера 2 теорема 4 не применима, так как не выполняется условие $\dim \operatorname{Im} P_k = 1\ \forall k$.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, существенно улучшившие качество статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1987.
2. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 4. С. 3–32.
3. *Ускова Н. Б.* О спектре некоторых классов дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 2. С. 350–352.
4. *Блатов И. А.* Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 36–59.
5. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
7. *Баскаков А. Г., Юргелас В. В.* Индефинитная диссипативность и обратимость линейных дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 12. С. 1613–1614.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука, 1967.
9. *Перов А. И., Глушко Е. Г., Тюленева М. Г.* Собственные значения и собственные функции одного интегро-дифференциального оператора // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 3. С. 516–519.
10. *Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в проблеме собственных значений и собственных векторов линейных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1994.

Статья поступила 21 января 1997 г.,
окончательный вариант — 1 марта 1999 г.

г. Воронеж