Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.95

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В СОБОЛЕВСКИХ НОРМАХ

П. Л. Комаров

Аннотация: Рассматривается лучевое преобразование I на римановом многообразии M с краем, сопоставляющее симметричному тензорному полю f степени m совокупность его интегралов

$$If(\gamma) = \int\limits_{\gamma} f_{i_1 \dots i_m} \dot{\gamma}^{i_1} \dots \dot{\gamma}^{i_m}\, dt$$

по всем максимальным геодезическим γ. При некоторых предположениях на кривизну M доказана оценка устойчивости

$$\|f\|_{H^k} \le C(\|If\|_{H^{k+1}_{\lambda}} + \|\delta f\|_{H^k}),$$

где δ — дивергенция и H^{k+1}_{λ} — некоторое весовое соболевское пространство на многообразии максимальных геодезических. Библиогр. 6.

Введение

Большинство оценок устойчивости решений задач интегральной геометрии установлено в L_2-нормах. Так, для преобразования Радона Ю. Г. Решетняком получен аналог формулы Планшереля [1], который, во-первых, позволяет распространить данное преобразование с пространства Шварца на L_2 (по аналогии с преобразованием Фурье), а во-вторых, дает неулучшаемую оценку устойчивости обращения этого оператора. Р. Г. Мухометовым в [2] доказана оценка устойчивости обращения лучевого преобразования, заданного на регулярном семействе кривых в n-мерном пространстве. В [3] результат работы [2] распространен на случай тензорного поля произвольной степени и пространства произвольной размерности при некоторых ограничениях на кривизну многообразия. В работе [4] получен подобный результат лишь для функций, но при более слабых условиях: ограничения на кривизну многообразия заменены требованием простоты метрики (т. е. отсутствием на любой геодезической сопряженных точек).

В некоторых вопросах важно устойчивое восстановление не только функции, но и ее производных. Здесь получено гораздо меньше оценок устойчивости. Автору известен лишь результат Наттерера [5, гл. 2], дающий оценку H^k-нормы гладкой финитной функции через $H^{k+n/2}$-норму ее преобразования Радона.

Настоящая работа посвящена распространению результата В. А. Шарафутдинова [3, гл. 4], дающего оценку L_2-нормы тензорного поля на римановом многообразии через H^1-норму его лучевого преобразования. Мы распространяем эту оценку на случай H^k-нормы тензорного поля для любого целого $k \ge 0$. При

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (грант RM2–143).

подобном распространении необходимо возникают весовые соболевские нормы, до сих пор рассматривавшиеся лишь в евклидовом случае.

Статья разбита на три пункта. В первом вводится понятие весовых соболевских норм на компактном римановом многообразии с краем. Далее определяется лучевое преобразование, доказываются некоторые его свойства, а также формулируется основной результат статьи, а именно: H^k-норма тензорного поля оценивается через весовую норму его лучевого преобразования плюс H^{k-1}-норму дивергенции поля. В заключительном пункте приведено доказательство основной теоремы.

Автор благодарен В. А. Шарафутдинову за постановку задачи и ценные советы в процессе работы.

1. Весовые соболевские пространства

Пусть $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ и $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Зафиксируем целое $k \geq 0$ и упорядоченную последовательность $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ действительных чисел такую, что $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$.

Пусть $\gamma = (E, p, N)$ — гладкое m-мерное векторное расслоение над компактным многообразием N размерности n с краем ∂N. Выберем конечный атлас $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a=1}^A$ на N ($\varphi_a : U_a \to V_a$ — диффеоморфизм U_a на некоторое множество V_a пространства $\mathbb{R}^n_+$), разбиение единицы $\{\mu_a\}_{a=1}^A$, подчиненное этому покрытию и локальные тривиализации $\{\psi_a\}, \psi_a : p^{-1}(U_a) \to U_a \times \mathbb{R}^m$. Пусть $C_0^\infty(\gamma)$ — векторное пространство гладких сечений γ, обращающихся в нуль в некоторой окрестности (своей для каждого сечения) края ∂N. Для такого сечения $f \in C_0^\infty(\gamma)$ и для каждого $1 \leq a \leq A$ определена гладкая финитная функция

$$f_a : V_a \to \mathbb{R}^m, \quad f_a(x) = \big(p_2 \circ \psi_a\big)\big((\mu_a f)(\varphi_a^{-1}(x))\big), \quad x \in V_a,$$

обращающаяся в нуль в некоторой окрестности множества $V_a \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Положим

$$\|f\|^2_{H^k_\lambda(\gamma)} = \sum_{a=1}^A \sum_{l=0}^k \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{V_a} x_n^{-2\lambda_l} |D^\alpha f_a(x)|^2\, dx. \tag{1.1}$$

При изменении атласа, разбиения единицы и тривиализации норма (1.1) меняется на эквивалентную. Через $H^k_\lambda(\gamma)$ обозначим пополнение пространства $C_0^\infty(\gamma)$ по норме (1.1).

В случае, когда $N = \Omega$ — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, а γ — тривиальное одномерное расслоение, определение (1.1) переписывается так:

$$\|f\|^2_{H^k_\lambda(\Omega)} = \sum_{l=0}^k \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{\Omega} \rho(x)^{-2\lambda_l} |D^\alpha f(x)|^2\, dx, \tag{1.2}$$

где $\rho(x)$ — расстояние от точки x до края $\partial\Omega$. В этом случае пространства $H^k_\lambda(\Omega)$ хорошо изучены. Так, в [6] при весьма общих предположениях об Ω доказано, что $H^k_{\lambda'}(\Omega) = H^k_{\lambda''}(\Omega)$, где $\lambda' = \{\lambda, \dots, \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda'' = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, $\lambda_s = \lambda + (k - s)$ и $\lambda \neq 1 - 2s$ для $s = 1, \dots, k$. Отсюда, в частности, вытекает, что $H^1_{(1,0)}(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Основываясь на [6], можно установить истинность следующего утверждения.

Лемма 1.1. *Положим* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = (k, k, \dots, k)$ *и* $\lambda' = (\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_k) = (2k, 2k-1, \dots, k)$. *Тогда нормы* $H^k_\lambda(\gamma)$ *и* $H^k_{\lambda'}(\gamma)$ *эквивалентны.*

Доказательство леммы полностью повторяет доказательство аналогичной леммы в евклидовом случае в [6]. Нужно точно так же свести дело к одномерному интегралу, а затем воспользоваться неравенством Харди.

Отметим некоторые свойства пространств $H^k_\lambda(\gamma)$. Во-первых, ограниченность дифференциальных операторов: если коэффициенты оператора

$$L = \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha(x) D^\alpha : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$$

удовлетворяют оценкам $|a_\alpha(x)| \le \rho^{\mu_l}(x)$ при $|\alpha| = l$ и $\tilde\lambda_l = \lambda_{l+m} - \mu_l$, то он имеет ограниченное продолжение $L : H^k_\lambda(\gamma) \to H^{k-m}_{\tilde\lambda}(\gamma')$, где γ и γ' — тривиальные одномерные расслоения над многообразиями M и N соответственно. Второе свойство, которое потребуется нам в дальнейшем, — монотонность нормы по λ и k: при условиях $k_1 \le k_2$, $\lambda_l \le \tilde\lambda_l$ $(l = 0, \dots, k_1)$ имеет место непрерывное вложение

$$H^{k_2}_{\tilde\lambda}(\gamma) \subset H^{k_1}_\lambda(\gamma). \tag{1.3}$$

Некоторые другие свойства весовых пространств для более частных видов многообразий мы будем рассматривать по ходу дела.

Все дальнейшие обозначения взяты из [3], если противное не оговорено особо. Там же можно более подробно ознакомиться со свойствами вводимых ниже понятий.

Пусть (M, g) — компактное рассеивающее риманово многообразие размерности n. Тогда $\partial_+\Omega M$ — компактное многообразие размерности $2n-2$ с краем $\partial_0\Omega M$. Для многообразия $\partial_+\Omega M$ норма (1.2) эквивалентна следующей:

$$\|f\|^2_{H^k_\lambda(\partial_+\Omega M)} = \sum_{a=1}^{A} \sum_{l=0}^{k} \sum_{|\alpha|=l} \int_{V_a} \langle \xi, \nu(x) \rangle^{-\lambda_l} \big| D^\alpha \big[(\mu_a \cdot f)(\varphi_a^{-1}(y)) \big] \big|^2 \, dy.$$

Здесь $\{(U_a, \varphi_a : U_a \to V_a)\}_{a=1}^A$ — конечный атлас на $\partial_+\Omega M$, $\varphi_a^{-1}(y) = (x, \xi)$, $\{\mu_a\}_{a=1}^A$ — подчиненное ему разбиение единицы и ν — единичный вектор внешней нормали к ∂M.

Через $H^k_\lambda(\Omega M)$ будем обозначать пространство $H^k_\lambda(\gamma)$ при $N = \Omega M, \gamma$ — тривиальное одномерное расслоение, через $H^k_\lambda(S^m\tau'_M)$ — пространство $H^k_\lambda(\gamma)$ при $\gamma = S^m\tau'_M$ и через $H^k_\lambda(\partial_+\Omega M)$ — пространство $H^k_\lambda(\gamma)$ при $N = \partial_+\Omega M$, γ — тривиальное одномерное расслоение.

Для компактного рассеивающего риманова многообразия M лучевое преобразование

$$J : C^\infty(\Omega M) \to C^\infty(\partial_+\Omega M)$$

задается равенством

$$JF(x, \xi) = \int_{\tau_-(x,\xi)}^{0} F(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t)) \, dt, \quad (x, \xi) \in \partial_+\Omega M,$$

где $\gamma_{x,\xi} : [\tau_-(x,\xi), 0] \to M$ — максимальная геодезическая, удовлетворяющая начальным условиям $\gamma_{x,\xi}(0) = x, \dot\gamma_{x,\xi}(0) = \xi$.

Определим лучевое преобразование симметричных тензорных полей

$$I : C^\infty(S^m\tau'_M) \to C^\infty(\partial_+\Omega M)$$

для произвольного симметричного тензорного поля $f \in C^\infty(S^m\tau'_M)$, полагая $If(x, \xi) = JF$, где $F(x, \xi) \equiv f_{i_1 \dots i_m}(x)\xi^{i_1} \dots \xi^{i_m}$.

Используя строгую выпуклость края, легко установить следующее свойство: для любой окрестности $U \subset M$ края ∂M существует такое $\varepsilon > 0$, что

$\gamma_{x,\xi}(t) \in U$ при всех $\tau_-(x,\xi) \le t \le 0$ и всех $(x,\xi) \in \partial_+\Omega M$, удовлетворяющих неравенству $\langle \xi, \nu(x)\rangle \le \varepsilon$. Отсюда следует, что если $f \in C_0^\infty(\Omega M)$, то $If \in C_0^\infty(\partial_+\Omega M)$, т. е.

$$J : C_0^\infty(\Omega M) \to C_0^\infty(\partial_+\Omega M), \tag{1.4}$$

$$I : C_0^\infty(S^m\tau'_M) \to C_0^\infty(\partial_+\Omega M). \tag{1.5}$$

Несложно, но достаточно громоздко доказывается следующая

Теорема 1.2. *Лучевое преобразование* (1.4) *продолжается до ограниченного оператора*

$$J : H^k_\lambda(\Omega M) \to H^k_\lambda(\partial_+\Omega M)$$

для любых k и λ.

Отсюда следует, что (1.5) продолжается до ограниченного оператора

$$I : H^k_\lambda(S^m\tau'_M) \to H^k_\lambda(\partial_+\Omega M).$$

2. Устойчивость обращения лучевого преобразования

Проблема обращения лучевого преобразования [3, с. 124] ставится следующим образом: при каких условиях соленоидальная часть поля $f \in H^k(S^m\tau'_M)$ восстанавливается по лучевому преобразованию If?

Для компактного рассеивающего риманова многообразия (M,g) будем использовать характеристику $k^+ = k^+(M,g)$, введенную в [3, с. 124], а через δ обозначать *оператор дивергенции*, определенный в [3, с. 91].

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2.1. *Для целых $n \ge 2$, $m \ge 0$, $k \ge 1$ для любого компактного рассеивающего риманова многообразия (M,g) размерности n, удовлетворяющего условию*

$$k^+(M,g) < \min\{1/(m+1), 1/(k+1)\}, \tag{2.1}$$

и для любого тензорного поля $f \in H^{k+1}_\lambda(S^m\tau'_M)$, где $\lambda = (\lambda_0,\dots,\lambda_{k+1}) = (k,k,\dots,k)$, имеет место оценка

$$\|f\|_{H^k(S^m\tau'_M)} \le C(\|If\|_{H^{k+1}_\lambda(\partial_+\Omega M)} + \|\delta f\|_{H^k(S^{m-1}\tau'_M)})$$

с не зависящей от f постоянной C.

Для произвольного поля $f \in C_0^\infty(S^m\tau'_M)$ определим на T^0M функцию

$$u(x,\xi) = \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} \langle f(\gamma_{x,\xi}(t)), \dot\gamma^m_{x,\xi}(t)\rangle\, dt, \quad (x,\xi) \in T^0M, \tag{2.2}$$

где использованы те же обозначения, что и при определении лучевого преобразования. Для u выполняются следующие краевые условия:

$$u|_{\partial_+\Omega M} = If, \tag{2.3}$$

$$u|_{\partial_-\Omega M} = 0. \tag{2.4}$$

Легко видеть, что в некоторой окрестности $T(\partial M)$ гладкая функция u обращается в нуль, однородна по второму аргументу:

$$u(x,\lambda\xi) = \lambda^{m-1}u(x,\xi), \quad \lambda > 0, \tag{2.5}$$

а также удовлетворяет *кинетическому уравнению*

$$Hu(x,\xi) = f_{i_1\dots i_m}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m}. \tag{2.6}$$

Участвующие в дальнейших выкладках вертикальные и горизонтальные ковариантные производные $\overset{v}{\nabla}$ и $\overset{h}{\nabla}$ введены в [3, гл. 3]. Там же можно ознакомиться и с их основными свойствами, используемыми ниже. Будем через $\overset{v}{\nabla}{}^{(k)}u$ обозначать выражение $\underbrace{\overset{v}{\nabla}\dots\overset{v}{\nabla}}_{k}u$.

Докажем, что теорема 2.1 выводится из следующего своего частного случая.

Лемма 2.2. *Пусть компактное рассеивающее риманово многообразие* (M,g) *размерности* n *удовлетворяет* (2.1). *Для функции* u, *определенной по действительному полю* $f\in C_0^\infty(S^m\tau'_M)$ *равенством* (2.2), *справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^{k+1}(\Omega M)}\le C(\|If\|_{H^{k+1}_{\lambda'}(\partial_+\Omega M)}+\|\delta f\|_{H^k(S^{m-1}\tau'_M)}),$$

где $\lambda'=(\lambda'_0,\lambda'_1,\dots,\lambda'_{k+1})=(2k+1,2k,\dots,k)$, *а* C *— константа, не зависящая от* f.

В самом деле, сначала заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением действительного поля f, поскольку общий случай сводится к этому путем выписывания оценок для действительной и мнимой частей f.

Выберем последовательность действительных полей $f_i\in C_0^\infty(S^m\tau'_M)$, $i=1,2,\dots$, сходящуюся к f в $H^{k+1}_{\lambda'}(S^m\tau'_M)$. При этом $\delta f_i\to\delta f$ в $H^k(S^{m-1}\tau'_M)$. Теперь из (2.6) имеем

$$\|f_i\|_{H^k(S^m\tau'_M)}\le C\sum_{l=0}^{k}\|\nabla^{(l)}f_i\|_{L_2(S^m\tau'M)}$$
$$\le C\sum_{l=0}^{k}\|\overset{h}{\nabla}{}^{(l)}Hu_i\|_{L_2(\Omega M)}\le C_1\|u_i\|_{H^{k+1}(\Omega M)}. \quad (2.7)$$

Применив к u_i лемму 2.2, с учетом (2.7) имеем

$$\|f_i\|_{H^k(S^m\tau'_M)}\le C_1\|u_i\|_{k+1}\le C_2(\|If_i\|_{H^k_{\lambda'}(\partial_+\Omega M)}+\|\delta f_i\|_{H^k(S^{m-1}\tau'_M)}).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i\to\infty$ и используя (2.3) и непрерывность I, установленную в теореме 1.2, получим

$$\|f\|_{H^k(S^m\tau'_M)}\le C(\|If\|_{H^{k+1}_{\lambda'}(\partial_+\Omega M)}+\|\delta f\|_{H^k(S^{m-1}\tau'_M)}).$$

Теперь осталось воспользоваться эквивалентностью норм H^k_λ и $H^k_{\lambda'}$, обоснованной леммой 1.1.

3. Доказательство теоремы 2.1

Доказательства используемых ниже формул Гаусса — Остроградского для полубазисных тензорных полей, неравенства Пуанкаре и тождества Пестова см. в [3, гл. 3, 4].

Лемма 3.1. *Пусть* (M,g) *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1. *Тогда для функции* u, *определенной по действительному полю* $f\in C_0^\infty(S^m\tau'_M)$ *равенством* (2.2), *имеют место оценки*

$$\|u|_{\Omega M}\|_{L_2(\Omega M)}\le C(\|If\|_{H^1(\partial_+\Omega M)}+\|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)}), \quad (3.1)$$

$$\|\overset{v}{\nabla}{}^{(k+1)}u\|^2_{L_2(\beta^0_{k+1}M|_{\Omega M})}\le C(\|If\|^2_{H^{k+1}(\partial_+\Omega M)}+\|u\|_{H^k(\Omega M)}\|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)}), \quad (3.2)$$

$$\|\overset{h}{\nabla}{}^{(k)}\overset{v}{\nabla}u\|^2_{L_2(\beta^0_{k+1}M|_{\Omega M})} \le C(\|If\|^2_{H^{k+1}(\partial_+\Omega M)} + \|u\|_{H^k(\Omega M)}\|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)}) \quad (3.3)$$

с не зависящей от f постоянной C.

Будем в дальнейшем применять сокращенные обозначения для норм:

$$\|f\|_k = \|f\|_{H^k(S^m\tau'_M)}, \quad \|If\|_k = \|If\|_{H^k(\partial_+\Omega M)}, \quad \|u\|_k = \|u|_{\Omega M}\|_{H^k(\Omega M)}$$

и т. д. Также будем по умолчанию полагать, что все константы, участвующие в оценках, неотрицательны, если противное не оговорено особо, и одной и той же буквой будем обозначать, вообще говоря, различные константы в разных неравенствах.

Доказательство леммы 3.1 приведем лишь для случая $k = 1$, чтобы избежать излишней громоздкости. В конце статьи мы сделаем несколько замечаний о том, как это доказательство проводится для $k > 1$.

Сначала докажем промежуточные оценки:

$$\|\overset{h}{\nabla}u|_{\Omega M}\|^2_{L_2(\beta^0_1 M|_{\Omega M})} \le C(\|If\|^2_{H^1(\partial_+\Omega M)} + \|u\|_{L_2(\Omega M)}\|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)}), \quad (3.4)$$

$$\|\overset{v}{\nabla}u|_{\Omega M}\|^2_{L_2(\beta^0_1 M|_{\Omega M})} \le C(\|If\|^2_{H^1(\partial_+\Omega M)} + \|u\|_{L_2(\Omega M)}\|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)}). \quad (3.5)$$

Доказательство оценки (3.4) легко получить очевидной модификацией доказательства теоремы 4.3.1 из [3]. Действительно, достаточно в равенстве (4.6.7) из [3] отказаться от предположения, что δf обращается в нуль, и все дальнейшие оценки проводить с учетом последнего слагаемого из (4.6.7). Тогда промежуточный результат (4.7.10) из [3] можно записать в следующем виде:

$$\|\overset{h}{\nabla}u|_{\Omega M}\|^2_0 \le C\big(\{m\|If\|_0\|j_\nu f|_{\partial M}\|_0 + \|If\|^2_1\} + m\|u\|_0\|\delta f\|_0\big),$$

где j_ν — оператор, сопряженный к оператору симметричного умножения на ν. Отметим, что для доказательства (4.7.10) в [3] уже использовалось ограничение на секционные кривизны и k^+ оценено как $k^+ \le \frac{1}{m+1}$. Поскольку $f|_{\partial M} = 0$, из последнего неравенства следует (3.4).

Докажем оценку (3.5). В [3, неравенство (4.7.8)] доказана оценка $\|H\overset{v}{\nabla}u\|_0 \le C\|\overset{h}{\nabla}u\|_0$. Применяя неравенство Пуанкаре к полю $\overset{v}{\nabla}u$ и используя последнюю оценку, а также (3.4), получаем

$$\|\overset{v}{\nabla}u\|^2_0 \le C\|H\overset{v}{\nabla}u\|^2_0 \le C_1\|\overset{h}{\nabla}u\|^2_0 \le C_2\big(\|If\|^2_1 + \|u\|_0\|\delta f\|_0\big).$$

Оценка (3.1) следует из (3.4) с помощью неравенства Пуанкаре: $\|u\|_0 \le C\|Hu\|_0 \le C\|\overset{h}{\nabla}u\|_0$. Приступим к доказательству оценок (3.2) и (3.3). Применив оператор $\overset{v}{\nabla}$ к уравнению (2.6), имеем

$$\overset{v}{\nabla}_i Hu = mf_{ii_2\dots i_m}\xi^{i_2}\dots\xi^{i_m},$$

поскольку f не зависит от ξ. Отсюда, учитывая коммутационную формулу $\overset{v}{\nabla}H - H\overset{v}{\nabla} = \overset{h}{\nabla}$, получим

$$H\overset{v}{\nabla}_i u = \overset{v}{\nabla}_i Hu - \overset{h}{\nabla}_i u = mf_{ii_2i_3\dots i_m}\xi^{i_2}\dots\xi^{i_m} - \overset{h}{\nabla}_i u. \quad (3.6)$$

Напишем тождество Пестова для $\overset{v}{\nabla}u$:

$$2\langle\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla}u, \overset{v}{\nabla}(H\overset{v}{\nabla}u)\rangle = |\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla}u|^2 + \overset{h}{\nabla}_i v^i + \overset{v}{\nabla}_i w^i$$
$$- R_{ijrl}\xi^i\xi^r\overset{v}{\nabla}{}^j\overset{v}{\nabla}{}^{i_1}u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l\overset{v}{\nabla}_{i_1}u - R^i_{pqj}\xi^q\overset{v}{\nabla}{}^p u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^j\overset{v}{\nabla}_i u, \quad (3.7)$$

где

$$v^i = \xi^i \overset{h}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}{}^l u \cdot \overset{v}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_l u - \xi^j \overset{v}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^l u \cdot \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_l u, \tag{3.8}$$

$$w^i = \xi^j \overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^l u \cdot \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_l u. \tag{3.9}$$

Из (2.5) и (3.9) следует, что поле $w(x, \xi)$ положительно однородно степени $2m - 3$ по второму аргументу.

Преобразуем левую часть тождества (3.7), используя (3.6):

$$2\langle \overset{h}{\nabla} \overset{v}{\nabla} u, \overset{v}{\nabla}(H \overset{v}{\nabla} u)\rangle = 2m(m-1)\overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^{j_1} u \cdot f_{ij_1\dots j_{m-1}} \xi^{j_2} \dots \xi^{j_{m-1}} - 2\overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_i u.$$

Выделяя из первого слагаемого правой части дивергентную часть, имеем

$$\begin{aligned} 2\langle \overset{h}{\nabla} \overset{v}{\nabla} u, \overset{v}{\nabla}(H \overset{v}{\nabla} u)\rangle &= \overset{h}{\nabla}{}^i (2m(m-1) \cdot \overset{v}{\nabla}{}^{j_1} u \cdot f_{ij_1\dots j_{m-1}} \xi^{j_2} \dots \xi^{j_{m-1}}) \\ &- 2m(m-1)\overset{v}{\nabla}{}^{j_1} u \cdot \nabla^i f_{ij_1\dots j_{m-1}} \xi^{j_2} \dots \xi^{j_{m-1}} - 2\overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_i u. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Преобразуем последнее слагаемое правой части (3.10) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_i u &= \overset{v}{\nabla}_i \big(\overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j u\big) - \overset{v}{\nabla}_i \overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j u \\ &= \overset{v}{\nabla}_i \big(\overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j u\big) - \overset{v}{\nabla}{}^j \big(\overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}_i u \cdot \overset{h}{\nabla}_j u\big) + \overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}_i u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{h}{\nabla}_j u. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$w_1^i = \overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j u - \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}{}^i u, \quad w_2 = \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}{}^j u,$$

запишем полученное соотношение так:

$$\overset{h}{\nabla}{}^i \overset{v}{\nabla}{}^j u \cdot \overset{h}{\nabla}_j \overset{v}{\nabla}_i u = \overset{v}{\nabla}_i w_1^i + |w_2|^2. \tag{3.11}$$

Очевидно, что поле w_1 положительно однородно степени $2m - 3$ по ξ.

Подставляя (3.11) в (3.10), а (3.10) в (3.7), приходим к равенству

$$\begin{aligned} |\overset{h}{\nabla} \overset{v}{\nabla} u|^2 &= \overset{h}{\nabla}_i \tilde v^i - \overset{h}{\nabla}_i v^i - \overset{v}{\nabla}_i w^i - 2m(m-1)\overset{v}{\nabla}{}^{j_1} u \cdot (\delta f)_{j_1\dots j_{m-1}} \xi^{j_2} \dots \xi^{j_{m-1}} - 2\overset{v}{\nabla}_i w_1^i \\ &- 2|w_2|^2 + R_{ijrl} \xi^i \xi^r \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}{}^{i_1} u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l \overset{v}{\nabla}_{i_1} u + R^p_{iqj} \xi^q \overset{v}{\nabla}{}^i u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}_p u, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$\tilde v^i = 2m(m-1) g^{ij} \overset{v}{\nabla}{}^{j_1} u \cdot f_{jj_1\dots j_{m-1}} \xi^{j_2} \dots \xi^{j_{m-1}}.$$

Умножим (3.12) на элемент объема $d\Sigma$ многообразия ΩM и проинтегрируем по ΩM. Преобразуя интегралы от дивергентных слагаемых по формулам Гаусса — Остроградского и учитывая, что $\langle w, \xi\rangle = |H \overset{v}{\nabla} u|^2$, получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega M} \Big(|\overset{h}{\nabla} \overset{v}{\nabla} u|^2 - R_{ijrl} \xi^i \xi^r \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}{}^{i_1} u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^l \overset{v}{\nabla}_{i_1} u\Big)\, d\Sigma &= \int\limits_{\partial\Omega M} \langle \tilde v - v, \nu\rangle\, d\Sigma^{2n-2} \\ - 2(n + 2m - 4) \int\limits_{\Omega M} \langle w_1, \xi\rangle\, d\Sigma - 2 \int\limits_{\Omega M} |w_2|^2\, d\Sigma &- (n + 2m - 4) \int\limits_{\Omega M} |H \overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma \\ - 2m(m-1) \int\limits_{\Omega M} \overset{v}{\nabla}{}^{j_1} u \cdot (\delta f)_{j_1\dots j_{m-1}} \xi^{j_2} \dots \xi^{j_{m-1}}\, d\Sigma &+ \int\limits_{\Omega M} R^p_{iqj} \xi^q \overset{v}{\nabla}{}^i u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}_p u\, d\Sigma, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $\nu = \nu(x)$ — вектор внешней нормали к ∂M.

Сначала оценим второе слагаемое из левой части (3.13). Подобно тому, как это сделано в [3, гл. 4], используя (3.6), (3.11) и неравенство Коши — Буняковского, можно получить оценку

$$\int\limits_{\Omega M} R_{ijrl}\xi^i\xi^r \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}{}^{i_1} u\cdot \overset{v}{\nabla}{}^l \overset{v}{\nabla}_{i_1} u\,d\Sigma \le k^+\int\limits_{\Omega M}|H\overset{v}{\nabla}{}^{(2)}u|^2\,d\Sigma$$

$$\le C(1+1/\varepsilon_1)\|Hu\|_0^2 + k^+(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega M}(\overset{h}{\nabla}{}^{j_1}\overset{v}{\nabla}{}^{j_2}u+\overset{h}{\nabla}{}^{j_2}\overset{v}{\nabla}{}^{j_1}u)\cdot(\overset{h}{\nabla}_{j_1}\overset{v}{\nabla}_{j_2}u+\overset{h}{\nabla}_{j_2}\overset{v}{\nabla}_{j_1}u)\,d\Sigma$$

$$\le C(1+1/\varepsilon_1)\|\overset{h}{\nabla}u\|^2_{L_2(\Omega M)} + 2k^+(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega M}|\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla}u|^2\,d\Sigma + 2k^+(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega M}\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{v}{\nabla}{}^j u\cdot\overset{h}{\nabla}_j\overset{v}{\nabla}_i u$$

$$= C(1+1/\varepsilon_1)\|\overset{h}{\nabla}u\|^2_{L_2(\Omega M)} + 2k^+(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega M}|\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla}u|^2\,d\Sigma$$

$$+ 2k^+(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega M}\overset{v}{\nabla}_i w_1^i\,d\Sigma + 2k^+(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega M}|w_2|^2\,d\Sigma, \qquad (3.14)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малая постоянная, а $C = C(m, k^+)$ — константа, не зависящая от ε_1 и f.

Используя (3.14) и формулы Гаусса — Остроградского, из (3.13) получаем неравенство

$$(1 - 2k^+(1+\varepsilon_1))\int\limits_{\Omega M}|\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla}u|^2\,d\Sigma$$

$$\le \int\limits_{\partial\Omega M}\langle\tilde{v} - v, \nu\rangle\,d\Sigma^{2n-2} + (n+2m-4)\big(2k^+(1+\varepsilon_1)-1\big)\int\limits_{\Omega M}\langle w_1, \xi\rangle\,d\Sigma$$

$$+ (2k^+(1+\varepsilon_1)-1)\int\limits_{\Omega M}|w_2|^2\,d\Sigma - (n+2m-4)\int\limits_{\Omega M}|H\overset{v}{\nabla}u|^2\,d\Sigma$$

$$- 2m(m-1)\int\limits_{\Omega M}\overset{v}{\nabla}{}^{j_1}u\cdot(\delta f)_{j_1\dots j_{m-1}}\xi^{j_2}\dots\xi^{j_{m-1}}\,d\Sigma$$

$$+ \int\limits_{\Omega M}R^p_{iqj}\xi^q\overset{v}{\nabla}{}^i u\cdot\overset{v}{\nabla}{}^j\overset{v}{\nabla}_p u\,d\Sigma + C(1+1/\varepsilon_1)\|\overset{h}{\nabla}u\|_0^2. \qquad (3.15)$$

Теперь оценим второе слагаемое правой части (3.15). С помощью неравенства Коши — Буняковского получаем

$$\int\limits_{\Omega M}\langle w_1, \xi\rangle\,d\Sigma = \int\limits_{\Omega M}(\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{v}{\nabla}{}^j u\cdot\overset{h}{\nabla}_j u - \overset{h}{\nabla}_j\overset{v}{\nabla}{}^j u\cdot\overset{h}{\nabla}{}^i u)\xi_i\,d\Sigma$$

$$\le \varepsilon_2\int\limits_{\Omega M}|\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla}u|^2\,d\Sigma + \frac{C_1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\Omega M}|\overset{h}{\nabla}u|^2\,d\Sigma, \qquad (3.16)$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — сколь угодно мало́, а C_1 — положительная константа, не зависящая от f. Для пятого слагаемого правой части (3.15) имеем

$$2m(m-1)\int\limits_{\Omega M}\overset{v}{\nabla}{}^{j_1}u\cdot\delta f_{j_1\dots j_{m-1}}\xi^{j_2}\dots\xi^{j_{m-1}}\,d\Sigma$$

$$\le Cm(m-1)\|\overset{v}{\nabla}u\|_{L_2(\Omega M)}\|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)}.$$

Шестое слагаемое оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega M} R^p_{iqj}\xi^q \overset{v}{\nabla}{}^i u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}_p u\, d\Sigma \le \varepsilon_3 \int\limits_{\Omega M} |\overset{v}{\nabla}{}^{(2)} u|^2\, d\Sigma + \frac{C_2}{\varepsilon_3}\int\limits_{\Omega M} |\overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma, \tag{3.17}$$

где ε_3 — произвольная положительная константа, а C_2 — постоянная, не зависящая от f.

Используя неравенство Пуанкаре и (3.6), имеем

$$\int\limits_{\Omega M} |\overset{v}{\nabla}{}^{(2)} u|^2\, d\Sigma \le C \int\limits_{\Omega M} |H\overset{v}{\nabla}{}^{(2)} u|^2\, d\Sigma \le C_1 \|\overset{h}{\nabla} u\|^2_{L_2(\Omega M)} + C_2 \int\limits_{\Omega M} |\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma. \tag{3.18}$$

С учетом этого неравенства переписываем (3.17):

$$\int\limits_{\Omega M} R^p_{iqj}\xi^q \overset{v}{\nabla}{}^i u \cdot \overset{v}{\nabla}{}^j \overset{v}{\nabla}_p u\, d\Sigma \le \varepsilon_3 C_1 \|\overset{h}{\nabla} u\|^2_{L_2(\Omega M)} + \varepsilon_3 C_2 \int\limits_{\Omega M} |\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma + \frac{C_3}{\varepsilon_3}\int\limits_{\Omega M} |\overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma. \tag{3.19}$$

Простое, но существенное замечание: C_2 не зависит от ε_3.

Собирая воедино (3.16)–(3.19), перепишем (3.15) в виде

$$\begin{aligned}(1 - 2k^+(1+\varepsilon_1) - C_1\varepsilon_2 - C_2\varepsilon_3) \int\limits_{\Omega M} |\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma \le (2k^+(1+\varepsilon_1) - 1)\int\limits_{\Omega M} |w_2|^2\, d\Sigma - (n+2m-4)\int\limits_{\Omega M} |H\overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma \\ + \int\limits_{\partial\Omega M} \langle \tilde v - v, \nu\rangle\, d\Sigma^{2n-2} + C_3 m(m-1)\|\overset{v}{\nabla} u\|_{L_2(\Omega M)} \|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)} \\ + C_4 \|\overset{h}{\nabla} u\|^2_{L_2(\Omega M)} + C_5 \|\overset{v}{\nabla} u\|^2_{L_2(\Omega M)},\end{aligned} \tag{3.20}$$

где $C_1 = (n+2m-4)(2k^+(1+\varepsilon_1) - 1)$. Что же касается остальных констант, то нам важно, что они не зависят от f, а C_2 еще и от ε_3.

Разберем две возможности.

1. $m \ge 1$. В этом случае мы можем отбросить второе неположительное слагаемое в правой части (3.20) и получить неравенство

$$\begin{aligned}(1 - 2k^+(1+\varepsilon_1) - C_1\varepsilon_2 - C_2\varepsilon_3) \int\limits_{\Omega M} |\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla} u|^2\, d\Sigma \le (2k^+(1+\varepsilon_1) - 1)\int\limits_{\Omega M} |w_2|^2\, d\Sigma \\ + \int\limits_{\partial\Omega M} \langle \tilde v - v, \nu\rangle\, d\Sigma^{2n-2} + C_3 m(m-1)\|\overset{v}{\nabla} u\|_{L_2(\Omega M)} \|\delta f\|_{L_2(S^{m-1}\tau'_M)} \\ + C_4 \|\overset{h}{\nabla} u\|^2_{L_2(\Omega M)} + C_5 \|\overset{v}{\nabla} u\|^2_{L_2(\Omega M)}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

2. $m = 0$. Согласно (3.6) имеем неравенство $|H\overset{v}{\nabla} u| \le C|\overset{h}{\nabla} u|^2$, используя которое, переписываем (3.20) в виде, полностью аналогичном (3.21) (изменится лишь константа C_4).

Теперь видно, что при $k^+ < \frac{1}{2}$ найдутся такие ε_i, $i = 1, 2, 3$, что множитель перед интегралом в левой части (3.21) станет положительным, и тем самым

$$\int\limits_{\Omega M} |\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla} u|^2 \, d\Sigma \le C_1 \|If\|_1^2 + C_2 \|u\|_1 \|\delta f\|_0 + C_3 \int\limits_{\partial\Omega M} \langle \tilde{v} - v, \nu \rangle \, d\Sigma^{2n-2}. \tag{3.22}$$

Здесь учтено, что при подобном выборе k^+ первое слагаемое в правой части (3.21) становится неположительным и его можно отбросить.

Наконец, рассмотрим последнее слагаемое в правой части (3.22). Вспоминая определение векторного поля $\tilde{v}$ и учитывая, что f обращается в нуль в некоторой окрестности края $\partial\Omega M$, видим, что это слагаемое равно

$$\int\limits_{\partial\Omega M} \langle -v, \nu \rangle \, d\Sigma^{2n-2}. \tag{3.23}$$

Согласно (3.8) в системе координат на TM, ассоциированной с полугеодезической системой координат на M, подынтегральное выражение из (3.23) имеет вид

$$-\langle v, \nu \rangle = L\overset{v}{\nabla} u \equiv \xi_n \overset{h}{\nabla}{}^{\alpha} \overset{v}{\nabla}{}^{i} u \cdot \overset{v}{\nabla}_{\alpha} \overset{v}{\nabla}_{i} u - \xi^{\alpha} \overset{v}{\nabla}{}^{n} \overset{v}{\nabla}{}^{i} u \cdot \overset{h}{\nabla}_{\alpha} \overset{v}{\nabla}_{i} u, \tag{3.24}$$

где суммирование по α ведется от 1 до $n-1$. Вспомнив краевые условия (2.3) и (2.4), видим, что

$$\int\limits_{\partial\Omega M} L\overset{v}{\nabla} u \, d\Sigma^{2n-2} = \int\limits_{\partial_+\Omega M} L(\overset{v}{\nabla} If) \, d\Sigma^{2n-2}. \tag{3.25}$$

В силу (3.24) L является квадратичным дифференциальным оператором первого порядка $L : C^\infty(\beta_m^0 M|_{\partial\Omega M}) \to C^\infty(\partial\Omega M)$. Поэтому из (3.25) следует оценка

$$\left| \int\limits_{\partial\Omega M} L\overset{v}{\nabla} u \, d\Sigma^{2n-2} \right| \le C \|L\overset{v}{\nabla}(If)\|_0 \le C_1 \|\overset{v}{\nabla}(If)\|_1^2 \le C_2 \|If\|_2^2. \tag{3.26}$$

Используя в (3.21) оценку (3.26), убеждаемся, что

$$\|\overset{h}{\nabla}\overset{v}{\nabla} u\|_0^2 \le C\|L\overset{v}{\nabla}(If)\|_0 + C_1\|If\|_1^2 + C_2\|u\|_1\|\delta f\|_0 \le C_3\|If\|_2^2 + C_4\|u\|_k\|\delta f\|_0.$$

Таким образом, доказана оценка (3.3). Неравенство (3.2) вытекает из (3.18). Лемма доказана.

Лемма. *Пусть (M, g) удовлетворяет условиям теоремы* 2.1*, а функция u определена по действительному полю $f \in C_0^\infty(S^m\tau_M')$ равенством* (2.2)*. Тогда при $0 \le r \le k$ справедлива оценка*

$$\|\overset{h}{\nabla}{}^{(r+1)} \overset{v}{\nabla}{}^{(k-r)} u\|_0^2 \le C_1 \|If\|^2_{H^{(k+1)}_{\lambda(k+1,r)}} + C_2 \|u\|_1 \|\delta f\|_r,$$

в которой $\lambda(k+1, r) \equiv ((k+r+1), (k+r), \dots, r)$, а C_1, C_2 — не зависящие от f константы.

Как и в лемме 3.1, ограничимся доказательством случая $k = 1$. Далее отметим сложности, возникающие при переходе к ситуации, когда $k > 1$. Таким образом, нам необходимо рассмотреть лемму лишь при $r = 0$ и $r = 1$. В первом случае ее утверждение следует из леммы 3.1 и неравенства $\|\cdot\|_{H^{(s+1)}} \le \|\cdot\|_{H^{(s+1)}_{\lambda(s,r)}}$, которое, в свою очередь, вытекает из определения весовой нормы и того факта, что $|\langle \xi, \nu \rangle| \le 1$.

Используя коммутационную формулу [3, формула (3.5.12)] для горизонтальных производных, получаем

$$\overset{h}{\nabla}_i\overset{v}{\nabla}_l Hu = \overset{v}{\nabla}_l(\xi^j\overset{h}{\nabla}_i\overset{h}{\nabla}_j u) = \overset{v}{\nabla}_l(\xi^j\overset{h}{\nabla}_j\overset{h}{\nabla}_i u - \xi^j R^p_{qij}\xi^q\overset{v}{\nabla}_p u) = \overset{v}{\nabla}_l H\overset{h}{\nabla}_i u + (Ju)_{il}, \quad (3.27)$$

где $Ju \equiv \overset{v}{\nabla}_l\bigl(-\xi^j R^p_{qij}\xi^q\overset{v}{\nabla}_p u\bigr)$. Из кинетического уравнения (2.6) имеем

$$\overset{h}{\nabla}_i\overset{v}{\nabla}_l Hu = m\nabla_i f_{lj_2\dots j_m}\cdot\xi^{j_2}\dots\xi^{j_m}.$$

Таким образом, (3.27) можно переписать в виде

$$\overset{v}{\nabla}_l H\overset{h}{\nabla}_i u = m\nabla_i f_{lj_2\dots j_m}\cdot\xi^{j_2}\dots\xi^{j_m} - \bigl(Ju\bigr)_{il}. \quad (3.28)$$

Запишем для поля $\overset{h}{\nabla}u$ тождество Пестова:

$$2\langle\overset{h}{\nabla}\overset{h}{\nabla}u, \overset{v}{\nabla}(H\overset{h}{\nabla}u)\rangle = |\overset{h}{\nabla}\overset{h}{\nabla}u|^2 + \overset{h}{\nabla}_i v^i + \overset{v}{\nabla}_i w^i$$
$$- R_{ijql}\xi^i\xi^q\overset{v}{\nabla}{}^j\overset{h}{\nabla}{}^{i_1}u\cdot\overset{v}{\nabla}{}^l\overset{h}{\nabla}_{i_1}u - R^i_{pqj}\xi^q\overset{h}{\nabla}{}^p u\overset{v}{\nabla}{}^j\overset{h}{\nabla}_i u, \quad (3.29)$$

где

$$v^i = \xi^i\overset{h}{\nabla}{}^j\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot\overset{v}{\nabla}_j\overset{h}{\nabla}_l u - \xi^j\overset{v}{\nabla}{}^i\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot\overset{h}{\nabla}_j\overset{h}{\nabla}_l u, \quad w^i = \xi^j\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot\overset{h}{\nabla}_j\overset{h}{\nabla}_l u. \quad (3.30)$$

Отметим, что поле $w(x,\xi)$ положительно однородно степени $3-2m$ по второму аргументу. Заменив второй множитель в левой части (3.29) его выражением (3.28), аналогично тому, как это сделано в (3.10)–(3.12), получим

$$2\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{h}{\nabla}{}^l u\overset{v}{\nabla}_i(H\overset{h}{\nabla}u)_l = 2m\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot\nabla_l f_{ij_2\dots j_m}\cdot\xi^{j_2}\dots\xi^{j_m} - 2\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot(Ju)_{il}$$
$$= 2m\overset{h}{\nabla}{}^i(\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot\nabla_l f_{ij_2\dots j_m}\cdot\xi^{j_2}\dots\xi^{j_m}) - 2m\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot\overset{h}{\nabla}{}^i\nabla_l f_{ij_2\dots j_m}\cdot\xi^{j_2}\dots\xi^{j_m} - 2\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot(Ju)_{li}$$
$$= \overset{h}{\nabla}_i\tilde{v}^i - 2m\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot\nabla_l(\delta f)_{j_2\dots j_m}\cdot\xi^{j2}\dots\xi^{j_m} - 2\overset{h}{\nabla}{}^i\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot(Ju)_{li}, \quad (3.31)$$

где

$$\tilde{v}^i = 2m\overset{h}{\nabla}{}^l u\cdot g^{ij}\nabla_l f_{jj_2\dots j_m}\cdot\xi^{j_2}\dots\xi^{j_m}. \quad (3.32)$$

С учетом (1.3), кинетического уравнения (2.6) и определения J можно написать оценку

$$\|Ju\|_0^2 \le C_1\|If\|^2_{H^{(2)}_{\lambda(2,0)}} + C_2\|u\|_1\|\delta f\|_1 \le C_1\|If\|^2_{H^{(2)}_{\lambda(2,1)}} + C_2\|u\|_1\|\delta f\|_1.$$

Далее, согласно (1.3) имеем

$$\|R_{ijkl}\xi^i\xi^k\overset{v}{\nabla}{}^j\overset{h}{\nabla}{}^q u\cdot\overset{v}{\nabla}{}^l\overset{h}{\nabla}_q u\|_0 \le C\|\overset{v}{\nabla}\overset{h}{\nabla}u\|_0^2 \le C_1\|If\|^2_{H^{(2)}_{\lambda(2,1)}} + C_2\|u\|_1\|\delta f\|_1. \quad (3.33)$$

Затем, действуя аналогично (3.13)–(3.20), с учетом (3.32)–(3.33) получим из (3.31) неравенство

$$\int\limits_{\Omega M}(|\overset{h}{\nabla}\overset{h}{\nabla}u|^2 - \varepsilon|\overset{h}{\nabla}\overset{h}{\nabla}u|^2)\,d\Sigma \le -(n+2m-2)\int\limits_{\Omega M}|H\overset{h}{\nabla}u|^2\,d\Sigma$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon}\|If\|^2_{H^{(2)}_{\lambda(2,1)}} + C\|u\|_1\|\delta f\|_1 + \int\limits_{\partial\Omega M}\langle\tilde{v}-v,\nu\rangle\,d\Sigma^{2n-2}, \quad (3.34)$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина. Отбрасывая первое неположительное слагаемое правой части (3.34), приходим к неравенству

$$(1-\varepsilon)\int\limits_{\Omega M}|\overset{h}{\nabla}\overset{h}{\nabla}u|^2\,d\Sigma \le \frac{C}{\varepsilon}\|If\|^2_{H^{(2)}_{\lambda(2,1)}}+C_1\|u\|_1\|\delta f\|_1+\int\limits_{\partial\Omega M}\langle\tilde{v}-v,\nu\rangle\,d\Sigma^{2n-2}. \quad (3.35)$$

Теперь займемся интегралом в правой части (3.35). Как и при доказательстве леммы 3.1, видим, что он равен $(-\int\limits_{\partial\Omega M}\langle v,\nu\rangle\,d\Sigma^{2n-2})$. Введем в окрестности точки $x_0\in\partial M$ полугеодезическую систему координат $(x^1,\dots,x^n)$ так, что x^n совпадает с расстоянием от x до ∂M. Тогда в области действия ассоциированной системы координат, как следует из (3.30), справедливо равенство

$$-\langle v,\nu\rangle = v_n = L\overset{h}{\nabla}u \equiv \xi^n\overset{h}{\nabla}{}^\alpha\overset{h}{\nabla}{}^i u\cdot\overset{v}{\nabla}_\alpha\overset{h}{\nabla}_i u-\xi^\alpha\overset{v}{\nabla}{}^n\overset{h}{\nabla}{}^i u\cdot\overset{h}{\nabla}_\alpha\overset{h}{\nabla}_i u, \quad (3.36)$$

где суммирование по α ведется от 1 до $n-1$. В последнем равенстве также использован тот факт, что в нашей системе координат $g_{in}=\delta_{in}$. Из (3.36) вытекает неравенство

$$|L\overset{h}{\nabla}u|\le C_1\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}|\overset{h}{\nabla}_\alpha\overset{h}{\nabla}_i u|^2+C_2\sum_{i,j=1}^{n}|\overset{v}{\nabla}_i\overset{h}{\nabla}_j u|^2. \quad (3.37)$$

Отметим, что среди слагаемых в правой части (3.37) есть компоненты нормальных производных, выводящих из многообразия $\partial_+\Omega M$. Все же подобные слагаемые возможно оценить через производные в терминах $\partial_+\Omega M$. А именно, справедлива

Лемма 3.3. *Для любых $s,t\in\mathbb{N}$ в некоторой окрестности $\partial_+\Omega M$ в вышеуказанной системе координат имеет место неравенство*

$$|\overset{h}{\nabla}{}^{(s)}_{i_1\dots i_s}\overset{v}{\nabla}{}^{(t)}_{i_1\dots i_t}u|^2\le C\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{t_1=0}^{t}\frac{|u|^2_{(t_1+s_1)}}{|\xi^n|^{2h}},$$

где $i_j=1,\dots,n$, $j=1,\dots,(s+t)$ и

$$|u(x,\xi)|^2_r\equiv\sum_{l+m\le r}\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_l=1}^{n-1}\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n}\left|\frac{\partial^l}{\partial x^{\alpha_1}\dots\partial x^{\alpha_l}}\frac{\partial^m}{\partial\xi^{j_1}\dots\partial\xi^{j_m}}u(x,\xi)\right|^2;$$

$$h\equiv h(s,t,s_1,t_1,i_1,\dots,i_s)=(s+t)-(s_1+t_1)+\sum_{r=1}^{s}\delta^n_{i_r}.$$

Мы не будем доказывать здесь эту лемму в силу излишней громоздкости выкладок. Наметим лишь основную идею доказательства. Она заключается в том, что в некоторой окрестности $\partial_+\Omega M$ нормальные производные функции u выражаются через касательные производные. Действительно, в некоторой окрестности ∂M поле f равняется нулю. Следовательно, $Hu=\xi_n\overset{h}{\nabla}{}^n u+\xi_\alpha\overset{h}{\nabla}{}^\alpha u=0$ при (x,ξ) принадлежащих некоторой окрестности $\partial_+\Omega M$. Таким образом,

$$\overset{h}{\nabla}{}^n u=-\frac{1}{\xi^n}\xi_\alpha\overset{h}{\nabla}{}^\alpha u,$$

что и нужно было показать. Для производных высшего порядка идея аналогична, но ее реализация, как уже отмечалось, довольно громоздка.

Поскольку $u|_{\partial_+\Omega M} = If$, согласно лемме 3.3 неравенство (3.37) можно переписать следующим образом:

$$|L\overset{h}{\nabla}u| \leq C \sum_{s_1=0}^{2} \sum_{t_1=0}^{2} \frac{|If|^2_{(t_1+s_1)}}{|\xi^n|^{2(3-s_1-t_1)}}. \tag{3.38}$$

Из того факта, что в нашей системе координат $\xi_n = \langle \xi, \nu \rangle$ и $If \in H^2_{\lambda(2,1)}$, следует интегрируемость правой части неравенства (3.38). Тем самым из (3.35) получаем оценку

$$(1-\varepsilon)\|\overset{h}{\nabla}\overset{h}{\nabla}u\|^2_{L_2(\Omega M)} \leq \frac{C}{\varepsilon}\|If\|^2_{H^{(2)}_{\lambda(2,1)}} + C_1 m\|u\|_1\|\delta f\|_1,$$

откуда, подобрав соответствующим образом ε, приходим к утверждению леммы 3.2.

Из лемм 3.1, 3.2 и включения (1.3) следует неравенство

$$\|u\|_1^2 \leq C_1\|If\|^2_{H^1_\lambda} + C_2 m\|u\|_0\|\delta f\|_0, \tag{3.39}$$

где определение λ дано в формулировке теоремы 2.1.

Используя неравенство Коши — Буняковского и применяя (3.1), выводим из (3.39) оценку

$$\|u\|_1 \leq C_1\big(\|If\|_{H^1_\lambda} + \|\delta f\|_0\big),$$

которая и завершает доказательство леммы 2.2 (а с ней и основной теоремы).

Отметим еще раз, что мы проводили доказательства всех лемм в этом пункте лишь для $k = 1$. Для случая $k > 1$ доказательство становится значительно более громоздким за счет появления в неравенствах новых слагаемых, требующих оценки. Все эти слагаемые обязаны своим появлением некоммутативности горизонтальных производных и более сложным видом тождества Пестова в случае $k > 1$. В то же время несложно убедиться, что новые члены — это дифференциальные операторы, действующие на функцию u, причем их порядок не выше $k-1$. Поэтому все они оцениваются по предположению индукции и принципиально доказательство не усложняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
2. *Мухометов Р. Г.* О задаче интегральной геометрии // Математические проблемы геофизики. Новосибирск, 1975. Т. 6. С. 212–252.
3. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
4. *Шарафутдинов В. А.* Модифицированная горизонтальная производная и некоторые ее применения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 3. С. 664–700.
5. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
6. *Kadlec J., Kufner A.* Characterization of functions with zero traces by integrals with weight functions // Časopis Pro Pěstování Matematiky. 1966. V. 91. P. 463–471.

Статья поступила 16 сентября 1997 г.

г. Новосибирск