Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.958

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БЕКЛУНДА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ $(2+1)$–МЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Е. И. Ганжа

Аннотация: Положительно решен вопрос о локальной плотности решений, получаемых преобразованиями Мутара и Рибокура — преобразований Беклунда некоторых интегрируемых (2+1)-мерных нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными геометрического происхождения. Библиогр. 8.

В теории вполне интегрируемых нелинейных систем уравнений с частными производными преобразования Беклунда служат одним из способов построения больших семейств точных решений. Первые примеры преобразований Беклунда были найдены в прошлом веке в дифференциальной геометрии (см. [1–3]) для задач, описываемых (на современном языке) (1+1)-мерными и (2+1)-мерными интегрируемыми уравнениями. В данной работе мы исследуем два примера подобных (2+1)-мерных преобразований Беклунда геометрического происхождения: преобразования Мутара и Рибокура. Соответствующее уравнение Мутара

$$u_{xy} = M(x,y)u, \quad u = u(x,y), \tag{1}$$

возникшее впервые в классической дифференциальной геометрии конца XIX в. (см. [1, 3]), имеет в настоящее время многочисленные приложения в теории интегрируемых (2+1)-мерных нелинейных систем уравнений в частных производных математической физики. Другая форма записи (1): $u_{tt}-u_{zz} = M(x,y)u$, и аналогичное эллиптическое уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = M(x,y)u \tag{2}$$

(двумерное уравнение Шредингера) вскрывают роль (1) в математической физике. В рамках классической дифференциальной геометрии (1) играло ключевую роль в изучении центральных задач дифференциальной геометрии того времени — теории изгибания поверхностей, теории конгруэнций, теории сопряженных сетей. В современной теории солитонов (1) применяется для нахождения решений уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили, Новикова — Веселова и др. [4, 5].

Уравнения, описывающие криволинейные ортогональные системы координат в трехмерном евклидовом пространстве, могут быть записаны в следующем виде (см. [2]):

$$\frac{\partial\beta}{\partial x_0} = \lambda^2\frac{\partial\alpha}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial x_1} = -\lambda^2\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial(\alpha+\beta)}{\partial x_2} = (\beta-\alpha)\frac{\partial\log\lambda}{\partial x_2}. \tag{3}$$

Теория таких систем координат в настоящее время интенсивно используется в теории интегрируемых систем гидродинамического типа (см. [6]).

Для обеих систем известны преобразования Беклунда, позволяющие, исходя из некоторого простого решения u_0, построить цепочку преобразований Беклунда $u_0 \to u_1 \to \ldots \to u_k \to \ldots$. На каждом шаге полученное решение зависит (априори) от все бо́льшего количества функций одного переменного — начальных данных для построения преобразованных решений. Вопрос о том, насколько широк получающийся набор решений u_k (по сравнению с множеством всех решений данной (2+1)-мерной системы), оставался открытым. В теории $(1+1)$-мерных интегрируемых уравнений аналогичный вопрос о плотности семейства «конечнозонных» (одномерных) потенциалов в множестве почти периодических потенциалов одномерного стационарного уравнения Шредингера решен положительно.

В настоящей работе мы положительно решаем вопрос о (локальной) плотности решений, получающихся из произвольного заданного начального решения, в пространстве всех гладких решений уравнений (1), (3). Доказано, что классические преобразования Мутара и Рибокура позволяют получить «почти всякое» их решение, точнее множество решений, полученных из данного «затравочного» решения N преобразованиями Мутара или Рибокура для (1) и (3) соответственно, плотно в пространстве k-джетов при достаточно больших N.

Это позволяет считать системы уравнений, описывающие триортогональные криволинейные системы координат (в частности, уравнение (11)), вполне интегрируемыми $(2+1)$-мерными нелинейными системами, а найденные в [4, 7] семейства решений соответствующих $(2+1)$-мерных интегрируемых уравнений в определенном смысле образуют «мощный» запас их решений.

Рассмотрим вначале более простой случай преобразования Мутара, позволяющего по двум решениям $u = R(x,y)$ и $u = \varphi(x,y)$ уравнения (1) с данным «потенциалом» $M = M_0(x,y)$ находить (квадратурой) решение ϑ того же уравнения с измененным потенциалом $M_1(x,y) = M_0 - 2(\ln R)_{xy}$. Соответствующие формулы перехода

$$M_1 = M_0 - 2(\ln R)_{xy} = -M_0 + \frac{2R_xR_y}{R^2} = R\left(\frac{1}{R}\right)_{xy}, \tag{4}$$

$$(R\vartheta)_x = -R^2\left(\frac{\varphi}{R}\right)_x, \quad (R\vartheta)_y = R^2\left(\frac{\varphi}{R}\right)_y \tag{5}$$

(и их аналоги для (2), см. [3, 4]) устанавливают (многозначное) соответствие между решениями уравнения Мутара (M_0) (т. е. (1) с потенциалом $M_0(x,y)$) и (M_1) (т. е. (1) с потенциалом $M_1(x,y)$). При этом $R_1 = \frac{1}{R}$ является решением (M_1).

Мы можем формально считать, что (4) задают преобразования Беклунда (посредством R) для «решения» $M(x,y)$ «пустого уравнения». Система (5) при этом представляет собой аналог теоремы суперпозиции преобразований Беклунда, широко известной для (1+1)-мерных систем. Необходимость квадратуры в принципе суперпозиции преобразований Беклунда (2+1)-мерных систем исследовалась в [8]. Нам необходимо доказать, что цепочкой преобразований Мутара можно приблизить (локально) любую функцию двух переменных.

В цепочке преобразований Мутара $(M_0) \to (M_1) \to (M_2) \to \ldots \to (M_k) \to \ldots$ мы получаем, что (априори) k-й потенциал M_k зависит от выбора $2k$ функций одного переменного — начальных данных решений $R_s(x,y)$ уравнений (M_s), $s = 0, 1, \ldots, k-1$.

Теорема 1. *Пусть задан произвольный начальный потенциал $M_0(x,y)$, принадлежащий классу C^∞ в окрестности точки $(0,0)$. Тогда для любого $N = 0,1,2,\dots$ найдется такое K, что для любого набора чисел $P_{x_1\dots x_k}$, $0 \le k \le N$, $x_s \in \{x,y\}$, производные потенциала M_K (из последовательности преобразований Мутара $(M_0) \to (M_1) \to (M_2) \to \dots \to (M_K)$) в точке $(0,0)$ совпадают с $P_{x_1\dots x_k}$:*

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}\dots\partial_{x_k} M_K(0,0) = P_{x_1\dots x_k}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad k \le N. \tag{6}$$

Доказательство будем вести по индукции. При $N = 0$ выберем $K = 1$; из (4) следует, что

$$M_1(0,0) = -M_0(0,0) + 2\frac{R_x R_y}{R^2}\bigg|_{(0,0)},$$

где R — решение (M_0). Как известно (см., например, [1]), начальные данные для R, определяющие его, могут быть выбраны следующим образом: (а) $\varphi(x) = R(x,0)$, (б) $\psi(y) = R(0,y)$ $(\varphi(0) = \psi(0))$ в окрестности нуля (задача Гурса). Тем самым можно считать величины $R(0,0)$, $R_x(0,0)$, $R_{xx}(0,0)$, $\dots$, $R_y(0,0)$, $R_{yy}(0,0)$, $\dots$ независимыми. Положим $R(0,0) = 1$, $R_y(0,0) = 1/2$. Изменяя $R_x(0,0)$, мы можем сделать $M_1(0,0)$ равным заданному числу P, что и доказывает теорему в случае $N = 0$. Кроме того, если мы предположим, что все остальные несмешанные производные $\partial_x^k R$, $\partial_y^k R$, $k > 1$, равны 0, то все старшие производные $\partial_x^m \partial_y^n M_1$ не произвольны и полностью определяются значением $P = M_1(0,0)$ (при заданном $M_0(x,y)$). Таким образом, мы доказали при $N = N_0 = 0$ следующее индукционное утверждение: *при $N = N_0$ найдется такое K, что соответствующие производные $\partial_x^m \partial_y^n M_K$ подходящим образом построенного M_K в точке $(0,0)$ совпадают с заданными числами $P_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}}$ при $m+n \le N_0$, а каждая старшая производная $\partial_x^m \partial_y^n M_K$, $m+n > N_0$, зависит (при фиксированном $M_0(x,y)$) лишь от $P_{\underbrace{x\dots x}_{p}\underbrace{y\dots y}_{q}} = \partial_x^p \partial_y^q M_K(0,0)$ при $p+q \le N_0$, $p \le m$.*

Шаг индукции. Предполагая, что индукционное утверждение доказано для производных в нуле порядка не выше $N = N_0$, докажем его для $N = N_0+1$. Пусть K_0 — соответствующий $N = N_0$ номер потенциала M_{K_0}, для которого все производные в нуле до порядка $\le N_0$ могут быть сделаны произвольными. Сделав еще N_0+2 преобразований Мутара, получим M_P, $P = K_0 + N_0 + 2$; проверим утверждение индукционного предположения для этой функции. Из (4) имеем

$$M_P = (-1)^{N_0}\left(M_{K_0} - \frac{2R_x^{(0)}R_y^{(0)}}{(R^{(0)})^2} + \frac{2R_x^{(1)}R_y^{(1)}}{(R^{(1)})^2} - \dots \pm \frac{2R_x^{(N_0+1)}R_y^{(N_0+1)}}{(R^{(N_0+1)})^2}\right),$$

где $R^{(s)}$ — решение уравнения (M_{K_0+s}), $s = 0,\dots,N_0+1$. Назовем для функции $R^{(s)}$ *главной* ее производную $\partial_x^{s+1}R^{(s)}$ по x порядка $s+1$ в нуле и *вспомогательной* ее производную $\partial_y^{N_0+2-s}R^{(s)}$ по y порядка N_0+2-s в нуле. Положим, что в точке $(0,0)$ значения всех $R^{(s)}$ равны 1, а их вспомогательных производных — $1/2$, значения главных производных (пока) не определены, все прочие несмешанные производные $R^{(s)}_{x\dots x}$, $\dots$, $R^{(s)}_{y\dots y}$, $\dots$ всех порядков положим равными 0 в этой точке. Рассмотрим производную

$$\frac{\partial^{N_0+1}M_P}{\partial y^{N_0+1}} = (-1)^{N_0}\Big(\frac{\partial^{N_0+1}M_{K_0}}{\partial y^{N_0+1}} - \frac{2R_x^{(0)}\partial_y^{N_0+2}R^{(0)}}{(R^{(0)})^2}$$
$$+\dots\pm\frac{2R_x^{(N_0+1)}\partial_y^{N_0+2}R^{(N_0+1)}}{(R^{(N_0+1)})^2}\Big) + F(R^{(s)}, R_x^{(s)}, \partial_y^k R^{(s)}, M_{K_0+s}, \partial_y^m M_{K_0+s}) \quad (7)$$

(в точке $(0,0)$), где в F собраны все члены, кроме указанных в скобках, т. е. кроме включающих в числителе произведения одной производной $R^{(0)}$ по x и одной производной $R^{(0)}$ по y суммарного порядка N_0+3. Смешанные производные типа $R_{xy}^{(s)}$ исключены в силу (1). Очевидно, что единственная главная (пока неопределенная) производная $R_x^{(0)}$ в членах, включенных в F, имеет нулевой коэффициент.

Покажем дополнительной индукцией по k, что встречающиеся в F значения M_{K_0+s} и их производных по y (они имеют порядок $\le N_0$) в нуле определяются однозначно требованиями $\partial_y^k M_P = P_{\underbrace{y\dots y}_{k}}$, $k=0,1,\dots,N_0$. Действительно, при $k=k_0=0$ имеем

$$P = M_P|_{(0,0)} = (-1)^{N_0}\left(M_{K_0} - \frac{2R_x^{(0)}R_y^{(0)}}{(R^{(0)})^2} + \dots \pm \frac{2R_x^{(N_0+1)}R_y^{(N_0+1)}}{(R^{(N_0+1)})^2}\right)\Big|_{(0,0)},$$

где все производные $R^{(s)}$, кроме $R_x^{(0)}$, не главные, т. е. определены. Так как при главной производной $R_x^{(0)}$ стоит нулевой коэффициент $R_y^{(0)}$, то $M_{K_0}(0,0)$ тем самым определена. Значения M_{K_0+s} находятся из равенства

$$M_{K_0+s} = (-1)^s\left(M_{K_0} - \frac{2R_x^{(0)}R_y^{(0)}}{(R^{(0)})^2} + \dots \pm \frac{2R_x^{(s-1)}R_y^{(s-1)}}{(R^{(s-1)})^2}\right). \quad (8)$$

При $k=k_0+1\le N_0$ (шаг индукции)

$$P_{\underbrace{y\dots y}_{k_0+1}} = \partial_y^{k_0+1}M_P = (-1)^{N_0}\left(\partial_y^{k_0+1}M_{K_0} - \sum_{s=0}^{N_0+1}(-1)^s\frac{2R_x^{(s)}\partial_y^{k_0+2}R^{(s)}}{(R^{(s)})^2}\right)$$
$$+ F(R^{(q)}, R_x^{(q)}, \partial_y^k R^{(q)}, M_{K_0+q}, \partial_y^m M_{K_0+q}),$$

где вновь единственная главная производная $R_x^{(0)}$ имеет всюду нулевой коэффициент (так как $k_0+1\le N_0$) и присутствующие производные $\partial_y^m M_{K_0+q}$ имеют порядки $m\le k_0$, т. е. уже определены. Производные $\partial_y^{k_0+1}M_{K_0+q}$ находим, дифференцируя (8). Тем самым дополнительная индукция завершена.

Поскольку по предположению основной индукции мы действительно можем выбрать $\partial_y^m M_{K_0}$, $0\le m\le N_0$, произвольно, положим их в формуле (7) равными определенным выше значениям. Среди неопределенных величин в (7) присутствует лишь главная производная $R_x^{(0)}$ с коэффициентом $\frac{2\partial_y^{N_0+2}R^{(0)}}{(R^{(0)})^2}=1$. Выбирая подходящее значение $R_x^{(0)}$, мы можем добиться требуемого равенства $P_{\underbrace{y\dots y}_{N_0+1}} = \partial_y^{N_0+1}M_P$ при произвольном $\partial_y^{N_0+1}M_{K_0}$. Поскольку в силу индукционного утверждения $\partial_y^{N_0+1}M_{K_0}$ зависит лишь от $\partial_y^m M_{K_0}$, $m\le N_0$, выбранное $R_x^{(0)}$

зависит только от $\partial_y^m M_{K_0}$, $m \le N_0$, и $P_{\underbrace{y\ldots y}_{N_0+1}} = \partial_y^{N_0+1} M_P$. Следовательно, рассматривая все $\partial_y^m M_P$ порядков $m > N_0+1$, заключаем, что они зависят лишь от указанных величин $P_{\underbrace{y\ldots y}_{m}}$, $m \le N_0+1$.

Доказательство возможности добиться равенств

$$P_{\underbrace{x\ldots x}_{n}\underbrace{y\ldots y}_{N_0+1-n}} = \partial_x^n \partial_y^{N_0+1-n} M_P, \quad n \le N_0+1,$$

проведем вспомогательной индукцией по n. Случай $n=0$ разобран выше. Предположим, что при $n \le n_0$ мы уже доказали следующие утверждения:

(а) главные производные $R_x^{(0)}$, $R_{xx}^{(1)}$, $\ldots$, $R^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n+1}}$, уже выбраны так, что соответствующие требуемые равенства

$$P_{\underbrace{x\ldots x}_{k}\underbrace{y\ldots y}_{N_0+1-k}} = \partial_x^k \partial_y^{N_0+1-k} M_P, \quad k \le n,$$

достигнуты;

(б) в выражении

$$\partial_x^k \partial_y^{N_0+1-k} M_P = (-1)^{N_0} \Bigg(\partial_x^k \partial_y^{N_0+1-k} M_{K_0} - \sum_{s=0}^{N_0+1} (-1)^s \frac{2\partial_x^{k+1} R^{(s)} \partial_y^{N_0+2-k} R^{(s)}}{(R^{(s)})^2} + F(R^{(q)}, \partial_x^m R^{(q)}, \partial_y^k R^{(q)}, M_{K_0+q}, \partial_x^r \partial_y^m M_{K_0+q}) \Bigg) \tag{9}$$

при $k \le n$ в слагаемых, собранных в остатке F, присутствуют с ненулевыми коэффициентами лишь уже определенные на предыдущих шагах вспомогательной индукции главные производные и производные $\partial_x^r \partial_y^m M_{K_0+q}$ с $r \le n$, $m+r \le N_0$, $K_0+q < P$;

(в) все старшие производные $\partial_x^m \partial_y^k M_P$, $m+k > N_0+1$, $m \le n$, и уже определенные главные производные $\partial_x^{s+1} R^{(s)}$, $s \le n$, зависят (по построению M_P) лишь от выбора $P_{\underbrace{x\ldots x}_{p}\underbrace{y\ldots y}_{q}}$, $p+q \le N_0+1$, $p \le m$.

Чтобы проделать шаг вспомогательной индукции, рассмотрим (9) при $n = n_0+1$. Тогда в остаток F будут входить (с ненулевыми коэффициентами) уже определенные главные производные $R^{(s)}$, а также $\partial_x^r \partial_y^m M_{K_0+q}$ с $r \le n_0+1$, $m+r \le N_0$, из которых пока неизвестны $\partial_x^{n_0+1} \partial_y^m M_{K_0+q}$.

Проведем еще одну вложенную индукцию по m, чтобы показать, что эти производные определяются из требуемых равенств

$$P_{\underbrace{x\ldots x}_{n_0+1}\underbrace{y\ldots y}_{N-n_0-1}} = \partial_x^{n_0+1} \partial_y^{N-n_0-1} M_P, \quad N \le N_0.$$

Действительно, при $m=0$ в

$$\partial_x^{n_0+1} M_P = (-1)^{N_0} \left(\partial_x^{n_0+1} M_{K_0} - \sum_{s=0}^{N_0+1} (-1)^s \frac{2\partial_x^{n_0+2} R^{(s)} R_y^{(s)}}{(R^{(s)})^2} \right) + F \tag{10}$$

($n_0+1 \le N_0$) входят с ненулевыми коэффициентами лишь уже известные величины, кроме $\partial_x^{n_0+1} M_{K_0}$, которую мы можем считать выбранной так, что требуемое $P_{\underbrace{x\ldots x}_{n_0+1}} = \partial_x^{n_0+1} M_P|_{(0,0)}$ выполнено. Дифференцируя (8), находим $\partial_x^{n_0+1} M_{K_0+q}|_{(0,0)}$, $K_0+q<P$, новой индукцией по q. Шаг вложенной индукции проводим, как и ранее, применив к (10) оператор ∂_y^m. Как и выше, по основному индукционному утверждению (выполненному для M_{K_0}) $\partial_x^{n_0+1}\partial_y^{N_0-n_0}M_{K_0}$ зависят лишь от $\partial_x^n\partial_y^m M_{K_0}$, $m+n\le N_0$, $n\le n_0+1$, что в силу (9) влечет ту же зависимость главной производной $\partial_x^{n_0+2}R^{n_0+1}$, откуда легко выводим справедливость указанных выше пп. (а)–(в) для $n=n_0+1$.

В ходе проделанной вспомогательной индукции по n мы показали, что можно последовательно присвоить определенные значения главным производным $R_x^{(0)}$, $R_{xx}^{(1)}$, $\ldots$, $\partial_x^{N_0+2}R^{(N_0+1)}$ так, чтобы выполнялись требуемые равенства (6) при $N=N_0+1$, причем (6) будет выполнено и при $N\le N_0$ за счет подходящего выбора $\partial_x^m\partial_y^r M_{K_0}$, $m+r\le N_0$, что возможно в силу предположения индукции; при этом старшие производные $\partial_x^m\partial_y^r M_P$, $m+r>N_0+1$, зависят лишь от указанных в индукционном предположении младших производных. Тем самым основное индукционное утверждение, а с ним и теорема 1 доказаны.

Обратимся к рассмотрению преобразований Беклунда системы (3). Если $\lambda(x_0,x_1,x_2)$ — заданная функция, то (3) представляет собой *линейную* систему относительно неизвестных функций $\alpha(x_0,x_1,x_2)$, $\beta(x_0,x_1,x_2)$. Условия ее совместности, получаемые последовательным исключением α и β, сводятся к одному уравнению на функцию $M=\log\lambda$ (которую в дальнейшем будем именовать «потенциалом»):

$$\frac{\partial^3 M}{\partial x_0\partial x_1\partial x_2}=\operatorname{cth}(M)\frac{\partial M}{\partial x_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x_1\partial x_2}+\operatorname{th}(M)\frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{\partial^2 M}{\partial x_0\partial x_2}. \tag{11}$$

Замечательное свойство системы (3) состоит (как отмечает Дарбу [2]) в том, что по двум ее решениям $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\bar\alpha,\bar\beta\}$ при заданном потенциале $M(x_0,x_1,x_2)$ можно получить квадратурой решение $\{\bar\alpha_1,\bar\beta_1\}$ системы (3) с измененным потенциалом. Соответствующие формулы перехода таковы:

$$M_1=-M_0+\ln(\beta/\alpha), \tag{12}$$

$$\bar\alpha_1=\bar\alpha-\frac{\xi}{\beta},\quad \bar\beta_1=\bar\beta-\frac{\xi}{\alpha}, \tag{13}$$

где $\xi(\bar\alpha,\bar\beta,x_2)$ — выражение, получаемое квадратурой из полной совместной системы

$$\frac{\partial\xi}{\partial\bar\alpha}=\beta,\quad \frac{\partial\xi}{\partial\bar\beta}=\alpha,\quad \frac{\partial\xi}{\partial x_2}=-\frac{(\bar\alpha+\bar\beta)^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\bar\alpha-\bar\beta}\right), \tag{14}$$

в которой полагаем, что α, β выражены как функции от $\bar\alpha$, $\bar\beta$, x_2. Отметим, что $\alpha_1=1/\bar\beta$, $\beta_1=1/\bar\alpha$ также решения (M_1) (так мы в дальнейшем будем обозначать систему (3) с потенциалом M_1), а $\xi_1=-\frac{\xi}{\alpha\beta}$ — соответствующее α_1, β_1, $\bar\alpha_1$, $\bar\beta_1$ решение (14). Преобразование (12) в указанном выше виде представлено Дарбу в его монографии по теории криволинейных ортогональных систем координат [2]. Как показано Дарбу [2], формулы (12), (13) соответствуют преобразованию ортогональной системы координат в трехмерном евклидовом пространстве, отвечающей паре решений $\{\alpha,\beta\}$, $\{\bar\alpha,\bar\beta\}$, с помощью инверсии. Изменению второго решения $\{\bar\alpha,\bar\beta\}$ соответствует преобразование Комбескюра ортогональной системы координат; композиции инверсии и преобразования

Комбескюра эквивалентны преобразованиям Рибокура. Поэтому преобразования (12), (13) мы будем в дальнейшем именовать преобразованиями Рибокура — Дарбу.

Предположим, что начиная с некоторого потенциала $M_0(x_0, x_1, x_2)$, для которого мы можем построить все решения системы (3) (например, начиная с $M_0 = \mathrm{const}$), мы построим цепочку преобразований Рибокура — Дарбу $(M_0) \to (M_1) \to (M_2) \to \ldots \to (M_k) \to \ldots$. На k-м шаге получаем потенциал, зависящий (априори) от выбора $3k$ функций одного переменного — начальных данных решений (α_s, β_s) уравнений (M_s), $s = 0, \ldots, k-1$. Действительно, положив $u = \log(\beta/\alpha)$, имеем $M_{s+1} = -M_s + u$, где уравнения, определяющие u, получаются исключением α из (3) с $\beta = \alpha \exp(u)$:

$$\begin{aligned}
\partial_0\partial_1 u &= -\frac{e^{4M}+e^{2u}}{e^{4M}-e^{2u}}\partial_1 u\partial_0 u + \frac{e^{2M}-e^{u}}{e^{2M}+e^{u}}\partial_1 u\partial_0 M + \frac{e^{2M}+e^{u}}{e^{2M}-e^{u}}\partial_0 u\partial_1 M,\\
\partial_0\partial_2 u &= \frac{(e^{2M}-e^{u})(e^{u}-1)}{e^{u}(e^{2M}+1)}\partial_0\partial_2 M + \frac{2(e^{2M}+e^{2u})}{(e^{2M}-e^{u})(e^{u}+1)}\partial_0 u\partial_2 M\\
&\qquad - \frac{(e^{2M}+e^{2u})}{(e^{2M}-e^{u})(e^{u}+1)}\partial_0 u\partial_2 u,\\
\partial_1\partial_2 u &= \frac{(e^{2M}+e^{u})(e^{u}-1)}{e^{u}(e^{2M}-1)}\partial_1\partial_2 M + \frac{2(e^{2M}-e^{2u})}{(e^{2M}+e^{u})(e^{u}+1)}\partial_1 u\partial_2 M\\
&\qquad - \frac{(e^{2M}-e^{2u})}{(e^{2M}+e^{u})(e^{u}+1)}\partial_1 u\partial_2 u,
\end{aligned} \tag{15}$$

$\partial_i = \partial/\partial x_i$. Как легко проверить, уравнения (11) являются необходимыми и достаточными условиями совместности (15). Из известной теоремы Дарбу [2, с. 335] вытекает, что при задании в окрестности точки $\bigl(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\bigr)$ начальных значений $\varphi_0(x_0) = u\bigl(x_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\bigr)$, $\varphi_1(x_1) = u\bigl(x_0^{(0)}, x_1, x_2^{(0)}\bigr)$, $\varphi_2(x_2) = u\bigl(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2\bigr)$ — непрерывно дифференцируемых функций — существует и единственно решение (15) с этими начальными данными.

Как показано в работе [8], квадратуры, необходимые для выполнения каждого шага, можно исключить начиная с (M_2) («формула куба»).

В силу теоремы Дарбу [2, с. 335] начальными данными для (11) являются значения

$$\Phi^{(0,1)}(x_0, x_1) = M(x_0, x_1, 0), \quad \Phi^{(0,2)}(x_0, x_2) = M(x_0, 0, x_2),$$
$$\Phi^{(1,2)}(x_1, x_2) = M(0, x_1, x_2)$$

в окрестности начальной точки $\bigl(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\bigr) = (0,0,0)$.

Теорема 2. *Пусть задан произвольный начальный «потенциал» $M_0(x_0, x_1, x_2)$, т. е. решение уравнения (11), принадлежащее классу C^∞ в окрестности точки $(0,0,0)$. Тогда для любого $N = 0, 1, 2, \ldots$ найдется такое K, что для любых трех наборов чисел*

$$P^{(0,1)}_{z_1\ldots z_k},\ P^{(0,2)}_{t_1\ldots t_k},\ P^{(1,2)}_{r_1\ldots r_k}, \quad z_i \in \{x_0, x_1\},\ t_i \in \{x_0, x_2\},\ r_i \in \{x_1, x_2\},\ 0 \le k \le N,$$

соответствующие производные потенциала M_k из последовательности преобразований Рибокура — Дарбу совпадают с заданными числами $P^{(i,j)}_{\ldots}$:

$$\partial_0^p\partial_1^q M_K\Big|_{(0,0,0)} = P^{(0,1)}_{x_0^p x_1^q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} P^{(0,1)}_{\underbrace{x_0\ldots x_0}_{p}\underbrace{x_1\ldots x_1}_{q}}, \tag{16}$$

$$\partial_0^p\partial_2^q M_K|_{(0,0,0)} = P^{(0,2)}_{x_0^p x_2^q} \overset{\text{def}}{=} P^{(0,2)}_{\underbrace{x_0\ldots x_0}_{p}\underbrace{x_2\ldots x_2}_{q}}, \tag{17}$$

$$\partial_1^p\partial_2^q M_K|_{(0,0,0)} = P^{(1,2)}_{x_1^p x_2^q} \overset{\text{def}}{=} P^{(1,2)}_{\underbrace{x_1\ldots x_1}_{p}\underbrace{x_2\ldots x_2}_{q}}. \tag{18}$$

Разумеется, мы полагаем

$$P \overset{\text{def}}{=} P^{(0,1)} = P^{(0,2)} = P^{(1,2)} = M_K(0,0,0),$$

$$P^{(0)}_{x_0^i} \overset{\text{def}}{=} P^{(0,1)}_{x_0^i} = P^{(0,2)}_{x_0^i} = \partial_0^i M_K(0,0,0),$$

$$P^{(1)}_{x_1^i} \overset{\text{def}}{=} P^{(0,1)}_{x_1^i} = P^{(1,2)}_{x_1^i} = \partial_1^i M_K(0,0,0),$$

$$P^{(2)}_{x_2^i} \overset{\text{def}}{=} P^{(0,2)}_{x_2^i} = P^{(1,2)}_{x_2^i} = \partial_2^i M_K(0,0,0).$$

Доказательство будем вести по индукции. При $N=0$ выберем $K=1$; из (12) имеем $M_1(0,0,0) = -M_0(0,0,0) + u_0(0,0,0)$. Поскольку (при данном M_0) мы можем положить начальное значение $u_0(0,0,0)$ равным любому числу, а все несмешанные производные $\partial_i^k u_0(0,0,0)$ равными 0 (начальные данные для (15)), легко показать (дифференцируя $M_1 = -M_0 + u_0$), что при $N=0$, $K=1$ верно основное индукционное утверждение: *при заданном N найдется такое K, что соответствующие производные $\partial_i^m\partial_j^n M_K$, $i,j\in\{0,1,2\}$, $m+n\le N$, подходящим образом построенного M_K в точке $(0,0,0)$ совпадают с заданными числами $P^{(i,j)}_{x_i^m x_j^n}$ при $m+n\le N$: $P^{(i,j)}_{x_i^m x_j^n} = \partial_i^m\partial_j^n M_K(0,0,0)$. При этом старшие производные $\partial_i^m\partial_j^n M_K$, $m+n>N$, зависят от выбора $P^{(k,l)}_{x_k^p x_l^q}$, $p+q\le N$, следующим образом: $\partial_i^m M_K$, $m>N$, совпадают с $\pm\partial_i^m M_0$ (не зависят от выбора младших производных $\partial_i^m\partial_j^n M_K$, $m+n\le N$); $\partial_0^m\partial_1^n M_K$, $m+n>N$, $m,n>0$, зависят лишь от $P^{(0,1)}_{x_0^p x_1^q} = \partial_0^p\partial_1^q M_K$, $p+q\le N$, $p\le m$ (причем от $P^{(0,1)}_{x_0^m x_1^r}$, $r\le N-m$, зависимость линейная); $\partial_0^m\partial_2^n M_K$ и $\partial_1^m\partial_2^n M_K$, $m+n>N$, $m,n>0$, зависят от $P^{(0,1)}_{x_0^p x_1^q} = \partial_0^p\partial_1^q M_K$, $p+q\le N$, и от $P^{(0,2)}_{x_0^k x_2^s}$, $P^{(1,2)}_{x_1^k x_2^s}$ при $k+s\le N$, $s\le n$ (причем от $P^{(0,2)}_{x_0^k x_2^n}$, $P^{(1,2)}_{x_1^k x_2^n}$, $k\le N_0-n$ зависимость линейная).*

Шаг индукции. Предполагая, что основное индукционное утверждение доказано для производных в нуле порядка не выше $N=N_0$, докажем его для $N=N_0+1$. Пусть K_0 — соответствующий $N=N_0$ номер потенциала M_{K_0}. Сделаем еще $3N_0+3$ последовательных преобразований Рибокура — Дарбу:

$$M_{K_0} \overset{u=u_1}{\longrightarrow} M_{K_0+1} \overset{u=u_2}{\longrightarrow} \ldots \overset{u=u_{N_0}}{\longrightarrow} M_{K_0+N_0} \overset{u=v_1}{\longrightarrow} M_{K_0+N_0+1} \overset{u=v_2}{\longrightarrow}$$
$$\ldots \overset{u=v_{N_0}}{\longrightarrow} M_{K_0+2N_0} \overset{u=w_1}{\longrightarrow} M_{K_0+2N_0+1} \overset{u=w_2}{\longrightarrow} \ldots \overset{u=w_{N_0}}{\longrightarrow} M_{K_0+3N_0}$$
$$\overset{u=u^{(0)}}{\longrightarrow} M_{K_0+3N_0+1} \overset{u=u^{(1)}}{\longrightarrow} M_{K_0+3N_0+2} \overset{u=u^{(2)}}{\longrightarrow} M_{K_0+3N_0+3}.$$

Обозначим для краткости $Q(x_0,x_1,x_2) = M_{K_0+3N_0+3}$; имеем

$$Q = (-1)^{N_0+1}(M_{K_0} - u_1 + u_2 - \ldots \pm w_{N_0} \mp u^{(0)} \pm u^{(1)} \mp u^{(2)}). \tag{19}$$

Назовем для функции u_i, $1\le i\le N_0$, *главной* ее производную $\partial_0^i u_i$ в точке $(0,0,0)$ и *вспомогательной* ее производную $\partial_1^{N_0+1-i}u_i$ в этой же точке. Для v_i и

w_i, $1 \le i \le N_0$, соответственно главной будем считать $\partial_2^i v_i$, $\partial_2^i w_i$ и вспомогательной — $\partial_0^{N_0+1-i} v_i$, $\partial_1^{N_0+1-i} w_i$ в этой же точке. Все прочие несмешанные производные любых порядков этих функций будем считать равными нулю в $(0,0,0)$. Для $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ главными считаем $\partial_0^{N_0+1} u^{(0)}$, $\partial_1^{N_0+1} u^{(1)}$, $\partial_2^{N_0+1} u^{(2)}$ в $(0,0,0)$, все прочие несмешанные их производные считаем равными нулю в $(0,0,0)$ (вспомогательных производных нет). Зафиксируем значения самих функций u_i, v_i, w_i, $u^{(k)}$ и их вспомогательных производных в $(0,0,0)$ так, чтобы они оказались значениями «общего положения» (более точно ограничения типа неравенств будут сформулированы ниже, их можно определить, зная $P^{(i,j)}_{x_i^k x_j^s}$, $k+s \le N_0+1$).

Внутри данного шага основной индукции (при $N = N_0+1$) проделаем вспомогательную индукцию по m, чтобы показать справедливость индукционного утверждения для $\partial_0^m \partial_1^n Q$ при всех m, n и подходящем выборе главных производных u_i, $u^{(0)}$, $u^{(1)}$.

Прежде всего имеем (при $m=0$)

$$\partial_1^{N_0+1} Q = (-1)^{N_0+1}\bigl(\partial_1^{N_0+1} M_{K_0} \pm \partial_1^{N_0+1} u^{(1)}\bigr).$$

Значение $\partial_1^{N_0+1} M_{K_0}$, как известно из индукционного утверждения, фиксировано и равно $\pm\partial_1^{N_0+1} M_0$. Следовательно, можно однозначно определить главную производную $\partial_1^{N_0+1} u^{(1)}$ так, что $\partial_1^{N_0+1} Q = P^{(1)}_{x_1^{N_0+1}}$. Рассматривая

$$\partial_1^n Q = (-1)^{N_0+1}\bigl(\partial_1^n M_{K_0} \pm \partial_1^n u_{N_0+1-n} \pm \partial_1^n w_{N_0+1-n}\bigr), \quad 0 < n \le N_0,$$

при фиксированных нами вспомогательных производных функций u_i, w_i, мы можем однозначным выбором $\partial_1^n M_{K_0}$ сделать $\partial_1^n Q$ равным заданному значению $P^{(1)}_{x_1^n}$. Заметим, что, поскольку

$$M_{K_0+s} = (-1)^s (M_{K_0} - u_1 + \dots), \tag{20}$$

все значения M_{K_0+s} и их производные $\partial_1^s M_{K_0+r}$ в нуле можно (последовательной индукцией по s) выразить через производные по x_1 от M_{K_0} и u_i, v_i, w_i, $u^{(s)}$, следовательно, эти величины также зависят только от выбора $P^{(1)}_{x_1^n}$. Применяя ∂_1^n, $n > N_0+1$, к (19), видим, что $\partial_1^n Q \equiv \pm\partial_1^n M_{K_0} = \pm\partial_1^n M_0$ в силу выбора несмешанных производных u_i, v_i, w_i, $u^{(s)}$ и индукционного предположения.

Равенства $P^{(0)}_{x_0^{N_0+1}} = \partial_0^{N_0+1} Q$ легко достичь, как и ранее при разборе $P^{(1)}_{x_1^{N_0+1}} = \partial_1^{N_0+1} Q$, выбором главной производной $\partial_0^{N_0+1} u^{(0)}$. Требуемое утверждение о независимости старших производных $\partial_0^q Q$, $q > N_0+1$, от младших, как и выше, очевидно.

Выберем главную производную $\partial_2^{N_0+1} u^{(2)}(0,0,0)$ так, что $P^{(2)}_{x_2^{N_0+1}} = \partial_2^{N_0+1} Q$, это легко сделать, следуя аналогичным случаям, изложенным выше. Требуемое утверждение о зависимости $\partial_2^m Q$, $m > N_0+1$, также очевидно.

Тем самым при $m=0$

(а) главные производные $\partial_1^{N_0+1} u^{(1)}$ и $\partial_0^i u_i$, $i \le m$, уже выбраны так, что соответствующие требуемые равенства (16) $p+q \le N_0+1$, $p \le m$, достигнуты (для $Q = M_K$);

(б) старшие производные $\partial_0^p \partial_1^q Q$, $p+q > N_0+1$, $p \le m$, и уже определенные главные производные зависят (по построению Q) лишь от выбора $P^{(0,1)}_{x_0^s x_1^t}$, $s+t \le N_0+1$, $s \le p$, причем от $P^{(0,1)}_{x_0^p x_1^r}$, $r \le N_0+1-p$, — линейно.

(в) определены $\partial_0^p\partial_1^q M_{K_0+s}$, $p \le m$; $p+q \le N_0$, $s \le 3N_0+3$.

Покажем справедливость этих утверждений при $0 < m < N_0+1$ вспомогательной индукцией по m. Чтобы проделать шаг вспомогательной индукции ($m = m_0+1$), применим $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^{N_0-m_0}$ к (19) с учетом уравнений (15), (20). Получим в правой части сумму, включающую кроме определенных на предыдущих шагах вспомогательной индукции величин $\partial_0^p\partial_1^q M_{K_0}$, $p \le m_0$, значения $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^{N_0-m_0}M_{K_0}$, $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^q M_{K_0}$, $q < N_0-m_0$, и единственную (пока неопределенную) главную производную $\partial_0^{m_0+1}u_{m_0+1}(0,0,0)$ с коэффициентом

$$c_{m_0+1} = -\frac{\exp(4M_L)+\exp(2u_{m_0+1})}{\exp(4M_L)-\exp(2u_{m_0+1})}\partial_1^{N_0-m_0}u_{m_0+1}+F, \quad L = K_0+m_0,$$

где в F входят лишь определенные нами значения функций u_i, v_i, w_i и их вспомогательных производных в нуле, уже определенные на предыдущих шагах вспомогательной индукции главные производные $\partial_0^i u_i$, $i \le m_0$, а также $\partial_1^q M_{K_0+s}(0,0,0)$ с $q \le N_0$.

Нам необходимо показать, что $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^q M_{K_0}$, $q < N_0-m_0$, и главная производная $\partial_0^{m_0+1}u_{m_0+1}(0,0,0)$ определяются однозначно требованиями (16) с $p+q < N_0+1$, $p \le m_0+1$, и рассматриваемым на данном шаге равенством. Поскольку $q < N_0-m_0$, коэффициент при главной производной в $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^q Q$ включает только начальные значения функций в $(0,0,0)$ и $\partial_1^q M_{K_0}$, определенные выше. Ввиду основного индукционного предположения $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^{N_0-m_0}M_{K_0}$ линейно зависит от $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^r M_{K_0}$, $r < N_0-m_0$. Заметим теперь, что $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^r M_{K_0+s}$, $r < N_0-m_0$, линейно зависит от $\partial_0^{m_0+1}u_{m_0+1}$ и $P^{(0,1)}_{x_0^{m_0+1}x_1^q}$, $q \le r$ (доказывается индукцией по r). Выражая $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^q M_{K_0+s}$ линейно через указанные величины и подставляя ее в равенство, которое мы должны установить на данном шаге вспомогательной индукции, используем общность положения $u_{m_0+1}(0,0,0)$ и вспомогательных производных $\partial_1^{N_0-m_0}u_{m_0+1}$ и выводим, что коэффициент при главной производной в полученном выражении отличен от нуля (это и есть одно из требуемых ограничений типа неравенств). Следовательно, можно определить главную производную $\partial_0^{m_0+1}u_{m_0+1}(0,0,0)$, а затем и $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^q M_{K_0}$, $q \le N_0-m_0$, однозначно так, что $P^{(0,1)}_{x_0^{m_0+1}x_1^{N_0-m_0}} = \partial_0^{m_0+1}\partial_1^{N_0-m_0}Q$. Утверждение о зависимости производных $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^q Q$, $m_0+1+q > N_0+1$, лишь от уже использованных $P^{(0,1)}_{x_0^s x_1^t}$, $s \le m_0+1$, легко получаем, дифференцируя (19) с учетом (15) и (20). При этом линейная зависимость от $P^{(0,1)}_{x_0^{m_0+1}x_1^t}$, $m_0+1+t \le N_0+1$, следует из линейной зависимости от них главной производной $\partial_0^{m_0+1}u_{m_0+1}$ (а значит, и $\partial_0^{m_0+1}\partial_1^r M_{K_0+s}$). Вспомогательная индукция завершена.

Оставшиеся равенства

$$P^{(0,2)}_{x_0^{N_0+1-m}x_2^m} = \partial_0^{N_0+1-m}\partial_2^m Q(0,0,0), \quad P^{(1,2)}_{x_1^{N_0+1-m}x_2^m} = \partial_1^{N_0+1-m}\partial_2^m Q(0,0,0)$$

рассмотрим одновременно. Покажем возможность их достижения последовательным выбором главных производных $\partial_2^i v_i$, $\partial_2^i w_i$ второй вспомогательной индукцией по m.

Действительно, при $m=0$ эти равенства уже выполнены:

$$P^{(0)}_{x_0^{N_0+1}} = P^{(0,2)}_{x_0^{N_0+1}x_2^0} = P^{(0,1)}_{x_0^{N_0+1}x_1^0}, \quad P^{(1)}_{x_0^{N_0+1}} = P^{(1,2)}_{x_1^{N_0+1}x_2^0} = P^{(0,1)}_{x_0^0 x_1^{N_0+1}},$$

что уже было разобрано выше, причем индукционное утверждение о зависимости старших производных в этом случае тривиально.

Предположим, что для $m \le m_0$ выполнены условия:

(а) главные производные

$$\partial_0^{N_0+1}u^{(0)},\ \partial_1^{N_0+1}u^{(1)},\ \partial_0^i u_i,\quad 1 \le i \le N_0,\ \partial_2^j v_j,\ \partial_2^j w_j,\ j \le m,$$

уже выбраны так, что соответствующие требуемые равенства (17), (18) при $p+q \le N_0+1$, $q \le m$, достигнуты (для $Q = M_K$);

(б) старшие производные

$$\partial_0^p \partial_2^q Q,\quad \partial_1^p \partial_2^q Q,\quad p+q > N_0+1,\quad q \le m,$$

и уже определенные главные производные зависят (по построению Q) лишь от выбора $P^{(0,1)}_{x_0^s x_1^t}$, $s+t \le N_0+1$, и от $P^{(0,2)}_{x_0^k x_2^r}$, $P^{(1,2)}_{x_1^k x_2^r}$, $k+r \le N_0+1$, $r \le q$, причем от $P^{(0,2)}_{x_0^k x_2^q}$, $P^{(1,2)}_{x_1^k x_2^q}$, $k \le N_0+1-q$, — линейно;

(в) определены $\partial_2^p \partial_1^r M_{K_0+s}$, $\partial_2^p \partial_0^r M_{K_0+s}$, $p \le m$, $p+r \le N_0$, и $\partial_0^k \partial_1^t M_{K_0+s}$, $k+t \le N_0+1$.

Покажем, что условия (а)–(в) справедливы для $m = m_0+1$. Имеем (с учетом (15), (20))

$$\begin{aligned} P^{(0,2)}_{x_0^{N_0-m_0} x_2^{m_0+1}} &\overset{?}{=} \partial_0^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}Q = (-1)^{N_0+1}\big(k_1 \partial_0^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}M_{K_0} \\ &\qquad + a\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1}\big) + F, \\ P^{(1,2)}_{x_1^{N_0-m_0} x_2^{m_0+1}} &\overset{?}{=} \partial_1^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}Q = (-1)^{N_0+1}\big(k_2 \partial_1^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}M_{K_0} \\ &\qquad + d\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}\big) + G, \end{aligned} \tag{21}$$

где в слагаемые F и G собраны все члены, включающие только уже найденные на предыдущих шагах вспомогательной индукции величины и

$$\partial_0^s \partial_2^{m_0+1} M_{K_0},\quad s < N_0 - m_0,\quad \partial_1^s \partial_2^{m_0+1} M_{K_0},\quad s < N_0 - m_0.$$

Коэффициенты k_i включают лишь значения u_i, v_i, w_i, $u^{(i)}$ в $(0,0,0)$, коэффициенты a, d — соответственно вспомогательные производные $\partial_0^{N_0-m_0} v_{m_0+1}$, $\partial_1^{N_0-m_0} w_{m_0+1}$ с коэффициентами

$$-\frac{\exp(2M_L)+\exp(2v_{m_0+1})}{(\exp(2M_L)-\exp(2v_{m_0+1})(\exp(2v_{m_0+1})+1)},$$
$$-\frac{\exp(2M_T)-\exp(2w_{m_0+1})}{(\exp(2M_T)+\exp(2w_{m_0+1}))(\exp(2w_{m_0+1})+1)},$$
$$L = K_0+N_0+m_0,\quad T = K_0+2N_0+m_0,$$

определяемые через фиксированные величины.

Производные $\partial_0^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}M_{K_0}$, $\partial_1^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}M_{K_0}$ по основному индукционному предположению определены выбором $\partial_0^p\partial_1^q M_{K_0}$, $p+q \le N_0$, и $\partial_0^s\partial_2^t M_{K_0}$, $\partial_1^s\partial_2^t M_{K_0}$, $s+t \le N_0$, $t \le m_0+1$, причем от $\partial_1^s\partial_2^{m_0+1}M_{K_0}$, $\partial_0^s\partial_2^{m_0+1}M_{K_0}$, $s+m_0+1 \le N_0$ зависимость линейная.

Величины $\partial_0^s\partial_2^{m_0+1}M_{K_0}$, $s < N_0-m_0$, $\partial_1^s\partial_2^{m_0+1}M_{K_0}$, $s < N_0-m_0$, находим из (17), (18) с $q = m_0+1$. Действительно, применяя $\partial_0^s\partial_2^{m_0+1}$, $s < N_0-m_0$, $\partial_1^s\partial_2^{m_0+1}$, $s < N_0-m_0$, к (19), из (15) заключаем, что коэффициенты при пока неопределенных главных производных $\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1}$, $\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}$ в силу ограничения $s < N_0-m_0$ равны нулю, если $s \ne 0$. Если же $s = 0$, то из (19) имеем

$$P^{(2)}_{x_2^{m_0+1}} = \partial_2^{m_0+1}Q = (-1)^{N_0+1}(\partial_2^{m_0+1}M_{K_0} \pm \partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1} \pm \partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}),$$

т. е. $\partial_2^{m_0+1}M_{K_0}$ линейно зависит от $P^{(2)}_{x_2^{m_0+1}}$ и неопределенных еще главных производных $\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1}$ и $\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}$. Применяя индукцию по s, получаем, что $\partial_2^{m_0+1}\partial_0^s M_{K_0}$, $\partial_2^{m_0+1}\partial_1^s M_{K_0}$ линейно зависят от главных производных $\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1}$, $\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}$ и $P^{(1,2)}_{x_1^r x_2^{m_0+1}}$, $P^{(1,2)}_{x_1^r x_2^{m_0+1}}$, $r < N_0 - m_0$. Выражая $\partial_2^{m_0+1}\partial_0^r M_{K_0}$, $\partial_2^{m_0+1}\partial_1^r M_{K_0}$, $m_0+1+r \le N_0$, линейно через указанные величины и подставляя их в (21), получаем

$$\begin{aligned}
P^{(0,2)}_{x_0^{N_0-m_0}x_2^{m_0+1}} &\overset{?}{=} \partial_0^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}Q \\
&= (-1)^{N_0+1}\big(\bar a\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1} + \bar b\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}\big) + \overline{F}, \\
P^{(1,2)}_{x_1^{N_0-m_0}x_2^{m_0+1}} &\overset{?}{=} \partial_1^{N_0-m_0}\partial_2^{m_0+1}Q \\
&= (-1)^{N_0+1}\big(\bar c\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1} + \bar d\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}\big) + \overline{G},
\end{aligned} \tag{22}$$

где $\overline{F}$, $\overline{G}$ содержат только уже найденные на предыдущих шагах вспомогательной индукции величины.

Используя общность положения $v_{m_0+1}(0,0,0)$, $w_{m_0+1}(0,0,0)$ и вспомогательных производных $\partial_0^{N_0-m_0}v_{m_0+1}$, $\partial_1^{N_0-m_0}w_{m_0+1}$, можем считать, что определитель $\begin{vmatrix}\bar a & \bar b\\ \bar c & \bar d\end{vmatrix}$ отличен от нуля (вновь ограничения типа неравенств, определяемые из $P^{(i,j)}_{x_i^k x_j^s}$).

Таким образом, некоторым однозначным выбором главных производных $\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1}$, $\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}$ можно добиться выполнения в (21) равенств, помеченных вопросительным знаком. При этом по построению $\partial_2^{m_0+1}v_{m_0+1}$, $\partial_2^{m_0+1}w_{m_0+1}$ (а значит, и $\partial_2^{m_0+1}\partial_1^r M_{K_0+s}$, $\partial_2^{m_0+1}\partial_0^r M_{K_0+s}$, $m_0+1+r \le N_0+1$) зависят только от $P^{(0,2)}_{x_0^s x_2^t}$, $P^{(1,2)}_{x_1^s x_2^t}$, $s+t \le N_0+1$, $t \le m_0+1$, причем от $P^{(0,2)}_{x_0^s x_2^{m_0+1}}$, $P^{(1,2)}_{x_1^s x_2^{m_0+1}}$ — линейно. Применяя к (19) операторы $\partial_0^m\partial_2^n$, $\partial_1^m\partial_2^n$, $m+n > N_0+1$, $n \le m_0+1$, получаем необходимые утверждения о зависимости старших производных $\partial_0^m\partial_2^n Q$, $\partial_1^m\partial_2^n Q$ от $P^{(i,j)}_{x_i^k x_j^s}$.

Тем самым основное индукционное утверждение, а с ним и теорема доказаны.

Замечание. Безусловный интерес представляет распространение данного результата на преобразования Рибокура криволинейных ортогональных систем координат в n-мерном пространстве [2, 3]. Следует отметить, что система уравнений, описывающая такие координаты, является переопределенной системой, начальные данные для которой определяются через $n(n-1)/2$ функций двух переменных при любом n. Тем самым мы имеем $(2+1)$-мерную систему, обладающую $(2+1)$-мерными преобразованиями Беклунда — преобразованиями Рибокура. К сожалению, представления типа (3) для нее неизвестны. Тем не менее разумно высказать гипотезу о локальной плотности решений, получаемых преобразованиями Рибокура и в n-мерном случае. Также естественно ожидать выполнения этого свойства преобразований Беклунда для других известных (2+1)-мерных и (1+1)-мерных интегрируемых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris, 1887–1896. T. 1–4.

2. *Darboux G.* Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2-ème ed. Paris, 1910.

3. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale. 3-a ed. Bologna, 1923–1927. V. 1–4.

4. *Athorne C., Nimmo J. J. C.* On the Moutard transformation for integrable partial differential equations // Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 809–826.

5. *Oevel W., Rogers C.* Gauge transformations and reciprocal links in $2+1$ dimensions // Rev. Mod. Phys. 1993. V. 5. P. 299–330.

6. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 5. С. 1048–1068.

7. *Nimmo J. J. C.* Darboux transformations in (2+1) dimensions // Proc. NATO ARW "Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations" (ed. P. Clarkson), NATO ASI Series. : Kluwer, 1992. P. 183–192.

8. *Ганжа Е. И., Царев С. П.* Алгебраическая формула суперпозиции и полнота преобразований Бэклунда (2+1)-мерных интегрируемых систем // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 5. С. 197–198.

Статья поступила 14 октября 1997 г.,
окончательный вариант — 13 апреля 1999 г.

г. Красноярск
Красноярский гос. педагогический университет, математический факультет,
ул. Лебедевой, 89, 660049 Красноярск
tsarev@cdk.krasnoyarsk.su