Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.983

О НЕИНТЕГРАЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Б. Коротков

Аннотация: Доказывается, что аналитические функции некоторых несамосопряженных интегральных операторов в L_2 и непрерывные функции некоторых самосопряженных частично интегральных операторов в L_2 не являются ни интегральными, ни частично интегральными операторами при широких предположениях относительно функций. Библиогр. 5.

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой, $L_2 = L_2(X, \mu)$. Линейный непрерывный оператор $T : L_2 \to L_2$ называется *интегральным* (*частично интегральным*), если найдется определенная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$-измеримая $(\mu \times \mu)$-п. в. конечная функция $K(s, t)$ такая, что для всех $f \in L_2$ (соответственно для всех $f \in L_2 \cap L_\infty$) имеет место равенство

$$Tf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t)$$

для μ-п. в. $s \in X$; интеграл понимается в лебеговом смысле.

Будем говорить, что мера μ *не является чисто атомической*, если в X существует множество E, $\mu E > 0$, не содержащее атомов меры μ.

Всюду далее предполагается, что мера μ не является чисто атомической.

Пусть $\varphi(z) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ — степенной ряд, $L : L_2 \to L_2$ — линейный непрерывный оператор. Если ряд $a_0 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n L^n$ сходится по операторной норме, то его сумму будем называть *функцией оператора* L и обозначать через $\varphi(L)$.

Теорема 1. *Если $a_0 \neq 0$, то для любого интегрального оператора T в L_2 оператор $\varphi(T)$ не интегральный и даже не частично интегральный.*

Доказательство. Предположим, что $\varphi(T)$ — частично интегральный оператор. Тогда в силу [1, с. 40, 46] найдется не содержащее атомов меры μ множество e, $0 < \mu e < \infty$, такое, что операторы $P_e T$, $P_e \varphi(T) P_e$ вполне непрерывные; здесь P_e — оператор умножения на характеристическую функцию χ_e множества $e : P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2$. Так как

$$a_0 P_e = P_e \varphi(T) P_e - \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_e T^n P_e,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01551).

© **2000 Коротков В. Б.**

то P_e — вполне непрерывный оператор в L_2, что невозможно.

Пусть $\varphi(z)$ — степенной ряд, ρ — радиус его сходимости, $\varphi(0) = 0$, $M : L_2 \to L_2$ — карлемановский интегральный оператор с нормой $< \rho$. Положим $\psi(z) = \varphi(z)/z$. Поскольку $\varphi(M) = M\psi(M)$, по лемме о правом умножении (см., например, [1, с. 122]) $\varphi(M)$ — карлемановский интегральный оператор.

Возникает вопрос: будет ли оператор $\varphi(T)$ интегральным для любого степенного ряда $\varphi(z)$, $\varphi(0) = 0$, и любого интегрального оператора T?

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Пусть L_2 — сепарабельное пространство. Тогда существует вполне непрерывный интегральный оператор S в L_2 такой, что $\varphi(S)$ — не интегральный и даже не частично интегральный оператор для каждого степенного ряда $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, удовлетворяющего условию $a_2 \neq 0$.*

Доказательство. Напомним, что ортонормированная система $\{\psi_n\}$ называется *системой абсолютной сходимости для l_2* [2], если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n\psi_n(s)|$ сходится μ-п. в. для любой последовательности $\{a_n\} \in l_2$, причем множество сходимости этого ряда зависит от $\{a_n\}$. Так как мера μ предполагается не чисто атомической, то в X существует множество E, $\mu E > 0$, не содержащее атомов меры μ. Выберем в E попарно не пересекающиеся множества E_1, E_2, E_3 с конечными положительными мерами. Пусть $\{r_n, E_1\}$ — ортонормированная система обобщенных функций Радемахера с носителями в E_1 (см. [1, с. 11, 12]), $\{e_n\}$ — последовательность содержащихся в E_2 попарно не пересекающихся множеств с положительными мерами, $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система абсолютной сходимости для l_2, причем носители функций φ_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, содержатся в E_3 и существуют последовательности $\{\lambda_n\} \to 0$, $\{\mu_n\} \to 0$ такие, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n\mu_n|^2|\varphi_n(s)|^2 = \infty$ для всех s из некоторого множества $E_4 \subset E_3$, $\mu E_4 > 0$.

Рассмотрим вполне непрерывные операторы в L_2, определяемые для всех $f \in L_2$ равенствами

$$S_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f, r_n, E_1)\frac{\chi e_n}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad S_2 f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\left(f, \frac{\chi e_n}{\sqrt{\mu e_n}}\right)\varphi_n.$$

В [3] доказано, что оператор $S = S_1 + S_2$ интегральный, оператор S^2 не частично интегральный и оператор S^3 равен 0.

Пусть $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ и $a_2 \neq 0$. Так как $\varphi(S) = a_1 S + a_2 S^2$ и $a_2 \neq 0$, то $\varphi(S)$ — не интегральный и даже не частично интегральный оператор, в противном случае оператор S^2 был бы частично интегральным.

Пусть $M = M(X, \mu)$ — пространство всех определенных на X μ-измеримых μ-п. в. конечных функций с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве меры нуль. Приведем достаточное условие интегральности функций интегральных операторов.

