Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512:519.4

О ПОЗИТИВНЫХ И КРИТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОЛЕЦ

Ю. М. Важенин, В. Ю. Попов

Аннотация: Доказано совпадение позитивных теорий полиоднородного многообразия колец, класса всех конечных колец из него и свободного в нем кольца счетного ранга. Дано описание критических теорий классов всех конечных йордановых и лиевых колец. Библиогр. 27.

Пусть $\mathbb{K}$ — некоторый класс алгебраических систем сигнатуры σ, $\mathscr{P}$ — позитивный σ-язык, $\mathscr{P}\mathbb{K}$ — позитивная теория класса $\mathbb{K}$. Изучению теории $\mathscr{P}\mathbb{K}$ и ее подтеорий для различных классов $\mathbb{K}$ посвящен целый ряд работ. Так, в [1] доказана разрешимость позитивной теории свободной полугруппы счетного ранга. В работе [2] отмечена разрешимость элементарных теорий полугрупп, свободных в конечно-базируемых многообразиях полугрупп, удовлетворяющих перестановочному тождеству, откуда непосредственно вытекает разрешимость позитивных теорий соответствующих многообразий. В обзоре Л. А. Бокутя [3] поставлен вопрос о разрешимости позитивной теории свободных ассоциативных (лиевых) алгебр (конечного ранга, бесконечного ранга, с единицей, без единицы). Г. С. Маканин в [4] доказал разрешимость проблемы совместности систем уравнений в свободной полугруппе, т. е. разрешимость $\exists\wedge$-теории этой полугруппы. Для свободных ассоциативных (лиевых) колец проблема совместности систем уравнений, как показал в [5] В. А. Романьков, неразрешима. В работах [6–11] доказана неразрешимость проблемы совместности систем уравнений для ряда других свободных колец. В указанном выше обзоре [3] поставлен вопрос о разрешимости проблемы совместности систем уравнений в свободных ассоциативных (лиевых) алгебрах над алгебраически замкнутым полем.

Цель настоящей заметки — установить совпадение позитивных теорий некоторых важных классов колец и на основании этих результатов получить новую информацию о разрешимости теорий.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие колец, заданное полиоднородными тождествами [12]. Обозначим через $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F}$ класс всех конечных колец из многообразия $\mathfrak{X}$. Пусть $F\mathfrak{X}$ — кольцо счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{N}_k$ — многообразие всех k-нильпотентных колец характеристики k, F_l — кольцо ранга l, свободное в многообразии $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{N}_k$. В дальнейшем свободные образующие колец мы будем обозначать элементами множества $\{e_1,\dots,e_p,\dots\}$.

Теорема 1. *Позитивные теории кольца $F\mathfrak{X}$, многообразия $\mathfrak{X}$ и класса $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F}$ совпадают.*

Пусть $\mathfrak{Y}$ — произвольное многообразие полугрупп, групп, колец или алгебр над полем, $F\mathfrak{Y}$ — полугруппа (группа, кольцо, алгебра) счетного ранга, свободная в многообразии $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}\cap F$ — класс всех свободных полугрупп (групп, колец, алгебр) из многообразия $\mathfrak{Y}$. Обозначим через L множество предложений вида

$$\forall \vec{x}(f_1(\vec{x}) = g_1(\vec{x}) \wedge \cdots \wedge f_m(\vec{x}) = g_m(\vec{x}) \to f_0(\vec{x}) = g_0(\vec{x})).$$

Теорема 2. *Позитивные теории и L-теории алгебраической системы $F\mathfrak{Y}$ и класса $\mathfrak{Y} \cap F$ совпадают.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что разрешимость проблемы равенства для классов свободных ассоциативных (лиевых) алгебр (групп) (см. соответствующий вопрос в [3]) равносильна разрешимости соответствующего фрагмента универсальной теории свободной счетно-порожденной ассоциативной (лиевой) алгебры (группы). Кроме того, в силу [13] из нее следует разрешимость проблемы равенства в классе всех свободных групп, а ввиду [14] разрешимы позитивная теория и проблема равенства в классе полугрупп, свободных в произвольном многообразии полугрупп, заданном перестановочным тождеством.

Из неразрешимости проблемы равенства в многообразии йордановых колец [15] с учетом результата [11] вытекает, что критическими теориями (см. [16]) многообразия йордановых колец являются лишь теории типов $\forall\exists$ и $\forall\neg\vee$. Следующая теорема устанавливает аналогичный факт для классов конечных йордановых и лиевых колец и дает, в частности, отрицательный ответ на вопрос из [3] о разрешимости проблемы равенства для класса конечных йордановых колец.

Теорема 3. *Теории типов $\forall\exists$, $\forall\neg\vee$, и только они, являются критическими теориями класса всех конечных йордановых колец и класса всех конечных колец Ли.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{D}$ — фильтр Фреше над множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, т. е. множество всех коконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ (см. [17]). Обозначим через $\mathscr{K}_1 \rightleftharpoons \Pi_{\mathfrak{D}} F_k$ фильтрованное произведение колец F_k по фильтру $\mathfrak{D}$. Элементы кольца $\mathscr{K}_1$ мы будем обозначать через $(a_1, \ldots, a_p, \ldots)_{\mathfrak{D}}$. Если для любых i и j, за исключением разве лишь конечного числа, выполняется равенство $a_i = a_j$, то $(a)_{\mathfrak{D}} \rightleftharpoons (a_1, \ldots, a_p, \ldots)_{\mathfrak{D}}$. Пусть $\mathscr{K}_2$ — подкольцо кольца $\mathscr{K}_1$, порожденное множеством элементов $\{(e_i)_{\mathfrak{D}} \mid e_i \in \{e_1, \ldots, e_p, \ldots\}\}$. Произвольный элемент кольца $\mathscr{K}_1$ можно представить в виде суммы одночленов $u_1 + \cdots + u_s + v_1 + \cdots + v_t$, где для любых $i \in \{1, \ldots, s\}$ и $j \in \{1, \ldots, t\}$ имеем $u_i \in \mathscr{K}_2, v_j \in \mathscr{K}_1 \backslash \mathscr{K}_2$. Рассмотрим отображение кольца $\mathscr{K}_1$ на кольцо $\mathscr{K}_2$, заданное следующим образом: $u_1 + \cdots + u_s + v_1 + \cdots + v_t \to u_1 + \cdots + u_s$. Очевидно, что данное отображение — гомоморфизм. В силу того, что многообразие $\mathfrak{X}$ задано полиоднородными тождествами, кольцо $\mathscr{K}_2$ изоморфно кольцу $F\mathfrak{X}$. Легко понять, что для любого k кольцо F_k конечно. Следовательно, кольцо $F\mathfrak{X}$ является гомоморфным образом фильтрованного произведения колец из класса $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$. Нетрудно убедиться, что аналогичные рассуждения справедливы и для многообразий алгебр над полем, если в качестве $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ взять класс всех конечномерных алгебр из $\mathfrak{X}$, а в качестве $\mathfrak{N}_k$ — многообразие всех k-нильпотентных алгебр над тем же полем.

Заметим, что произвольное предложение устойчиво относительно фильтрованных произведений тогда и только тогда, когда оно эквивалентно хорновскому предложению [18]. Произвольное предложение устойчиво относительно гомоморфизмов тогда и только тогда, когда оно эквивалентно позитивному или тождественно ложному предложению [19]. Отсюда в силу изложенного выше непосредственно вытекает, что произвольное позитивное предложение, истинное на классе $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$, истинно и на $F\mathfrak{X}$. Произвольное позитивное предложение, истинное на $F\mathfrak{X}$, истинно и на $\mathfrak{X}$, а значит, и на $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ [20]. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathfrak{Y}$ — произвольное многообразие колец, $\mathfrak{Y} \cap F \rightleftharpoons \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{F_\omega\} \cup \{F_\tau\}$ — класс всех относительно свободных колец многообразия $\mathfrak{Y}$, где F_ω — кольцо счетного ранга, F_τ — такое кольцо, что $|F_\tau| > |F_\omega|$, F_l — кольцо ранга l. Обозначим через $\mathscr{K}_1$ прямое произведение ΠF_l колец F_l, $l \in \mathbb{N}$, а через $\mathscr{K}_2$ — подкольцо кольца $\mathscr{K}_1$, порожденное множеством $\{(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{l}, e_l, \ldots, e_l, \ldots) \mid l \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что $\mathscr{K}_2$ — подпрямое произведение множества колец $\mathfrak{Y} \cap F$. Кроме того, как нетрудно убедиться, кольцо $\mathscr{K}_2$ изоморфно кольцу F_ω. В [21] доказано, что произвольное предложение, устойчивое относительно взятия подпрямых произведений, имеет вид

$$\forall \vec{x}(\psi \to \xi),$$

где ψ — позитивная, а ξ — атомарная формулы. Отсюда вытекает, в частности, что произвольное позитивное предложение и предложение вида

$$\varphi \rightleftharpoons \forall \vec{x}\,(f_1(\vec{x}) = g_1(\vec{x}) \wedge \cdots \wedge f_m(\vec{x}) = g_m(\vec{x}) \to f_0(\vec{x}) = g_0(\vec{x}))$$

устойчивы относительно взятия подпрямых произведений. Следовательно, произвольное предложение вида φ, истинное на классе $\mathfrak{Y} \cap F$, будет истинно и на F_ω. Заметим, что произвольное кольцо F_l является подкольцом кольца F_ω. Отсюда в силу [20, 22, 23] вытекает, что произвольное предложение вида φ, истинное на F_ω, истинно и на классе $\mathfrak{Y} \cap F$. Заметим, кроме того, что проведенные рассуждения сохраняют силу и в том случае, когда в качестве $\mathfrak{Y}$ берется произвольное многообразие полугрупп, групп или алгебр над полем. Теорема 2 доказана.

Прежде чем приступить к доказательству последней теоремы, напомним необходимые определения из работ [10, 16]. *Схемно-альтернативной иерархией языков фиксированной сигнатуры* γ называется упорядоченное по включению семейство SA всевозможных множеств $C_1 \ldots C_n \neg^r \wedge^t \vee^s$ и $\overline{\omega} \neg^r \wedge^t \vee^s$ γ-формул логики первого порядка, рассматриваемых в предваренной нормальной форме и определяемых равенствами

$$C_1 \ldots C_n \neg^r \wedge^t \vee^s = \left\{ Q_1 \vec{x} \ldots Q_v \vec{y} \bigvee_{i=1}^{d+1} \bigwedge_{j=1}^{c(i)+1} \neg^{m(i,j)} \chi_{ij} \mid (v < n \vee (v = n \wedge Q_1 = C_1)) \right.$$
$$\left. \wedge \operatorname{sgn} \sum m(i,j) \leq r \wedge \operatorname{sgn} \sum c(i) \leq t \wedge \operatorname{sgn} d \leq s \right\},$$

$$\overline{\omega} \neg^r \wedge^t \vee^s = \bigcup_{n \in \omega} C_1 \ldots C_n \neg^r \wedge^t \vee^s,$$

где $C_1, \ldots, C_n, Q_1, \ldots, Q_v \in \{\forall, \exists\}$, $C_i \neq C_{i+1}$, $Q_j \neq Q_{j+1}$; $r, t, s, m(i,j) \in \{0, 1\}$; $w^1 = w$, w^0 — пустой символ; $\vec{x} = x_1 \ldots x_p, \ldots, \vec{y} = y_1 \ldots y_q$; χ_{ij} — атомарная γ-формула; $\operatorname{sgn} u$ — знак числа u. Таким образом, язык $C_1 \ldots C_n \neg^r \wedge^t \vee^s$ состоит из тех и только тех γ-формул φ, блочная схема кванторной приставки которых является (возможно, пустым) подсловом слова $C_1 \ldots C_n$, а в бескванторной части φ любая из связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$ может присутствовать лишь при условии $r = 1$, $t = 1$, $s = 1$ соответственно. Например, язык $\forall\exists$ составляют все γ-формулы вида χ, $\forall \vec{x} \chi$, $\exists \vec{x} \chi$, $\forall \vec{x} \exists \vec{y} \chi$, где χ — атомарная γ-формула; язык $\forall\neg\vee$ состоит из всех

γ-формул вида ψ, $\forall\vec{x}\psi$, где ψ не содержит кванторов и конъюнкции. Иерархия языков SA определяет иерархию $SA\mathscr{K}$ теорий данного класса алгебраических систем сигнатуры γ, которая определяется равенством

$$SA\mathscr{K} = \langle\{L\mathscr{K} \mid L \in SA\}; \subseteq\rangle,$$

где $L\mathscr{K}$ — L-теория класса $\mathscr{K}$. Теория $L\mathscr{K}$ называется *критической*, если она является минимальной в $SA\mathscr{K}$ неразрешимой теорией. Легко понять, используя устройство SA как частично упорядоченного множества, что описание критических теорий класса $\mathscr{K}$ автоматически дает описание всех в рамках SA разрешимых теорий $\mathscr{K}$, поскольку теория $L\mathscr{K} \in SA\mathscr{K}$ разрешима тогда и только тогда, когда она не включает ни одной критической теории.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства нам потребуется иной вид конечно-определенного йорданова кольца, нежели приведенный в работе [15]. Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативное кольцо, порожденное множеством $\{e_1, e_2\}$ и заданное нижеследующей конечной системой определяющих соотношений. Пусть $a = e_1e_2e_1$, $b = e_1e_2^2e_1$, $A = e_1e_2^3e_1$, $B = e_1e_2^4e_1$, $q_i = e_1e_2^{5+i}e_1$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Обозначим через M двухленточную машину Минского, вычисляющую частичную характеристическую функцию некоторого фиксированного множества натуральных чисел P. Произвольной команде $q_i\delta_1\delta_2 \to q_j\varepsilon_1\varepsilon_2$ машины M в зависимости от конкретных значений δ_1 и δ_2 поставим в соответствие соотношение согласно следующей таблице:

δ_1	δ_2	Соотношения
1	1	$ABq_iBA = ABa^{\epsilon_1}b^{\epsilon_2}q_jb^{\epsilon_2}a^{\epsilon_1}BA$
1	0	$Abq_ibA = Aa^{\epsilon_1}b^{1+\epsilon_2}q_jb^{1+\epsilon_2}a^{\epsilon_1}A$
0	1	$Baq_iaB = Ba^{1+\epsilon_1}b^{\epsilon_2}q_jb^{\epsilon_2}a^{1+\epsilon_1}B$
0	0	$abq_iba = a^{1+\epsilon_1}b^{1+\epsilon_2}q_jb^{1+\epsilon_2}a^{1+\epsilon_1}$

К построенным соотношениям добавим еще соотношения $ab+ba = 0$, $aB+Ba = 0$, $bA + Ab = 0$, $AB + BA = 0$. Стандартными методами (см., например, [24]) можно убедиться, что в кольце $\mathscr{A}$ соотношение

$$ABa^{2^n}q_1a^{2^n}BA = ABaq_0aBA$$

выполняется тогда и только тогда, когда $n \in P$. Если в качестве P взять рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел, то в кольце $\mathscr{A}$ в силу изложенного выше будет неразрешима проблема равенства слов. Заметим, что все определяющие соотношения кольца $\mathscr{A}$ и соотношения

$$ABa^{2^n}q_1a^{2^n}BA = ABaq_0aBA$$

можно представить в виде $f(e_1, e_2) = 0$, где $f(e_1, e_2)$ — многочлен, симметричный относительно инволюции (см. [25, с. 39]). Следовательно, в силу теоремы Кона (см. [25, с. 76, теорема 3]) элементы свободного ассоциативного кольца ранга 2, соответствующие многочленам $f(e_1, e_2)$, будут йордановыми многочленами. На основании результатов [26] несложно убедиться в том, что йордановы представления определяющих соотношений кольца $\mathscr{A}$ задают конечно-определенное полуспециальное йорданово кольцо $\mathscr{B}$ с неразрешимой проблемой равенства. Пусть $\mathscr{B}_n$ — йорданово кольцо, заданное всеми определяющими соотношениями кольца $\mathscr{B}$ и, кроме того, соотношениями вида $w = {q_0}^n$, где w — слово, длина которого больше n и которое не представимо в кольце $\mathscr{B}$ в виде линейной комбинации слов, включающей слова, длина которых не превосходит n. Тогда легко проверить, что кольцо $\mathscr{B}$ изоморфно подалгебре фильтрованного произведения по фильтру Фреше колец $\mathscr{B}_n$.

Пусть ψ — конъюнкция определяющих соотношений кольца $\mathscr{B}$, ξ — равенство

$$ABa^{2^n}q_1a^{2^n}BA = ABaq_0aBA.$$

Рассмотрим предложение

$$\varphi \rightleftharpoons \forall e_1e_2(\psi \to \xi)$$

и покажем, что это предложение истинно на классе конечных йордановых колец тогда и только тогда, когда оно истинно в многообразии всех йордановых колец. Допустим, что предложение φ истинно в многообразии всех йордановых колец. Тогда очевидно, что оно истинно в классе конечных йордановых колец. Пусть теперь предложение φ истинно в классе конечных йордановых колец. Тогда оно истинно и в множестве колец вида $\mathscr{B}_n$. Отсюда в силу [18] вытекает, что φ истинно на фильтрованном произведении этих колец. Последнее ввиду [22, 23] влечет истинность предложения φ на кольце $\mathscr{B}$, что равносильно истинности предложения φ в многообразии йордановых колец. Следовательно, универсальная теория класса всех конечных йордановых колец неразрешима.

В работе [27] доказана неразрешимость универсальной теории класса конечных лиевых колец. Из теоремы 1 в силу результатов [6, 11, 15] следуют неразрешимость $\forall\exists$-теории и разрешимость $\exists\forall \wedge \vee$-теории классов конечных лиевых и йордановых колец. Поэтому для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что разрешимы теории типов $\exists\neg \wedge \vee$, $\exists\forall\neg\wedge$. Произвольное предложение языка $\exists\neg \wedge \vee$ равносильно дизъюнкции предложений языка $\exists\neg\wedge$. Произвольное предложение языка $\exists\neg\wedge$ либо является предложением языка $\exists\forall \wedge \vee$, либо ложно на нулевом наборе, и произвольное предложение языка $\exists\forall\neg\wedge$ либо является предложением языка $\exists\forall\wedge\vee$, либо ложно на нулевом наборе. Следовательно, теории типов $\exists\neg \wedge \vee$ и $\exists\forall\neg\wedge$ разрешимы. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 1 и результатов работы [11] вытекает, что для любого над-коммутативно-ассоциативного многообразия колец, заданного полиоднородными тождествами, теория типа $\forall\exists$ будет критической теорией класса всех конечных колец из этого многообразия. Заметим, что не всякое над-коммутативно-ассоциативное многообразие колец может быть задано полиоднородными тождествами. Например, многообразие $var\{(xy)(zx) - ((xy)z)x + (xy)z - x(yz) = 0\}$ является над-коммутативно-ассоциативным многообразием колец. Однако оно не может быть задано полиоднородными тождествами.

В заключение отметим открытый вопрос, связанный с полученными здесь результатами и теоремой 1 из работы [11].

Вопрос. Верно ли, что для любого над-коммутативно-ассоциативного многообразия колец граница разрешимости класса всех конечных колец из этого многообразия принадлежит множеству $\{\{\forall\}, \{\forall\exists, \forall\neg\vee\}, \{\forall\exists, \exists\forall\neg\vee\}\}$, причем реализуются все три случая?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Важенин Ю. М., Розенблат Б. В.* Разрешимость позитивной теории свободной счетнопорожденной полугруппы // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 1. С. 120–127.

2. *Розенблат Б. В.* Перестановочные многообразия полугрупп // XVII Всесоюз. алгебраическая конф. 2 часть, Минск, 1983 г.: Тез. докл. Минск: Бел. гос. ун-т, 1983. Р. 195–196.

3. *Бокуть Л. А.* Алгоритмические проблемы и теоремы вложения: некоторые открытые вопросы для колец, групп и полугрупп // Известия вузов. Математика. 1982. № 11. С. 3–11.

4. *Маканин Г. С.* Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Мат. сб. 1978. Т. 103, № 2. С. 147–237.

5. *Романьков В. А.* О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и свободных кольцах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 457–471.

6. *Важенин Ю. М.* Критические теории некоторых классов неассоциативных колец // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 4. С. 393–401.

7. *Важенин Ю. М., Попов В. Ю.* Критические теории свободных нильпотентных колец некоторых типов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 3. С. 74–76.

8. *Попов В. Ю.* Разрешимые теории йордановых колец // Тез. X Всесоюз. конф. по математической логике. Алма-Ата, 1990. С. 134.

9. *Попов В. Ю.* Разрешимые теории альтернативных колец // Тез. Советско-французского коллоквиума по теории моделей. Караганда, 1990. С. 41.

10. *Важенин Ю. М.* Критические теории // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 23–31.

11. *Попов В. Ю.* Критические теории над-коммутативно-ассоциативных многообразий колец // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1364–1374.

12. *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Алгебра-2. Тождества. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 18. (Итоги науки и техники).

13. *Маканин Г. С.* Уравнения в свободной группе // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 6. С. 1199–1273.

14. *Замятин А. П., Розенблат Б. В.* Элементарные теории относительно свободных полугрупп с перестановочным тождеством // Исследование алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск, 1985. С. 58–69.

15. *Умирбаев У. У.* Проблема равенства для йордановых и правоальтернативных алгебр // Некоторые проблемы и задачи анализа и алгебры. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1985. С. 120–127.

16. *Важенин Ю. М.* Множества, логика, алгоритмы. Екатеринбург: УрГУ, 1997.

17. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

18. *Keisler H. J.* Limit ultraproducts // J. Symb. Logic. 1965. V. 30. P. 212–234.

19. *Lyndon R. C.* Properties preserved under homomorphism // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 143–154.

20. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

21. *Lyndon R. C.* Properties preserved in subdirect products // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 155.

22. *Los J.* On the extending of models. I // Fund. Math. 1955. V. 42. P. 38–54.

23. *Tarski A.* Contributions to the theory of models. I, II // Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1954. V. 57. P. 572–588.

24. *Kharlampovich O. G., Sapir M. V.* Algorithmic problems in varieties // Internat. J. Algebra Comput. 1995. V. 5, N 4–5. P. 379–602.

25. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

26. *Ширшов А. И.* О специальных J-кольцах // Мат. сб. 1956. Т. 38, № 2. С. 149–166.

27. *Харлампович О. Г.* Универсальная теория некоторых классов колец Ли // Исследования по алгебраическим системам. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1984. С. 156–164.

Статья поступила 8 декабря 1998 г.

г. Екатеринбург