Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.55

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СИЛЬНО ВЫСТУПАЮЩИХ ТОЧЕК В $L_2(T, X)$

С. И. Суслов

Аннотация: Показано, что интегрируемый селектор f измеримой интегрально ограниченной многозначной функции F, определенной на отрезке $[0, 1]$ и принимающей значения в множестве замкнутых выпуклых ограниченных подмножеств сепарабельного банахова пространства, является сильно выступающей точкой множества всех ее интегрируемых селекторов тогда и только тогда, когда $f(t)$ — сильно выступающая точка множества $F(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Библиогр. 6.

Пусть F — измеримая многозначная функция (определение см. ниже), определенная на отрезке $[0, 1]$ и принимающая значения в множестве замкнутых выпуклых ограниченных подмножеств сепарабельного банахова пространства X. Хорошо известно (см., например, [1, теорема IV.15]), что ее измеримый селектор $f : [0, 1] \to X$, $f(t) \in F(t)$, является крайней точкой множества всех ее измеримых селекторов тогда и только тогда, когда $f(t)$ — крайняя точка множества $F(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$. В этой заметке мы получаем аналогичный результат для сильно выступающих точек: интегрируемый селектор f многозначной функции F является сильно выступающей точкой множества всех ее интегрируемых селекторов тогда и только тогда, когда $f(t)$ — сильно выступающая точка множества $F(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$.

В п. 1 собраны основные определения и обозначения, в п. 2 приведены точная формулировка и доказательство вышеописанной характеризации сильно выступающих точек множества интегрируемых селекторов измеримой многозначной функции.

1. Обозначения и определения

Всюду далее $(T, \mathscr{A}, \mu)$ — отрезок $[0, 1]$ с лебеговой σ-алгеброй $\mathscr{A}$ и мерой Лебега μ, X — сепарабельное банахово пространство, B^* — единичный шар его сопряженного пространства, $L_1(T, X)$ — пространство интегрируемых по Бохнеру функций из T в X. Знак $:=$ обозначает равенство по определению.

Если Y — банахово пространство, то, как обычно, $|\cdot|_Y$ — норма пространства Y; Y^* — топологически сопряженное к Y пространство; $\langle y^*, y\rangle := y^*(y)$, $y^* \in Y^*$, $y \in Y$; $s(y^*, A) := \sup\{\langle y^*, y\rangle : y \in A\}$, $y^* \in Y^*$, $A \subset Y$; $\operatorname{cl} A$ — замыкание множества $A \subset Y$. Борелевская σ-алгебра топологического пространства Z обозначается через $\mathscr{B}(Z)$. Многозначная функция $F : T \to 2^X$, где 2^X — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств из X, называется *измеримой*, если $\{t \in T : F(t) \cap A \neq \varnothing\} \in \mathscr{A}$ для любого открытого $A \subseteq X$, и *интегрально ограниченной*, если существует интегрируемая функция $h : T \to \mathbb{R}$ такая, что $\sup\{|x| : x \in F(t)\} \leq h(t)$ п. в. на T. *Графиком* функции F называется множество $\operatorname{gr} F := \{(t, x) \in T \times X : x \in F(t)\}$, а ее *измеримым селектором* — измеримая функция $f : T \to X$ такая, что $f(t) \in F(t)$ п. в. на T. Множество всех измеримых селекторов функции F обозначается через $S(F)$. Если F интегрально ограничена, то понятно, что $S(F) \subset L_1(T, X)$.

Напомним, что точка $x \in A$ называется *сильно выступающей точкой замкнутого выпуклого ограниченного множества* $A \subset X$, если существует такой $x^* \in X^*$, что $\langle x^*, y\rangle < \langle x^*, x\rangle$ для любого $y \in A$, $y \neq x$, и из $\{x_n\} \subset A$, $\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$ следует, что $|x_n - x| \to 0$ [2, с. 199]. Функционал $x^* \in X^*$ в таком случае называется *сильно выделяющим точку* $x \in A$.

2. Характеризация сильно выступающих точек

Теорема. *Пусть $F : T \to 2^X$ — измеримая интегрально ограниченная многозначная функция, принимающая выпуклые замкнутые ограниченные значения. Тогда f является сильно выступающей точкой множества $S(F)$, если и только если $f(t)$ является сильно выступающей точкой множества $F(t)$ для п. в. $t \in T$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in L_1(T,X)$ — сильно выступающая точка множества $S(F)$, а $f^* \in (L_1(T,X))^*$ — функционал, сильно выделяющий f в $S(F)$. Поскольку пространство $(L_1(T,X))^*$ состоит из скалярно измеримых существенно ограниченных функций на T со значениями в X^* [3, с. 304], мы можем считать, что (класс эквивалентности) f^* состоит из измеримых функций на T со значениями в B^*_σ и на B^*_σ рассматривается σ-алгебра $\mathscr{B}\big(B^*_\sigma\big)$, где B^*_σ — множество B^* со слабой $\sigma(x^*, x)$-топологией. Как обычно, мы используем одно обозначение для класса эквивалентности и для его представителя. Так что в дальнейшем в зависимости от контекста f и f^* могут обозначать и измеримые функции.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Множество T' точек $t \in T$ таких, что функционал $f^*(t)$ не достигает своего супремума на множестве $F(t)$ в точке $f(t)$, имеет нулевую меру. На T определим многозначную функцию

$$G : t \to \{x \in F(t) : g(t,x) := \langle f^*(t), x\rangle - 2^{-1}(s(f^*(t), F(t)) + \langle f^*(t), f(t)\rangle) \geq 0\}.$$

Поскольку неравенство $g(t,x) \geq 0$ эквивалентно тому, что

$$\langle f^*(t), x\rangle \geq 2^{-1}(s(f^*(t), F(t)) + \langle f^*(t), f(t)\rangle),$$

при каждом $t \in T$ множество $G(t)$ его решений непусто. Из представления Новикова — Кастэна [4, теорема 5.6] сразу следует, что функция $t \to s(f^*(t), F(t))$ измерима. Легко видеть, что тогда функция g измерима по t и непрерывна по x и поэтому измерима по (t,x). Следовательно, график $\operatorname{gr} G$ является непустым $\mathscr{A} \times \mathscr{B}(X)$-измеримым множеством, и по [4, теоремы 3.5 и 5.1] у G есть измеримый селектор f'. Заметим, что $t \in T'$ тогда и только тогда, когда $s(f^*(t), F(t)) > \langle f^*(t), f(t)\rangle$. Поэтому множество T' измеримо, поскольку $\langle f^*(t), f'(t)\rangle > \langle f^*(t), f(t)\rangle$, $t \in T'$. Тогда если $\mu T'$, то

$$\langle f^*, f\rangle = \int_T \langle f^*(t), f(t)\rangle < \int_T \langle f^*(t), f'(t)\rangle = \langle f^*, f'\rangle,$$

что противоречит тому, что f^* сильно выделяет f в $S(F)$.

Шаг 2. Множество T'' точек $t \in T$ таких, что $f^*(t)$ не является функционалом, сильно выделяющим $f(t)$ в $F(t)$, имеет нулевую меру. На T для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим многозначную функцию

$$F_n : t \to \{\bar{x} \in F(t) : s(f^*(t), F(t)) - \langle f^*(t), x\rangle \leq n^{-1}\}.$$

Графики функций F_n, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A} \times \mathscr{B}(X)$-измеримы по тем же соображениям, что и график функции G. Следовательно [4, теорема 3.5], функции F_n, $n \in \mathbb{N}$, измеримы, и по [4, теорема 5.6] существуют счетные семейства $\{f_n^m\}$, $n \in \mathbb{N}$, измеримых функций такие, что $F_n(t) = \mathrm{cl}\{f_n^m(t)\}$. Определим функции $d_n : T \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$d_n(t) := \sup\{|f_n^m(t) - f_n^k(t)| : m, k \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, что функции d_n, $n \in \mathbb{N}$, измеримы и значение d_n в точке t равно диаметру множества $F_n(t)$. Так как в силу шага 1

$$s(f^*(t), F(t)) = \langle f^*(t), f(t)\rangle \quad \text{п. в. на} \quad T,$$

из определения сильно выступающей точки следует, что п. в. на T'' последовательности $d_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, не сходятся к нулю. Поскольку эти последовательности монотонно убывают, отсюда получаем, что

$$d(t) := \inf_{n\in\mathbb{N}} d_n(t) > 0 \quad \text{п. в. на} \quad T.$$

С учетом того, что $t \in T''$ тогда и только тогда, когда $d(t) > 0$ и $d(t)$ — измеримая функция, множество T'' измеримо. На множестве T для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим многозначную функцию

$$G_n : t \to \{x \in F_n(t) : |f(t) - x| \geq 3^{-1} \cdot d(t)\}.$$

В силу шага 1 $f(t) \in F_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, п. в. на T, поэтому имеем $G_n(t) \neq \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$, п. в. на T. У функций G_n, $n \in \mathbb{N}$, существуют измеримые селекторы $f_n \in S(F_n)$ по тем же соображениям, что и у функции G. Тогда если $\mu T'' > 0$, то для последовательности $\{f_n\} \subset S(F)$ справедливы соотношения

$$\langle f^*, f_n\rangle = \int\limits_T \langle f^*(t), f_n(t)\rangle \to \int\limits_T \langle f^*(t), f(t)\rangle = \langle f^*, f\rangle,$$

$$|f_n - f|_{L_1} := \int\limits_T |f_n(t) - f(t)| \geq \int\limits_T 3^{-1} \cdot d(t) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

что противоречит тому, что f^* сильно выделяет f в $S(F)$.

Достаточность. Пусть $f \in S(F)$ такова, что $f(t)$ — сильно выступающая точка множества $F(t)$ п. в. на T. Мы построим функционал $f^* \in (L_1(T, X))^*$, сильно выделяющий f в $S(F)$. Так как, изменяя измеримую по Лебегу функцию на множестве меры нуль, всегда можно получить функцию, измеримую по Борелю, в этой части доказательства в дополнение к предыдущим соглашениям будем считать f измеримой по Борелю. По тем же соображениям из кастэновского представления измеримой функции [4, теорема 5.6] легко следует существование измеримой по Борелю функции, обозначаемой в дальнейшем через $\widehat{F}$, которая п. в. на T совпадает с F.

Шаг 3. Множество $U := \{(t, x^*) \in T \times B^* : x^* \text{ сильно выделяет } f(t) \text{ в } \widehat{F}(t)\}$ аналитическое. Рассмотрим множества $V := \{(t, f(t), x^*) : t \in T, x^* \in B_\sigma^*\}$, $W := \{(t, x, x^*) \in T \times X \times B_\sigma^* : x^* \text{ сильно выделяет некоторую точку множества } \widehat{F}(t)\}$. Множество V борелевское в $T \times X \times B_\sigma^*$, так как функция f измерима по Борелю. Борелевость W в том же пространстве доказана на шаге 1 доказательства леммы 4 в [5]. Кроме того, в наших условиях сепарабельности пространства X пространство B_σ^* является полным сепарабельным и метризуемым. Так как таковыми являются и пространства T, X, по определению проекция множества $V \cap W$ на $T \times B_\sigma^*$, которая, как нетрудно видеть, совпадает с множеством U, является аналитическим множеством. Шаг 3 закончен.

Шаг 4. Построим f^*. По теореме фон Неймана (см., например, [6, предложение 2.1]) у многозначной функции $t \to \{x^* \in B^*_\sigma : (t, x^*) \in U\}$ существует измеримый селектор $f^* : T \to B^*_\sigma$.

Шаг 5. Функция f^*, рассматриваемая как функционал из $(L_1(T, X))^*$, сильно выделяет f в $S(F)$. Пусть последовательность $\{f_n\} \subset S(F)$ такова, что

$$\langle f^*, f_n \rangle \to \langle f^*, f \rangle. \tag{$*$}$$

Мы докажем, что в таком случае $|f_n - f|_{L_1} \to 0$. Для этого мы покажем, что из любой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ можно извлечь подпоследовательность, сильно сходящуюся к f. Понятно, что рассуждение достаточно провести для подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, совпадающей со всей последовательностью.

Так как по определению сильно выступающих точек

$$\langle f^*(t), f(t) \rangle \geq \langle f^*(t), f_n(t) \rangle \quad \text{п. в. на} \quad T,$$

из $(*)$ имеем

$$\int\limits_T |\langle f^*(t), f(t) \rangle - \langle f^*(t), f_n(t) \rangle| = \int\limits_T \langle f^*(t), f(t) \rangle - \int\limits_T \langle f^*(t), f_n(t) \rangle \to 0,$$

что означает сходимость

$$|\langle f^*(\cdot), f_n(\cdot) \rangle - \langle f^*(\cdot), f(\cdot) \rangle|_{L_1} \to 0.$$

Значит, из последовательности $\{f_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, что

$$\langle f^*(t), f_{n_k}(t) \rangle \to \langle f^*(t), f_n(t) \rangle \quad \text{п. в. на} \quad T.$$

Тогда по определению сильно выступающих точек

$$|f_{n_k}(t) - f(t)|_X \to 0 \quad \text{п. в. на} \quad T$$

и по теореме Лебега об ограниченной сходимости, которая применима здесь в силу интегральной ограниченности F,

$$|f_{n_k}(t) - f|_{L_1} := \int\limits_T |f_{n_k}(t) - f(t)|_X \to 0,$$

что заканчивает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Castaing C., Valadier M.* Convex analysis and measurable multifunctions. Berlin etc.: Springer, 1977.
2. *Diestel J., Uhl J.* Vector measures. Providens: Amer. Math. Soc., 1977.
3. *Мейер П.* Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
4. *Himmelberg C.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87, N 1. P. 53–72.
5. *Суслов С. И.* Нелинейный бэнг-бэнг принцип в банаховом пространстве // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 4. С. 142–154.
6. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. P. 1–12.

Статья поступила 10 октября 1995 г.,
окончательный вариант — 14 октября 1996 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
suslov@math.nsc.ru