Теорема 3. *Пусть $\mu X < \infty$ и $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ — степенной ряд, ρ — радиус его сходимости, T — интегральный оператор, $\|T\| < \rho$, $\psi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Если*

$\psi(T): L_\infty \to L_\infty$ и оператор $\varphi(T)$ регулярен как оператор из L_2 в M, то $\varphi(T)$ — интегральный оператор.

Справедливость теоремы непосредственно вытекает из следствия 3 теоремы 1 в [4].

Заметим, что $\psi(T): L_\infty \to L_\infty$, если $T: L_\infty \to L_\infty$ и $\rho > \|T\|_\infty$, где $\|T\|_\infty$ — норма T как оператора из L_∞ в L_∞.

Пусть H — линейный непрерывный самосопряженный оператор в L_2, h — определенная на числовой оси непрерывная функция. Через $h(H)$ будем обозначать функцию оператора H, определяемую равенством $h(H) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,dE_\lambda$, где $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы оператора H.

Теорема 4. *Пусть L_2 — сепарабельное пространство. Существует самосопряженный частично интегральный оператор W в L_2 такой, что для каждой определенной на числовой оси непрерывной функции g, удовлетворяющей условиям $g(-1) > 0$, $g(1) > 0$, оператор $g(W)$ не унитарно эквивалентен никакому частично интегральному оператору.*

Доказательство. Пусть E, $\mu E > 0$, — множество, не содержащее атомов меры μ, $\{g_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств $g_n \subset E$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, с конечными положительными мерами, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu g_n} < \infty$, $\{v_n\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке ортонормированной системы $\{\chi g_n/\sqrt{\mu g_n}\}$. Рассмотрим оператор в L_2, определяемый равенством

$$Wf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, v_n) \frac{\chi g_n}{\sqrt{\mu g_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, \frac{\chi g_n}{\sqrt{\mu g_n}}\right) v_n, \quad f \in L_2.$$

Оператор W частично интегральный в силу [1, с. 70, 71]. Кроме того, оператор W самосопряженный и унитарный. Следовательно, $W = P_1 - P_2$, где P_1, P_2 — ортопроекторы на ортогональные подпространства, причем $P_1 + P_2 = 1$.

Пусть $\alpha = \min\{g(-1), g(1)\}$. Тогда для любого элемента $v \in L_2$ имеем

$$(g(W)v, v) = g(-1)(P_2 v, v) + g(1)(P_1 v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Предположим, что существует унитарный оператор U в L_2 такой, что $\widetilde{W} = Ug(W)U^{-1}$ — частично интегральный оператор. Тогда в силу [1, с. 40] найдется множество $e \subset E$, $\mu e > 0$, такое, что $P_e \widetilde{W} P_e$ — вполне непрерывный оператор. Поэтому для любой ортонормированной системы функций u_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, с носителями в e получим $\lim\limits_{n\to\infty} (P_e \widetilde{W} P_e u_n, u_n) = 0$. С другой стороны, для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(P_e \widetilde{W} P_e u_n, u_n) = (Ug(W)U^{-1}u_n, u_n) \geq \alpha \|U^{-1}u_n\|^2 = \alpha > 0.$$

Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Пусть H — линейный непрерывный самосопряженный оператор в L_2, и пусть $E_\lambda(H)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — его разложение единицы. Следуя Н. И. Ахиезеру [5], введем спектральную функцию $F_\lambda(H)$ равенствами $F_\lambda(H) = E_\lambda(H)$ при $\lambda < 0$, $F_\lambda(H) = 0$ при $\lambda = 0$, $F_\lambda(H) = E_\lambda(H) - 1$ при $\lambda > 0$. Покажем, что для $-1 < \lambda < 0$ и $0 < \lambda < 1$ функция $F_\lambda(W)$ оператора W не является частично интегральным оператором. Имеем $F_\lambda(W) = P_2$ при $-1 < \lambda < 0$ и $F_\lambda(W) = -P_1$

при $0 < \lambda < 1$, и операторы P_1, P_2 не являются частично интегральными. Действительно, если один из операторов P_1, P_2 частично интегральный, то в силу равенства $P_1 - P_2 = W$ будет частично интегральным и другой, что невозможно, так как $P_1 + P_2 = 1$.

В заключение отметим, что спектральные проекторы $E(\Delta) = E_\delta(W) - E_\gamma(W)$, $\Delta = [\gamma, \delta]$, оператора W не частично интегральные операторы при $-\infty < \gamma < -1$, $-1 < \delta < 1$ либо при $-\infty < \gamma < 1$, $1 < \delta < \infty$, поскольку в первом случае $E(\Delta) = P_2$, во втором случае $E(\Delta) = P_1$ при $-1 \leq \gamma < 1$ и $E(\Delta) = 1$ при $\gamma < -1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Никишин Е. М.* Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 6. С. 129–191.
3. *Коротков В. Б.* О неинтегральности резольвент Фредгольма некоторых интегральных операторов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 905–907.
4. *Коротков В. Б.* О частично интегральных операторах // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 80–83.
5. *Ахиезер Н. И.* Интегральные операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, № 5. С. 93–132.

Статья поступила 4 февраля 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН