Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 517.547.54

ЯВНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ

А. В. Гаврилов

Аннотация: Рассматривается задача минимальной интерполяции с кратными узлами в пространстве Харди. Для интерполяционной функции выводится явная формула, эквивалентная формуле обращения соответствующей матрицы Грама. Доказательство основано на свойствах инволюции специального вида. Библиогр. 5.

Введение

Пусть D — открытый единичный круг в комплексной плоскости, $T = \partial D$; $H^2 = H^2(D)$ — пространство Харди. Пространство H^2 гильбертово со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} f(z)\overline{g(z)}|dz|$$

и воспроизводящим ядром Коши — Сегё

$$\langle f, g_a \rangle = f(a), \quad a \in D, \tag{1}$$

где $g_a(z) = \frac{1}{1-z\bar{a}}$ (см. [1–3]). Пусть $\{a_1, \dots, a_N\} \subset D$ — множество различных точек, которое будем далее считать фиксированным. Пусть

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{z - a_i}{1 - z\bar{a}_i} \right)^{m_i}, \quad \theta \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

здесь m_i — некоторые положительные целые числа. Функция $B(z)$ называется (*конечным*) *произведением Бляшке* [1–3]. Она определена неоднозначно (с точностью до множителя $e^{i\theta}$), но это не играет далее никакой роли. Той же буквой обозначаем оператор умножения

$$B : H^2 \to H^2, \quad B : f(z) \mapsto B(z)f(z).$$

Как известно, $B(z)$ — внутренняя функция, т. е.

$$|z| = 1 \Rightarrow |B(z)| = 1;$$

поэтому B изометричен: $B^*B = \mathbf{1}$. По определению $H_B = H^2 \ominus BH^2$. В качестве базиса этого подпространства выберем систему векторов

$$\{g_{a_i,\nu} : 1 \le i \le N, \quad 0 \le \nu \le m_i - 1\},$$

где функции $g_{a,\nu}(z)$ определены следующими формулами:

$$g_{a,\nu}(z) = \frac{z^\nu}{(1 - z\bar{a})^{\nu+1}}.$$

Для всякой $f \in H^2$ справедливо тождество

$$\langle f, g_{a,\nu} \rangle = \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}, \quad a \in D,\ \nu \geq 0, \tag{3}$$

которое можно получить, дифференцируя (1). Из (3) следует, что

$$\langle Bf, g_{a_i,\nu} \rangle = 0,$$

так что $g_{a_i,\nu} \in H_B$; можно показать, что эти функции линейно независимы и действительно образуют базис H_B. В частности,

$$\dim H_B = M, \quad \text{где} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Пусть по определению $P_B = \mathbf{1} - BB^*$. Так как B изометричен, P_B есть не что иное, как ортогональный проектор на H_B. Проекции функций из H^2 на H_B будем обозначать шляпкой: $\hat{f} = P_B f$. По определению проектора $\hat{f} - f \in BH^2$, что эквивалентно соотношениям

$$\hat{f}^{(\nu)}(a_i) = f^{(\nu)}(a_i), \quad 1 \leq i \leq N,\ 0 \leq \nu \leq m_i - 1. \tag{4}$$

Отсюда легко вывести, что $\hat{f}$ — решение интерполяционной задачи (4), имеющее наименьшую норму. Интерполяционная задача (4) впервые рассматривалась Уолшем [3]. Он получил для ее решения интегральное представление [3, гл. X, теорема 16]. Из этого представления с помощью теории вычетов нетрудно получить разложение $\hat{f}$ в базисе, состоящем из функций вида $\frac{B(z)}{(z-a_i)^\nu}$, родственное интерполяционной формуле Эрмита для многочленов.

Однако для многих приложений (например, при аппроксимации функционалов) требуется разложение в «естественном» базисе $g_{a_i,\nu}$. Точнее, задача заключается в том, чтобы найти коэффициенты $c_{i,\nu}$ в представлении

$$\hat{f} = \sum_{i,\nu} c_{i,\nu} g_{a_i,\nu}$$

по известным величинам $f^{(\nu)}(a_i)$. Здесь и далее под суммой вида $\sum\limits_{i,\nu}$ понимается сумма по всем $1 \leq i \leq N$, $0 \leq \nu \leq m_i - 1$.

Можно видеть, что такая задача сводится к решению системы уравнений с матрицей Грама

$$G^{i\alpha}_{j\beta} = \langle g_{a_i,\alpha}, g_{a_j,\beta} \rangle = \frac{1}{\beta!} \frac{d^\beta}{dz^\beta} \left(\frac{z^\alpha}{(1 - z\bar{a}_i)^{\alpha+1}} \right) \bigg|_{z=a_j}.$$

Действительно, ввиду (3) и (4)

$$\langle \hat{f}, g_{a_k,\beta} \rangle = \sum_{i,\alpha} c_{i,\alpha} G^{i\alpha}_{k\beta} = \langle f, g_{a_k,\beta} \rangle = \frac{f^{(\beta)}(a_k)}{\beta!}.$$

Определим элементы матрицы G^{-1}, обратной к G, тождеством

$$\sum_{k,\beta} G^{i\alpha}_{k\beta} (G^{-1})^{k\beta}_{j\gamma} = \delta^j_i \delta^\gamma_\alpha$$

(в правой части — символы Кронекера). Тогда

$$\sum_{k,\beta} \frac{f^{(\beta)}(a_k)}{\beta!}(G^{-1})^{k\beta}_{j\gamma} = \sum_{i,\alpha} c_{i,\alpha} \sum_{k,\beta} G^{i\alpha}_{k\beta}(G^{-1})^{k\beta}_{j\gamma} = c_{j,\gamma}.$$

Для пространства Харди, в отличие от других пространств с воспроизводящим ядром, матрица, обратная матрице Грама, может быть представлена в явном виде, что и приводит к явным интерполяционным формулам. В случае простых узлов ($m_i = 1$) это будет матрица Коши $\|\frac{1}{1-a_i\overline{a_j}}\|$, формула обращения которой известна; отсюда Вильф [4] вывел интерполяционную формулу для простых узлов. Човла [5] получил этот же результат иначе, используя свойства многочленов.

Настоящая работа посвящена обобщению результатов [4, 5] на случай кратных узлов. Доказательство основано на свойствах инволюции специального вида, определенной на H_B. По мнению автора, этот подход в какой-то мере проясняет связь алгебраических свойств ядра Коши — Сегё (существование явной интерполяционной формулы) с аналитическими свойствами пространства Харди.

Инволюция

В этом пункте $V(z)$ — произвольная внутренняя функция; как и выше, $P_V = \mathbf{1} - VV^*$ — ортогональный проектор на H_V. Пусть $L^2 = L^2(T)$ — пространство интегрируемых с квадратом функций на окружности T. Хорошо известно [1], что H^2 можно рассматривать как подпространство L^2: для всякой функции из пространства Харди почти всюду на T определены граничные значения. Ортогональный проектор $P_+ : L^2 \to H^2$ называют *аналитическим проектором*, или *проектором Рисса*. Его можно охарактеризовать следующим образом:

$$P_+ z^n = z^n,\ n \geq 0, \quad P_+ z^n = 0,\ n < 0.$$

Введем (антилинейный) оператор сопряжения J,

$$J : L^2 \to L^2, \quad J : f(z) \mapsto \overline{f(z)}.$$

Очевидно, что $J^2 = \mathbf{1}$ и $Jv = \bar{v}J$ для всякого оператора умножения $v \in L^\infty(T)$.

Определение. Положим

$$J_V = P_+ VJz : H^2 \to H^2$$

(т. е. J_V — ограничение последнего оператора на H^2). Ясно, что J_V — непрерывный антилинейный оператор.

Лемма 1. *Для $f, h \in H^2$ справедливо равенство*

$$\langle h, J_V f\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_T f(z)h(z)\overline{V(z)}\,dz.$$

Доказательство. Имеем

$$\langle h, P_+VJzf\rangle_{H^2} = \langle h, V\overline{(zf)}\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_T h(z)\overline{V(z)}zf(z)|dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_T f(z)h(z)\overline{V(z)}\,dz.$$

Заметим, что

$$\langle h, J_V f\rangle = \langle f, J_V h\rangle.$$

Другим следствием леммы является тождество $J_V V = 0$.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$zP_+ Jz = J(\mathbf{1} - P_+).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что операторы в правой и левой частях одинаково действуют на функции z^n, $n \in \mathbb{Z}$, которые образуют базис в L^2.

Теорема 1. *Если $V(z)$ и $U(z)$ — внутренние функции, то*

$$J_U J_V = V^* U - UV^*. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$J_U J_V = P_+ UJzP_+ VJz = P_+ UJzP_+ Jz\overline{V} = P_+ U(\mathbf{1} - P_+)\overline{V}$$
$$= P_+ \overline{V} U - P_+ UP_+ \overline{V} = V^* U - UV^*,$$

так как на H^2

$$P_+ = \mathbf{1}, \quad P_+ \overline{V} = V^*.$$

Следствие. $J_V^2 = P_V$, $J_V^3 = J_V$.

Действительно, $J_V^2 = \mathbf{1} - VV^* = P_V$, $J_V P_V = J_V(\mathbf{1} - VV^*) = J_V$. Иными словами, J_V — инволюция, определенная на H_V.

Интерполяционная формула

Пусть $B(z)$ — конечное произведение Бляшке, определенное формулой (2). Разложим дробно-рациональную функцию $\frac{1}{B(z)}$ на элементарные дроби:

$$\frac{1}{B(z)} = \sum_{i,\mu} \frac{\beta_i^{(\mu)}}{(z - a_i)^{\mu+1}} + \overline{B(0)}. \tag{6}$$

Постоянная в правой части для нас не имеет значения (ее можно получить из тождества $\frac{1}{B(z)} = \overline{B(1/\bar{z})}$). Величины $\beta_i^{(\mu)}$ определяются из (6) однозначно:

$$\beta_i^{(m_i-1-s)} = \frac{e^{-i\theta}}{s!} \frac{d^s}{dz^s} \left((1 - z\overline{a_i})^{m_i} \prod_{j \neq i} \left(\frac{1 - z\overline{a_j}}{z - a_j} \right)^{m_j} \right) \Bigg|_{z=a_i},$$

где $0 \le s \le m_i - 1$. При $\mu \ge m_i$ полагаем $\beta_i^{(\mu)} = 0$.

Лемма 3. *Для $f \in H^2$*

$$J_B f = \sum_{i,\alpha,\beta} \overline{\beta_i^{(\alpha+\beta)}} \langle g_{a_i,\alpha}, f\rangle g_{a_i,\beta}. \tag{7}$$

Здесь $\sum\limits_{i,\alpha,\beta} = \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{\alpha,\beta \ge 0}$*; слагаемые с* $\alpha + \beta \ge m_i$ *равны, конечно, нулю.*

Доказательство. Пусть $h \in H^2$. Согласно лемме 1

$$\langle h, J_B f\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T f(z)h(z)\overline{B(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T \frac{f(z)h(z)\, dz}{B(z)}.$$

Подставив сюда (6) и применив последовательно формулу вычетов и формулу Лейбница, получим

$$\langle h, J_B f\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta}\beta_i^{(\alpha+\beta)}\frac{f^{(\alpha)}(a_i)}{\alpha!}\frac{h^{(\beta)}(a_i)}{\beta!},$$

или

$$\langle h, J_B f\rangle = \sum_{i,\alpha,\beta}\beta_i^{(\alpha+\beta)}\langle f, g_{a_i,\alpha}\rangle\langle h, g_{a_i,\beta}\rangle.$$

Последнее равенство справедливо для любого h, что означает (7).

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\hat f = \sum_{i,\alpha,\beta}\sum_{j,\delta,\gamma}\frac{f^{(\alpha)}(a_i)}{\alpha!}g_{a_j,\gamma}G_{i\beta}^{j\delta}\cdot\beta_i^{(\alpha+\beta)}\overline{\beta_j^{(\gamma+\delta)}}. \tag{8}$$

Доказательство. По следствию теоремы 1

$$\hat f(z) = P_B f = J_B^2 f.$$

Для вывода (8) достаточно дважды применить (7).

Интерполяционная формула в такой форме эквивалентна формуле обращения матрицы Грама. Действительно, сравнив (8) с полученным во введении выражением для коэффициентов $c_{j,\gamma}$, мы придем к равенству

$$(G^{-1})_{j\gamma}^{i\alpha} = \sum_{\beta,\delta}G_{i\beta}^{j\delta}\cdot\beta_i^{(\alpha+\beta)}\overline{\beta_j^{(\gamma+\delta)}}. \tag{9}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Meschkowski H.* Hilbertsche Raume mit Kernfunktion. Berlin: Springer-Verl., 1962.
3. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
4. *Wilf H. S.* Advances in numerical quadrature // Mathematical Methods for Digital Computers. New York, 1967. V. 2.
5. *Chawla M. M.* On the inversion of a certain Gram matrix // Calcolo. 1973. V. 10, N 3–4. P. 257–260.

Статья поступила 30 июля 1998 г.

г. Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН