Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 517.54

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ТЕОРЕМА О ЛОКАЛЬНОМ ГОМЕОМОРФИЗМЕ

Н. С. Даирбеков

Аннотация: Доказаны теорема о пределе отображений с ограниченным искажением и теорема о локальном гомеоморфизме для отображений с малым коэффициентом искажения. Библиогр. 16

1. Предварительные сведения

В настоящей работе мы доказываем теорему о пределе последовательности отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга, введенных в [1] и изучаемых в [2, 3]. В виде приложения доказана теорема о локальном гомеоморфизме для отображений с коэффициентом искажения, близким к единице.

Обозначения и понятия, используемые далее, могут быть найдены в [1, 2]. В нашей модели элементами группы Гейзенберга $\mathbb{H}$ являются точки $p = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, а умножение задается по правилу

$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2x'y - 2xy').$$

На $\mathbb{H}$ определена однородная норма

$$|p| = ((x^2 + y^2)^2 + t^2)^{1/4}$$

и однородная метрика

$$\rho(p, q) = |p^{-1}q|.$$

Однородное растяжение δ_r, $r > 0$, действует на $\mathbb{H}$ по формуле

$$\delta_r(x, y, t) = (rx, ry, r^2 t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{H}.$$

Результат растяжения часто записывается следующим образом:

$$\delta_r(q) = rq, \quad \delta_{1/r}(q) = q/r.$$

Напомним, что δ_r является гомоморфизмом группы Ли $\mathbb{H}$, причем для однородной нормы имеем $|\delta_r(q)| = r|q|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Межвузовской НГП «Университеты России. Фундаментальные исследования» (код проекта №1797, финансирование осуществляется через Новосибирский госуниверситет).

Обозначим через $B_R(p)$ ($S_R(p)$) шар (сферу) в однородной метрике с центром $p \in \mathbb{H}$ и радиусом $R > 0$. Шар (сферу) с центром 0 обозначим через B_R (S_R).

Как обычно, для множества $A \subset \mathbb{H}$ обозначим через $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$ и $|A|$ внутренность, замыкание и меру A (если последняя определена).

Векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

составляют базис левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{H}$.

Пространство горизонтальных касательных векторов HT ($= HT\mathbb{H}$) натянуто на X, Y, и слои HT снабжены скалярным произведением, в котором векторы $X(p)$ и $Y(p)$ составляют ортонормированный базис над каждой точкой $p \in \mathbb{H}$.

Дифференциальные формы

$$dx, \quad dy, \quad \tau = 2x\,dy - 2y\,dx + dt$$

задают базис кокасательного расслоения $T'\mathbb{H}$, двойственный базису X, Y, T над каждой точкой $p = (x, y, t) \in \mathbb{H}$. Форма τ задает контактную структуру на $\mathbb{H}$: касательный вектор V является горизонтальным тогда и только тогда, когда $\tau(V) = 0$.

Горизонтальное соболевское пространство $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$), где U — открытое множество в $\mathbb{H}$ и $1 \le s < \infty$, состоит из функций $u : U \to \mathbb{R}$ таких, что $u \in L^s(U)$ и слабые производные Xu, Yu принадлежат $L^s(U)$ ($u, Xu, Yu \in L^s_{\mathrm{loc}}(U)$). Горизонтальный градиент функции $u \in HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ определен почти всюду в U и равен $\nabla u(q) = (Xu(q), Yu(q))$. Сопряженный оператор к ∇ обозначается через div. На гладких функциях u, v имеем $\operatorname{div}(u, v) = -(Xu + Yv)$.

Будем говорить, что отображение $f : U \to \mathbb{H}$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, принадлежит классу $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$), если каждая компонента f_i, $i = 1, 2, 3$, принадлежит $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$). Почти всюду в U определены векторы

$$Xf(q) = (Xf_1(q), Xf_2(q), Xf_3(q)), \quad Yf(q) = (Yf_1(q), Yf_2(q), Yf_3(q)),$$

рассматриваемые как векторы над $f(q)$: $Xf(q), Yf(q) \in T_{f(q)}\mathbb{H}$.

Отображение $f : U \to \mathbb{H}$ класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ называется (слабо) контактным, если $Xf(q), Yf(q) \in HT_{f(q)}$ для почти всех точек $q \in U$. Отображение f является контактным тогда и только тогда, когда

$$\tau(Xf(q)) = 0, \quad \tau(Yf(q)) = 0$$

для почти всех $q \in U$. В развернутом виде эти равенства выглядят следующим образом:

$$2f_1(q)Xf_2(q) - 2f_2(q)Xf_1(q) + Xf_3(q) = 0,$$
$$2f_1(q)Yf_2(q) - 2f_2(q)Yf_1(q) + Yf_3(q) = 0.$$

Формальный горизонтальный дифференциал $Hf_*(q) : HT_q \to HT_{f(q)}$ контактного отображения f определен почти всюду в U, причем для векторов базиса $Hf_*(q)X = Xf(q)$ и $Hf_*(q)Y = Yf(q)$. Матрица формального горизонтального дифференциала имеет вид

$$Hf_* = \begin{pmatrix} Xf_1 & Yf_1 \\ Xf_2 & Yf_2 \end{pmatrix}.$$

Горизонтальный якобиан $HJ(q,f)$ — это определитель матрицы $Hf_*(q)$.

Отображение $Hf_*(q)$ единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры Ли группы $\mathbb{H}$, называемого *формальным $\mathscr{P}$-дифференциалом* отображения f и имеющего матрицу

$$f_*(q) = \begin{pmatrix} Hf_*(q) & 0 \\ 0 & HJ(q,f) \end{pmatrix}.$$

Якобиан $J(q,f)$ контактного отображения f — это определитель матрицы $f_*(q)$.

1.1. Определение. Отображение $f: U \to \mathbb{H}$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ называется *отображением с ограниченным искажением* (*квазирегулярным отображением*), если

(a) f непрерывно,

(b) $f \in HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$,

(c) f — контактное отображение,

(d) существует постоянная $K < \infty$ такая, что неравенство

$$\|Hf_*(q)\|^4 \leq KJ(q,f) \tag{1.1}$$

выполняется почти всюду в U. Здесь

$$\|Hf_*(q)\| = \max_{\xi \in HT_q, |\xi|=1} |Hf_*(q)\xi|$$

— операторная норма линейного отображения $Hf_*(q)$.

Наименьшая постоянная K в последнем неравенстве называется *коэффициентом искажения* $K(f)$ отображения f. Если $K(f) \leq K$, то f называется *отображением с искажением* K.

2. Ассоциированные субэллиптические уравнения

Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{H}$. Назовем $\mathscr{A}: U \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *ядром в* U, если выполнены следующие условия (ср. [4]).

(A) Для каждого открытого $D \subset\subset U$ и $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $C \subset D$ такое, что $|D \setminus C| < \varepsilon$ и сужение $\mathscr{A}|C \times \mathbb{R}^2$ непрерывно.

(B) Существует $\nu > 0$ такое, что $\langle \mathscr{A}(p,\xi), \xi \rangle \geq \nu^{-1}|\xi|^4$ и $|\mathscr{A}(p,\xi)| \leq \nu|\xi|^3$ для почти всех $p \in U$ и $\xi \in \mathbb{R}^2$.

(C) Для почти всех $p \in U$

$$\langle \mathscr{A}(p,\xi_1) - \mathscr{A}(p,\xi_2), \xi_1 - \xi_2 \rangle > 0,$$

если $\xi_1 \neq \xi_2$, и

$$\mathscr{A}(p,\lambda\xi) = \lambda|\lambda|^2 \mathscr{A}(p,\xi)$$

для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Простейшим примером является ядро $\mathscr{A}(p,\xi) = |\xi|^2\xi$.

Для изучения отображений с ограниченным искажением важен случай, когда ядро описывается следующим образом.

Пусть $f: U \to \mathbb{H}$ — отображение с ограниченным искажением. Определим в U матричную функцию $\theta = \theta_f$, полагая

$$\theta(p) = J(p,f)^{1/2}(Hf_*(p))^{-1}[(Hf_*(p))^{-1}]^T,$$

если $J(p, f) \neq 0$ (заметим, что в этом случае матрица $Hf_*(p)$ невырожденная), и $\theta(p) = \mathrm{Id}$ (тождественная матрица), если $J(p, f) = 0$. Определим *ассоциированное ядро* $\mathscr{A}(p, \xi) = \mathscr{A}_f(p, \xi)$, полагая

$$\mathscr{A}(p, \xi) = \langle \theta(p)\xi, \xi \rangle \theta(p)\xi.$$

Нетрудно проверить, что $\mathscr{A}(p, \xi)$ удовлетворяет условиям (A)–(C), причем $\nu = K(f)$.

Пусть $\mathscr{A}(p, \xi)$ — ядро в U. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} \mathscr{A}(p, \nabla u) = 0. \tag{2.1}$$

Функция $u : U \to \mathbb{R}$ класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$ называется *слабым решением* уравнения (2.1), если

$$\int\limits_U \mathscr{A}(p, \nabla u(p)) \cdot \nabla \varphi(p) = 0$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Взаимосвязь между отображениями с ограниченным искажением и ассоциированными субэллиптическими уравнениями дается следующим утверждением из [1], являющимся аналогом соответствующего результата Ю. Г. Решетняка, который установлен им в евклидовой ситуации и играет фундаментальную роль в теории отображений с ограниченным искажением [5].

2.1. Предложение. *Пусть $f : U \to V$ — отображение с ограниченным искажением открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в открытое множество $V \subset \mathbb{H}$. Предположим, что $w : V \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкое решение уравнения*

$$\operatorname{div}(|\nabla w(p)|^2 \nabla w(p)) = 0 \tag{2.2}$$

в V. Тогда функция $w_f = w \circ f$ есть слабое решение уравнения (2.1), *в котором $\mathscr{A}(p, \xi)$ — ядро, ассоциированное с f.*

Так как координатные функции и функция $\ln|p|$ представляют собой частные решения уравнения (2.2), для каждого отображения f с ограниченным искажением компоненты f_i, $i = 1, 2, 3$, и функция $\ln|f|$ являются решениями уравнения (2.1). Этот факт имеем многочисленные следствия (см. [2]).

Нам понадобится следующий аналог леммы 3.11 из [6, глава VI] для решений уравнения (2.1).

2.2. Лемма. *Пусть U — область в $\mathbb{H}$, $\mathscr{A}$ — ядро в U, $u \in C(\overline{U}) \cap HW^{1,4}(U)$ — неотрицательное слабое решение уравнения* (2.1) *в U, $p_0 \in \mathbb{H}$, $R > 0$ и $0 < t < R/7$. Положим $U_s = U \cap B_s(p_0)$ для $s > 0$. Если $u|\partial U \cap B_R(p_0) = 0$ и $S_s(p_0) \cap \partial U \neq \varnothing$ для $t < s < R/7$, то*

$$\sup_{U_t} u \leq C \left(\ln \frac{R}{t} \right)^{-1} \sup_U u,$$

где постоянная C зависит только от ν.

Доказательство. Мы можем считать, что $p_0 = 0$. Возьмем произвольное r, $t < r < R/7$, и пусть $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$ такова, что $0 \leq \varphi \leq 1$ и $\varphi|B_{7r} = 1$. Рассуждая по аналогии с доказательством леммы 3.11 в [6, глава VI], выводим следующее неравенство типа Каччиопполи:

$$\int\limits_{U_R} \varphi^4 |\nabla u|^4 \leq C \int\limits_{U_R} u^4 |\nabla \varphi|^4,$$

где постоянная C зависит только от ν. Так как $\varphi|B_{7r}=1$, взяв инфимум по φ и используя оценку для емкости сферического кольца [7, предложение 10], получаем

$$\int\limits_{U_{7r}} |\nabla u|^4 \le C(\sup_U u)^4 \left(\ln \frac{R}{7r}\right)^{-3}. \tag{2.3}$$

Продолжим u из $U\cap B_R$ нулем на весь шар B_R и обозначим результат продолжения через $\bar u$. Так как $u\in HW^{1,4}(U)\cap C(\overline{U})$ и $u|\partial U\cap B_R=0$, то $u\in HW^{1,4}(B_R)\cap C(B_R)$.

Поскольку U — область, $S_s\cap U\ne\varnothing$ для $s\in(t,r)$. Для каждого $s\in(t,r)$ выберем точку $p_s\in S_s\cap U$ такую, что $u(p_s)=\bar u(p_s)=\max\{u(p): p\in S_s\cap U\}=\max\{\bar u(p): p\in S_s\}$. В силу того, что u, будучи решением уравнения (2.1), монотонна, имеем $\bar u(p_s)=u(p_s)\ge u(p_{s'})=\bar u(p_{s'})$ для $s\ge s'$. По условию $S_s\cap\partial U\ne\varnothing$ для $s\in(t,r)$. Следовательно, для колебания

$$\operatorname*{osc}_{S_s}\bar u=\max_{S_s}\bar u-\min_{S_s}\bar u$$

функции $\bar u$ на сфере S_s имеем $\operatorname*{osc}_{S_s}\bar u=u(p_s)$ при всех $s\in(t,r)$. Поэтому

$$(\sup_{U_t} u)^4=u(p_t)^4\le\left(\ln\frac{r}{t}\right)^{-1}\int\limits_t^r\frac{u(p_s)^4}{s}\,ds\le\left(\ln\frac{r}{t}\right)^{-1}\int\limits_t^r s^{-1}(\operatorname*{osc}_{S_s}\bar u)^4\,ds. \tag{2.4}$$

Для оценки колебания функции $\bar u$ воспользуемся следующим аналогом леммы Геринга, вытекающим из [8, следствие 1].

2.3. Предложение. *Пусть $v: B_R\to\mathbb{R}$ — непрерывное отображение класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(B_R)$. Тогда для почти всех $s\in(0,R/7)$ справедлива оценка*

$$(\operatorname*{osc}_{S_s} v)^4\le Cs\int\limits_{S_s}(M_{6s}(|\nabla v|)(p))^4\,d\sigma_s(p),$$

где постоянная C не зависит от выбора функции u и радиуса s.

Здесь $d\sigma_s$ — индуцированная борелевская мера на сфере S_s (см. [8, предложение 1]) и

$$M_\delta g(p)=\sup\left\{\frac{1}{|B_r(p)|}\int\limits_{B_r(p)}|g(q)|\,dq: r\le\delta\right\}$$

— максимальная функция для g.

Интегрируя оценку предложения 2.3 и используя неравенство для максимальной функции, из (2.4) выводим

$$(\sup_{U_t}u)^4\le C\left(\ln\frac{r}{t}\right)^{-1}\int\limits_{B_{7r}}|\nabla\bar u(p)|^4\,dp=C\left(\ln\frac{r}{t}\right)^{-1}\int\limits_{U_{7r}}|\nabla u(p)|^4\,dp. \tag{2.5}$$

Применяя (2.3), из (2.5) получаем

$$(\sup_{U_t}u)^4\le C(\sup_U u)^4\left(\ln\frac{r}{t}\right)^{-1}\left(\ln\frac{R}{7r}\right)^{-3}.$$

Неравенство леммы получается в результате подстановки $r=\sqrt{tR/7}$.

3. Предел последовательности отображений с ограниченным искажением

3.1. Теорема. *Пусть U — область в $\mathbb{H}$ и $f_j : U \to \mathbb{H}$, $j = 1, 2, \dots,$ — последовательность отображений с искажением K, сходящаяся локально равномерно в U к отображению $f : U \to \mathbb{H}$. Тогда f является отображением с ограниченным искажением, причем $K(f) \le K$.*

Доказательство. В виду следствий 2.5 и 2.6 из [2] последовательность $\{f_j\}$ равномерно ограничена в $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$ для некоторого $s > 4$. Так как последовательность $\{f_j\}$ сходится локально равномерно в U к отображению f, этот факт влечет принадлежность f классу $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$.

Проверим контактность отображения f. Поскольку каждое отображение f_j контактно, для почти всех $p \in U$ имеем

$$\tau(Xf_j)(p) = 2f_{j,1}(p)Xf_{j,2}(p) - 2f_{j,2}(p)Xf_{j,1}(p) + Xf_{j,3}(p) = 0, \qquad (3.1)$$

где $f_{j,i}$ обозначает i-ю компоненту отображения f_j. Умножим обе части (3.1) на произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(U)$ и проинтегрируем по области U:

$$\begin{aligned}
0 = \int\limits_U \varphi(p)\tau(Xf_j)(p)\,dp &= \int\limits_U \varphi(p)(2f_{j,1}(p)Xf_{j,2}(p) - 2f_{j,2}(p)Xf_{j,1}(p) + Xf_{j,3}(p))\,dp \\
&= \int\limits_U \varphi(p)(2[f_{j,1}(p) - f_1(p)]Xf_{j,2}(p) - 2[f_{j,2}(p) - f_2(p)]Xf_{j,1}(p) \\
&\quad + 2f_1(p)Xf_{j,2}(p) - 2f_2(p)Xf_{j,1}(p) + Xf_{j,3}(p))\,dp \\
&= 2\int\limits_U \varphi(p)([f_{j,1}(p) - f_1(p)]Xf_{j,2}(p) - [f_{j,2}(p) - f_2(p)]Xf_{j,1}(p))\,dp \\
&+ \int\limits_U \varphi(p)(2f_1(p)Xf_{j,2}(p) - 2f_2(p)Xf_{j,1}(p) + Xf_{j,3}(p))\,dp = 2\big(I_1^j + I_2^j\big). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Заметим, что $I_1^j \to 0$ при $j \to \infty$. Для I_2^j при $j \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
I_2^j &= \int\limits_U \varphi(p)(2f_1(p)Xf_{j,2}(p) - 2f_2(p)Xf_{j,1}(p) + Xf_{j,3}(p))\,dp \\
&= \int\limits_U (-2X(\varphi(p)f_1(p))f_{j,2}(p) + 2X(\varphi(p)f_2(p))f_{j,1}(p) - X\varphi(p)f_{j,3}(p))\,dp \\
&\to \int\limits_U (-2X(\varphi(p)f_1(p))f_2(p) + 2X(\varphi(p)f_2(p))f_1(p) - X\varphi(p)f_3(p))\,dp \\
&= \int\limits_U \varphi(p)(2f_1(p)Xf_2(p) - 2f_2(p)Xf_1(p) + Xf_3(p))\,dp = \int\limits_U \tau(Xf)(p)\varphi(p)\,dp.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ в (3.2), получаем

$$\int\limits_U \tau(Xf)(p)\varphi(p)\,dp = 0.$$

Ввиду произвола в выборе φ заключаем, что $\tau(Xf)(p) = 0$ для почти всех $p \in U$.

Аналогичная выкладка показывает, что $\tau(Yf)(p) = 0$ для почти всех $p \in U$ и тем самым отображение f контактно.

Таким образом, f непрерывно, принадлежит классу $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$, где $s > 4$, и контактно. Нам осталось проверить выполнение неравенства (1.1).

Если f постоянно в U, то все доказано. Поэтому мы далее считаем, что f — непостоянное отображение.

3.2. Лемма. *Пусть $q \in \mathbb{H}$. Тогда для каждой точки $p \in f^{-1}(q)$ существует $r > 0$ такое, что $S_r(p) \cap f^{-1}(q) = \varnothing$.*

Чтобы не разрывать изложения, продолжим доказательство теоремы, откладывая доказательство леммы 3.2 до конца параграфа.

Так как каждое отображение f_j имеет искажение K, для почти всех $p \in U$ имеем

$$\|H(f_j)_*(p)\|^4 \leq KJ(p, f_j). \tag{3.3}$$

Пусть a — произвольная точка в U. По лемме 3.2 найдется $r_0 > 0$ такое, что шар $B_{r_0}(a)$ лежит в U вместе со своим замыканием и $f(a) \notin f(S_{r_0}(a))$.

Пользуясь непрерывностью f, выберем r_1, $0 < r_1 < r_0$, так, что $f(B_{r_1}(a))$ вместе со своим замыканием лежит в некотором шаре $B_R(f(a))$, который, в свою очередь, компактно содержится в компоненте связности множества $\mathbb{H} \setminus f(S_{r_0}(a))$, содержащей $f(a)$. Тогда $\mu(q, f, B_{r_0}(a)) = \mu(f(a), f, B_{r_0}(a))$ для всех $q \in B_R(f(a))$, где $\mu(q, f, G)$ — степень отображения f в точке q относительно компактной области $G \subset U$ (см., например, [5, 6]).

Используя равномерную сходимость последовательности $\{f_j\}$ к f на шаре $B_{r_0}(a)$, выберем N так, что для всех $j > N$ образ $f_j(B_{r_1})$ лежит в $B_R(f(a))$ и $\mu(q, f_j, B_{r_0}(a)) = \mu(f(a), f, B_{r_0}(a))$ для всех $q \in B_R(f(a))$, где μ, как и выше, обозначает степень отображения.

Для любого r, $0 < r < r_1$, и $j > N$ проинтегрируем неравенство (3.3) по шару $B_r(a)$:

$$\int\limits_{B_r(a)} \|H(f_j)_*(p)\|^4 \, dp \leq K \int\limits_{B_r(a)} J(p, f_j) \, dp. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1 из [5, гл. 3] о полунепрерывности функционалов вариационного исчисления стандартным образом (ср. [5, гл. 3, теорема 3.3]) влечет неравенство

$$\int\limits_{B_r(a)} \|Hf_*(p)\|^4 \, dp \leq \varliminf_{j \to \infty} \int\limits_{B_r(a)} \|H(f_j)_*(p)\|^4 \, dp. \tag{3.5}$$

По формуле замены переменной в интеграле Лебега для отображений с ограниченным искажением [2, теорема 4.3] имеем

$$\int\limits_{B_r(a)} J(p, f_j) \, dp = \int\limits_{\mathbb{H}} \mu(q, f_j, B_r(a)) \, dq. \tag{3.6}$$

Заметим, что $\lim\limits_{j \to \infty} \mu(q, f_j, B_r(a)) = \mu(q, f, B_r(a))$ для $q \in \mathbb{H} \setminus f(S_r(a))$ (в частности, для почти всех $q \in \mathbb{H}$, так как $|f(S_r(a))| = 0$). При этом $\mu(q, f_j, B_r(a)) = 0$ для $q \in \mathbb{H} \setminus B_R(f(a))$, поскольку $f_j(B_r(a)) \subset B_R(f(a))$, и $0 \leq \mu(q, f_j, B_r(a)) \leq \mu(q, f_j, B_{r_0}(a)) = \mu(f(a), f, B_{r_0}(a))$ для $q \in B_R(f(a))$. Иными словами, последовательность $\{\mu(q, f_j, B_r(a))\}$ сходится почти всюду в $\mathbb{H}$ при $j \to \infty$ и имеет интегрируемую мажоранту. Из теоремы Лебега о предельном переходе в интеграле Лебега выводим, что

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{H}}\mu(q,f_j,B_r(a))\,dq=\int\limits_{\mathbb{H}}\mu(q,f,B_r(a))\,dq. \tag{3.7}$$

Каждое отображение f_j имеет компонентами монотонные функции [2, следствие 2.2]. Так как последовательность $\{f_j\}$ сходится к f локально равномерно в U, компоненты отображения f также монотонные функции. Из результатов работы [8] следует, что любое непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$ открытого множества $U\subset\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ с монотонными компонентами обладает $\mathscr{N}$-свойством. Таким образом, f обладает $\mathscr{N}$-свойством.

По теореме 3.2 из [2] любое непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$ с $s>4$ открытого множества $U\subset\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ является $\mathscr{P}$-дифференцируемым почти всюду в U. Значит, f является $\mathscr{P}$-дифференцируемым почти всюду в U.

Теперь из результатов статьи [9] (см. также [2, предложение 4.2]) вытекает, что для f верна формула замены переменной в интеграле Лебега. По этой формуле получаем

$$\int\limits_{\mathbb{H}}\mu(q,f,B_r(a))\,dq=\int\limits_{B_r(a)}J(p,f)\,dp. \tag{3.8}$$

Из (3.4)–(3.8) заключаем, что

$$\int\limits_{B_r(a)}\|H(f)_*(p)\|^4\,dp\le K\int\limits_{B_r(a)}J(p,f)\,dp \tag{3.9}$$

для всех $r<r_1$. Ввиду произвола в выборе точки $a\in U$ из (3.9) и теоремы Лебега о точках Лебега выводим, что

$$\|H(f)_*(a)\|^4\le KJ(a,f)$$

для почти всех точек $a\in U$. Теорема доказана.

Теперь приведем доказательство леммы 3.2. В основном оно следует доказательству леммы 5.3 из [6, гл. VI].

Доказательство леммы 3.2. Не теряя общности рассуждений мы можем считать, что $q=0$. Докажем сначала, что внутренность $\operatorname{int}f^{-1}(0)$ пуста. Допустим, что это не так, и пусть X — компонента связности множества $\operatorname{int}f^{-1}(0)$. Так как f непостоянно, $X\ne U$ и найдется точка $p_0\in\partial X\cap U$. Тогда $p_0\in\partial(U\setminus f^{-1}(0))$. Выберем $R>0$ так, что $\overline{B}_R(p_0)\subset U$ и $X\setminus B_R(p_0)\ne\varnothing$.

Рассмотрим функции $u(p)=\ln|f(p)|$ и $u_j(p)=\ln|f_j(p)|$, $j=1,2,\dots$, считая, что $\ln 0=-\infty$. Для s, $0<s\le R$, положим $M_s=\max\{u(p):p\in\overline{B}_s(p_0)\}$ и $M_{j,s}=\max\{u_j(p):p\in\overline{B}_s(p_0)\}$, $j=1,2,\dots$.

Выберем теперь число t, $0<t<R/7$, так, чтобы выполнялось неравенство $C(\ln R/t)^{-1}<1/2$, где C — постоянная из леммы 2.2. Возьмем такую точку a в $\overline{B}_t(p_0)$, что $u(a)=M_t$. Пусть число M таково, что $-\infty<M<2M_t-M_R\le M_t$. Пользуясь равномерной сходимостью последовательности отображений f_j к f на $\overline{B}_R(p_0)$, выберем такое N, что для $j>N$ выполнены неравенства $u_j(p)<M$ для $p\in X\cap\overline{B}_R(p_0)$ и $u_j(a)>M$. Для $j>N$ пусть U_j — компонента связности открытого множества $\{p \in U : u_j(p) > M\} \cap B_R(p_0)$, содержащая a. Так как u_j монотонна [2, следствие 2.2], имеем $\overline{U} \cap S_R(p_0) \neq \varnothing$. Функция $v_j = u_j - M$ удовлетворяет в U_j всем условиям леммы 2.2. Применяя эту лемму, получаем

$$u_j(a) - M \leq \sup_{U_{j,t}} v_j < \frac{1}{2} \sup_{U_j} v_j \leq \frac{1}{2}(M_{j,R} - M).$$

При $j \to \infty$ это дает

$$M_t - M = u(a) - M = \lim_{j\to\infty} (u_j(a) - M) \leq \frac{1}{2} \lim_{j\to\infty} (M_{j,R} - M) = \frac{1}{2}(M_R - M).$$

Следовательно, $2M_t - M_R \leq M$, что противоречит выбору числа M. Значит, $\operatorname{int} f^{-1}(0) = \varnothing$.

Пусть $q \in f^{-1}(0)$, и предположим, что для некоторого $R > 0$ имеем $\overline{B}(q, R) \subset U$ и $f^{-1}(0) \cap S_t(q) \neq \varnothing$ при всех $t \in (0, R)$. Так как $q \in \partial(U \setminus f^{-1}(0)) \cap U$, мы можем применить те же самые рассуждения, что и выше, приходя снова к противоречию. Лемма доказана.

Приведем два непосредственных следствия теоремы 3.1.

3.3. Следствие (о полунепрерывности коэффициента искажения). *Если $f_j : U \to \mathbb{H}$, $j = 1, 2, \dots,$ — последовательность отображений с искажением K, сходящаяся локально равномерно в U к отображению $f : U \to \mathbb{H}$, то $K(f) \leq \varliminf\limits_{j\to\infty} K(f_j)$.*

Доказательство. Пусть $K_0 = \varliminf\limits_{j\to\infty} K(f_j)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и из последовательности $\{f_j\}$ извлечем подпоследовательность $\{f_{j_m}\}$, $m_1 < m_2 < \dots$, такую, что $K(f_{j_m}) \leq K_0 + \varepsilon$. Тогда по теореме 3.1 получим $K(f) \leq K_0 + \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, заключаем, что $K(f) \leq K_0$.

3.4. Следствие (достаточное условие предкомпактности). *Из каждой локально равномерно ограниченной последовательности $\{f_j\}$ отображений с искажением K области $U \subset \mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся локально равномерно в U к отображению с искажением K.*

Доказательство. Из [2, следствия 2.5 и 2.7] выводим, что последовательность $\{f_j\}$ равностепенно непрерывна на каждом компактном подмножестве U. Применяя теорему Арцела — Асколи, мы можем извлечь подпоследовательность, сходящуюся локально равномерно в U к некоторому отображению f. Теперь теорема 3.1 позволяет заключить, что f — отображение с ограниченным искажением и $K(f) \leq K$.

4. Теорема о локальном гомеоморфизме

Теорема о локальном гомеоморфизме, доказанная В. М. Гольдштейном [10] и О. Мартио, С. Рикманом и Ю. Вяйсяля [11], утверждает, что каждое непостоянное отображение с ограниченным искажением области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, имеющее коэффициент искажения, достаточно близкий к единице, является локальным гомеоморфизмом. Доказательство в [10, 11] опирается на глубокие результаты теории отображений с ограниченным искажением евклидовых пространств. Т. Иванец [12] дал элементарное доказательство этой теоремы, попутно установив некоторую оценку для «радиуса инъективности». Доказательство в [12] опирается исключительно на слабую форму теоремы устойчивости в теореме

Лиувилля и на сохранение двойного отношения мёбиусовыми преобразованиями. В этом параграфе мы покажем, что оба этих факта имеют место на группе Гейзенберга и, повторяя рассуждения Т. Иванеца, докажем следующий аналог теоремы о локальном гомеоморфизме для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга.

4.1. Теорема. *Существует $K_0 > 1$ такое, что каждое непостоянное отображение с искажением K_0, определенное на области U группы Гейзенберга, является инъективным на каждом шаре $B = B_R(a)$ таком, что шар $B_{9R}(a)$ в девять раз большего радиуса содержится в U.*

Теорема 4.1, в частности, влечет, что теорема Лаврентьева — Зорича [13] и теорема о радиусе инъективности [11] верны на группе Гейзенберга для отображений с коэффициентом искажения, достаточно близким к единице.

Далее нам понадобится сферическая модель группы Гейзенберга [14]. Отождествим точки $p = (x, y, t) \in \mathbb{H}$ с элементами $[z, t] \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, полагая $z = x + iy$. В этих обозначениях произведение, (однородная) норма, метрика и растяжения на $\mathbb{H}$ записываются следующим образом:

$$[z,t]\cdot[z',t'] = [z+z', t+t'+2\operatorname{Im}(z\bar{z}')], \quad |[z,t]| = ||z|^2 + it|^{1/2} = (|z|^4 + t^2|^{1/4},$$
$$\rho([z,t],[z',t']) = ||z|^2 - 2z\bar{z}' + |z'|^2 + i(t'-t)|^{1/2}, \quad \delta_r[z,t] = [rz, r^2 t].$$

Рассмотрим единичную сферу пространства $\mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{S} = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1\}$$

и снабдим ее следующей метрикой (наше определение ρ_S отличается от соответствующего определения в [14] коэффициентом $\frac{1}{2}$ и от соответствующего определения в [15] коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$):

$$\rho_S(u, w) = \sqrt{\frac{1}{2}|1 - \langle u, w\rangle|}, \tag{4.1}$$

где $\langle u, w\rangle = u_1 \operatorname{Im} w_1 + u_2 \operatorname{Im} w_2$.

Обобщенная стереографическая проекция $\pi : \mathbb{S} \setminus \{-e_2\} \to \mathbb{H}$ определяется как композиция преобразование Кэли

$$z_1 = \frac{iw_1}{1 + w_2}, \quad z_2 = i\frac{1 - w_2}{1 + w_2}$$

и проекции $z_1 \mapsto z_1$, $z_2 \mapsto \operatorname{Re} z_2$. Стереографическая проекция π продолжается до отображения $\mathbb{S}$ на одноточечную компактификацию $\widehat{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ группы Гейзенберга. Обратное отображение π^{-1} задается следующими формулами:

$$w_1 = \frac{-2iz}{1 + |z|^2 - it}, \quad w_2 = \frac{1 - |z|^2 + it}{1 + |z|^2 - it}.$$

Стереографическая проекция является конформным отображением метрического пространства $(\mathbb{S}, \rho_S)$ на метрическое пространство $(\widehat{\mathbb{H}}, \rho)$ [14, следствие теоремы 4].

Группа $SU(1,2)$ линейных отображений $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ с определителем 1, сохраняющих квадратичную форму

$$\langle y, y\rangle = y_0\bar{y}_0 - y_1\bar{y}_1 - y_2\bar{y}_2,$$

действует как группа преобразований на единичной сфере $\mathbb{S}$. Если $g \in SU(1,2)$ представлена своей матрицей коэффициентов (g_{ij}), то преобразование $w' = gw$ на $\mathbb{S}$ имеет вид

$$w'_j = \frac{g_{j0} + g_{j1}w_1 + g_{j2}w_2}{g_{00} + g_{01}w_1 + g_{02}w_2}, \quad j = 1, 2.$$

Обозначим через $I : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ комплексное сопряжение на $\mathbb{S}$:

$$I(w_1, w_2) = (\operatorname{Im} w_1, \operatorname{Im} w_2),$$

и положим

$$SU(1,2)I = \{g \circ I : g \in SU(1,2)\}.$$

Тогда $G = SU(1,2) \cup SU(1,2)I$ является группой, которую мы назовем *группой мёбиусовых преобразований* $\mathbb{S}$. Посредством стереографической проекции действие группы G переносится на $\widehat{\mathbb{H}}$. Если $\phi \in G$, то $p = \phi^{-1}(\infty)$ называется *полюсом* мёбиусова преобразования ϕ.

Имеет место следующий аналог теоремы Лиувилля.

4.2. Предложение. *Если $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение с искажением 1 области $U \subset \mathbb{H}$, то f либо постоянно, либо есть сужение на U некоторого мёбиусова преобразования.*

Данное утверждение было доказано в [14] для C^4-гладких 1-квазиконформных отображений и в [16] для 1-квазиконформных отображений без дополнительных условий гладкости. Для отображений с ограниченным искажением предложение 4.2 доказано в [2].

Характеристическим свойством мёбиусовых преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ является сохранение двойного отношения четверок точек. Напомним, что если (x_1, x_2, x_3, x_4) — четверка различных точек в $\mathbb{R}^n$, то их двойное отношение — это число

$$\frac{|x_1 - x_3||x_2 - x_4|}{|x_1 - x_2||x_3 - x_4|}.$$

По аналогии мы определяем *двойное отношение относительно метрики Гейзенберга* для четверки (q_1, q_2, q_3, q_4) различных точек в $\mathbb{H}$:

$$\frac{\rho(q_1, q_3)\rho(q_2, q_4)}{\rho(q_1, q_2)\rho(q_3, q_4)}.$$

Отождествляя точки $\widehat{\mathbb{H}}$ и $\mathbb{S}$ посредством стереографической проекции, определим *сферическое расстояние* $\rho_S(p, q)$ на $\widehat{\mathbb{H}}$ как расстояние в метрике (4.1) между прообразами точек p и q относительно стереографической проекции π. Определим *двойное отношение относительно сферической метрики*, используя сферическое расстояние:

$$\frac{\rho_S(q_1, q_3)\rho_S(q_2, q_4)}{\rho_S(q_1, q_2)\rho_S(q_3, q_4)}.$$

4.3. Лемма. *Если $p = [z, t]$ и $q = [z', t']$ — точки из $\mathbb{H}$, то*

$$\rho_S(p, q) = \frac{\rho(p, q)}{((1 + |z|^2)^2 + t^2)^{1/4}((1 + |z'|^2)^2 + t'^2)^{1/4}}.$$

В частности, двойное отношение четверок точек в $\mathbb{H}$ относительно метрики Гейзенберга совпадает с двойным отношением относительно сферической метрики.

Доказательство проводится прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
\rho_S(p,q)^2 &= \rho_S(\pi^{-1}(p),\pi^{-1}(q))^2 \\
&= \frac{1}{2}\left|1-\frac{-2iz}{1+|z|^2-it}\cdot\frac{2i\bar{z}'}{1+|z'|^2+it'}-\frac{1-|z|^2+it}{1+|z|^2-it}\cdot\frac{1-|z'|^2-it'}{1+|z'|^2+it'}\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+|z|^2-it)(1+|z'|^2+it')-4z\bar{z}'-(1-|z|^2+it)(1-|z'|^2-it')}{|1+|z|^2-it||1+|z'|^2+it'|} \\
&= \frac{\big||z|^2-2z\bar{z}'+|z'|^2+i(t'-t)\big|}{|1+|z|^2-it||1+|z'|^2+it'|} = \frac{\rho(p,q)^2}{((1+|z|^2)^2+t^2)^{1/2}((1+|z'|^2)^2+t'^2)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

4.4. Лемма. *Мёбиусовы преобразования сохраняют двойное отношение четверок точек.*

Доказательство. Сохранение двойного отношения относительно сферической метрики при действии элементов группы $SU(1,2)$ на $\mathbb{S}$ является прямым следствием теоремы 2.2.5 из [15]. Так как сопряжение I является изометрией относительно сферической метрики, сохранение двойного отношения под действием I на S очевидно. Теперь нужное утверждение следует из леммы 4.3.

Пусть U — область в $\mathbb{H}$. Обозначим через $F(U)$ множество всех отображений $\phi : U \to \mathbb{H}$ с искажением 1. Ввиду предложения 4.2 $\phi \in F(U)$, если ϕ либо тождественно постоянно, либо является сужением на U мёбиусова преобразования, действующего на $\widehat{\mathbb{H}}$ (при этом полюс ϕ не принадлежит U). Положим

$$F = \bigcup_U F(U),$$

где объединение строится по всем областям $U \subset \mathbb{H}$.

Предположим, что для всех достаточно малых $\epsilon \geq 0$ и каждой области $U \subset \mathbb{H}$ определено некоторое семейство $F_\epsilon(U)$ непрерывных отображений $f : U \to \mathbb{H}$, причем для

$$F_\epsilon = \bigcup_U F_\epsilon(U),$$

где объединение строится по всем областям $U \subset \mathbb{H}$, выполнены следующие условия (см. [12]):

(i) замкнутость относительно локализации: если $f \in F_\epsilon(U)$, то $f|V \in F_\epsilon(V)$ для каждой подобласти $V \subset U$,

(ii) инвариантность относительно сдвигов и растяжений: если отображение $y = f(x)$ принадлежит F_ϵ, то отображения $y = f(px)$, $y = qf(x)$, $y = f(\delta_\lambda(x))$ и $y = \delta_\lambda(f(x))$, где $p, q \in \mathbb{H}$ и $\lambda > 0$, также принадлежат F_ϵ.

Следуя [12], назовем семейство $\mathscr{F} = \{F_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *c-равномерной вариацией* F, если выполнены следующие условия:

$(*)$ $F_0 = F$,

$(**)$ из любой ограниченной последовательности $\{f_k\}$, где $f_k \in F_{\epsilon_k}(U)$ и $\epsilon_k \to 0$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом компактном подмножестве U к некоторому отображению из $F(U)$.

4.5. Лемма. *Семейство отображений с искажением $1+\epsilon$ является c-равномерной вариацией F.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следствий 3.3 и 3.4.

Доказательство теоремы 4.1. Ввиду лемм 4.4 и 4.5 мы можем теперь дословно повторить рассуждения из [12], заменяя евклидовы расстояния и растяжения их аналогами на группе Гейзенберга, однородной метрикой и однородным растяжением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даирбеков Н. С.* Свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 810–822.
2. *Даирбеков Н. С.* Об отображениях с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 50–60.
3. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Докл. РАН 1999. Т. 369, № 1. С. 7–9.
4. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
5. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
6. *Rickman S.* Quasiregular Mappings. Berlin, Heidelberg: Springer-Verl., 1993.
7. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
8. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
9. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
10. *Гольдштейн В. М.* О поведении отображений с ограниченным искажением при коэффициенте искажения, близком к единице // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 6. С. 1250–1258.
11. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1971. V. 488. P. 1–31.
12. *Iwaniec T.* Stability property of Möbius mappings // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 100, N 1. P. 61–69.
13. *Зорич В. А.* Теорема Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. 1967. Т. 74, № 3. С. 417–433.
14. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
15. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
16. *Capogna L.* Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.

Статья поступила 4 ноября 1998 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
dair@math.nsc.ru