Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.946

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Акбар Х. Бегматов

Аннотация: Изучается задача интегральной геометрии в трехмерном слое на семействе параболоидов с возмущением, которое представляет собой интеграл с заданной весовой функцией достаточно общего вида по областям, ограниченным параболоидами. В случае, когда весовая функция возмущения тождественно равна 0, в работе получено аналитическое представление для образа Фурье искомой функции по первым двум переменным. Доказана теорема единственности решения рассмотренной задачи интегральной геометрии с возмущением в классе гладких финитных функций с носителем в слое. Библиогр. 10.

Введение

В работе рассматривается задача восстановления функции в трехмерном слое, если известны суммы интегралов от нее по поверхности параболоидов, опирающихся на плоскость $x_3 = 0$, и по областям, ограниченным параболоидами и плоскостью $x_3 = 0$, с заданной весовой функцией.

В § 1 приводятся используемые обозначения и формулируются основные результаты работы. Вывод аналитического представления для образа Фурье искомой функции по переменным (x_1, x_2) в случае, когда возмущение тождественно равно 0, содержится в § 2. В § 3 приводятся формулировки и доказательства вспомогательных утверждений, которые затем используются в § 4 при доказательстве теоремы единственности решения рассмотренной задачи интегральной геометрии с возмущением в классе гладких финитных функций с носителем в слое. Весовая функция возмущения имеет достаточно общий вид.

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [1]. Формулы обращения для задачи интегральной геометрии на семействах парабол (параболоидов) получены в [2, 3]. В работах автора [4, 5] изучались различные постановки задач интегральной геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве.

Пользуясь случаем, автор благодарит академика М. М. Лаврентьева за внимание к работе.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

Введем обозначения: $x \in \mathbb{R}^3$, $\xi \in \mathbb{R}^3$; $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$; $\lambda \in \mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^3_+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_3 \geq 0\}$; $S = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : 0 < x_3 < h, h < \infty\}$; $\overline{S} = \{x \in$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Госкомитета по науке и технике Республики Узбекистан (грант № 15/99).

$\mathbb{R}^3_+ : 0 \leq x_3 \leq h\}$; $\mathscr{A} = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : |x_k| \leq a_k (k = 1, 2), a_k < \infty; 0 < x_3 < h\}$; $\{\mathscr{P}(x)\}$ — семейство параболоидов в слое S с вершинами в точках x:

$$\mathscr{P}(x) = \{\xi : x_3 - \xi_3 = |\bar{x} - \bar{\xi}|^2; 0 \leq \xi_3 \leq h\};$$

$p(x)$ — проекция параболоида $\mathscr{P}(x)$ на плоскость $x_3 = 0$; $P(x)$ — часть слоя $\overline{S}$, ограниченная поверхностью параболоида $\mathscr{P}(x)$ и плоскостью $x_3 = 0$.

Рассмотрим операторное уравнение относительно функции u:

$$\int\limits_{p(x)} u(\xi)\, d\bar{\xi} + \int\limits_{P(x)} W(x, \xi) u(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{1}$$

где W — заданная весовая функция.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$;

$$\hat{u}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} u(x)\, d\bar{x}; \quad \hat{f}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} f(x)\, d\bar{x}.$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ известна для всех $x \in \overline{S}$, весовая функция $W(x, \xi)$ тождественно равна 0. Тогда решение уравнения (1) в классе $C^2_0(S)$ единственно и имеет место представление*

$$\hat{u}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \int\limits_0^{x_3} I_0(|\lambda| \sqrt{x_3 - \xi_3}) \hat{f}(\lambda, \xi_3)\, d\xi_3. \tag{2}$$

Здесь I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента (см. [6]).

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ известна для всех $x \in \overline{S}$, весовая функция W имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и обращается в 0 вместе со своими производными на поверхности параболоида $\mathscr{P}(x)$. Тогда решение уравнения (1) в классе $C^3_0(\mathscr{A})$ единственно.*

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим получившееся уравнение относительно функции u:

$$\int\limits_{p(\bar{x})} u(\xi)\, d\bar{\xi} = f(x). \tag{3}$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\int\limits_0^{x_3} \int\limits_0^{2\pi} u(x_1 + \rho \cos\varphi,\ x_2 + \rho \sin\varphi, \xi_3)\, d\varphi d\xi_3 = f(x), \tag{4}$$

где $\rho = \sqrt{x_3 - \xi_3}$.

Обозначим $\alpha = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Используя интегральное представление для функции Бесселя нулевого порядка

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(z \cos\theta)\, d\theta$$

(см. [7]), легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\langle\lambda,\alpha\rangle}\,d\varphi = 2\pi J_0(|\lambda|\rho). \tag{5}$$

Применим к обеим частям уравнения (4) преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle\lambda,\bar{x}\rangle}\left[\int_0^{x_3}\int_0^{2\pi} u(x_1+\rho\cos\varphi,\ x_2+\rho\sin\varphi, x_3)\,d\varphi d\xi_3\right]d\bar{x}$$

$$= \int_0^{x_3}\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\langle\lambda,\alpha\rangle}\hat{u}(\lambda,\xi_3)\,d\varphi d\xi_3 = \hat{f}(\lambda, x_3).$$

С учетом (5) запишем

$$\hat{f}(\lambda, x_3) = 2\pi\int_0^{x_3} J_0(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3})\hat{u}(\lambda,\xi_3)\,d\xi_3. \tag{6}$$

Подействуем на обе части (6) вольтерровым интегральным оператором с ядром

$$\frac{\operatorname{ch}\left(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3}\right)}{\sqrt{x_3-\xi_3}}.$$

Имеем

$$\int_0^{x_3}\frac{\operatorname{ch}\left(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3}\right)}{\sqrt{x_3-\xi_3}}\hat{f}(\lambda,\xi_3)\,d\xi_3$$

$$= 2\pi\int_0^{x_3}\int_0^{\xi_3}\frac{\operatorname{ch}\left(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3}\right)J_0(|\lambda|\sqrt{\xi_3-t})}{\sqrt{x_3-\xi_3}}\hat{u}(\lambda,t)\,dtd\xi_3. \tag{7}$$

Учитывая, что

$$\int_0^1\frac{y\operatorname{ch}(c\sqrt{1-y^2})J_0(cy)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 1$$

(см. [8]), из (7) получаем

$$\int_0^{x_3}\sqrt{x_3-\tau}\,\hat{u}(\lambda,\tau)\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_0^{x_3}\frac{\operatorname{ch}(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3})}{\sqrt{x_3-\xi_3}}\hat{f}(\lambda,\xi_3)\,d\xi_3.$$

Отсюда нетрудно вывести следующее интегральное уравнение относительно функции $\hat{u}$:

$$\int_0^{x_3}\frac{\hat{u}(\lambda,\tau)}{\sqrt{x_3-\tau}}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}\int_0^{x_3}\frac{\operatorname{ch}(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3})}{\sqrt{x_3-\xi_3}}\hat{f}(\lambda,\xi_3)\,d\xi_3.$$

Его решение имеет вид

$$\hat{u}(\lambda,x_3) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\int_0^{x_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left[\int_0^{\xi_3}\frac{\operatorname{ch}(|\lambda|\sqrt{\xi_3-\tau})}{\sqrt{\xi_3-\tau}}\hat{f}(\lambda,\tau)\,d\tau\right]\frac{d\xi_3}{\sqrt{x_3-\xi_3}}. \tag{8}$$

Для завершения доказательства нам понадобится формула (см. [6])

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} I_0(a). \tag{9}$$

Из условий теоремы и (8), (9) вытекает, что

$$\hat{u}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\int_0^{x_3}\int_0^{\xi_3}\frac{\operatorname{ch}\left(|\lambda|\sqrt{\xi_3-\tau}\right)}{\sqrt{\xi_3-\tau}\sqrt{x_3-\xi_3}}\hat{f}(\lambda,\tau)\,d\tau d\xi_3$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\int_0^{x_3} I_0\Big(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3}\Big)\hat{f}(\lambda,\xi_3)\,d\xi_3.$$

Таким образом, мы получили требуемое представление (2) для функции $\hat{u}$.

3. Вспомогательные утверждения

Функция u предполагается трижды непрерывно дифференцируемой и финитной с носителем в $\mathscr{A}$. Функция W имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и вместе со своими производными обращается в 0 на поверхности параболоида $\mathscr{P}(x)$.

Пусть $f(x)$ — правая часть уравнения (1) — тождественно равна 0. Тогда

$$f_0(x) = -f_1(x). \tag{10}$$

Здесь через f_0 и f_1 обозначены соответственно первое и второе слагаемые в левой части (1).

Рассмотрим функцию

$$\psi(x,y) = \int_0^{x_3}\int_0^{2\pi} u(x_1 + \sqrt{1-y}\rho\cos\varphi,\ x_2 + \sqrt{1-y}\rho\sin\varphi, \xi_3)\,d\varphi d\xi_3,$$

где ρ определено выше, $y \in [0;1]$. Из определения функции ψ следует, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x_3}\psi(x,y) = -\frac{1}{4}\Delta_{\bar{x}}\psi(x,y); \tag{11}$$

$$\psi(x,0) = f_0(x); \tag{12}$$

$$\psi(x,1) = 2\pi\int_0^{x_3} u(\bar{x},\xi_3)\,d\xi_3. \tag{13}$$

Здесь и всюду далее

$$\Delta_{\bar{x}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y). \tag{14}$$

Из (11) и (14) с учетом соотношения (12) вытекает, что функция q удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3}q(x,y) = -\frac{1}{4}\int_0^y \Delta_{\bar{x}}q(x,\eta)\,d\eta + q_0(x), \tag{15}$$

где

$$q_0(x) = -\frac{1}{4}\Delta_{\bar{x}} f_0(x). \tag{16}$$

Лемма 1. *Функция $q_0(x)$ может быть представлена в виде*

$$q_0(x) = \int\limits_0^1 \int\limits_{P(x)} W_1(x,\xi) q(\xi, y)\, d\xi dy,$$

где весовая функция W_1 непрерывна и выражается через функцию W и ее производные.

Доказательство. Проинтегрируем функцию $q(x,y)$ по y от 0 до 1. Из формул (12)–(14) следует, что

$$\int\limits_0^1 q(x,y)\, dy = 2\pi \int\limits_0^{x_3} u(\bar{x}, \xi_3)\, d\xi_3 - f_0(x).$$

Учитывая (10), последнее равенство можно записать следующим образом:

$$2\pi \int\limits_0^{x_3} u(\bar{x}, \xi_3)\, d\xi_3 + \int\limits_{P(x)} W(x,\xi) u(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^1 q(x,y).$$

В силу ограничений, наложенных на функции u и W, имеем

$$u(x) + \int\limits_{P(x)} W_2(x,\xi) u(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_3} q(x,y)\, dy, \tag{17}$$

где $W_2(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial x_3} W(x,\xi)$.

Уравнение (17) является операторным уравнением Вольтерра 2-го рода (см. [9]) относительно функции u. Его решение имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_3} q(x,y)\, dy + \int\limits_0^1 \int\limits_{P(x)} W_3(x,\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_3} q(\xi, y)\, d\xi dy,$$

где W_3 — непрерывная функция, выражающаяся через функцию W и ее производные.

Используя выражение для возмущения f_1, т. е. второго слагаемого в левой части уравнения (1), получаем

$$f_1(x) = \int\limits_{P(x)} W(x,\xi) u(\xi)\, d\xi$$

$$= \int\limits_{P(x)} W(x,\xi) \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_3} q(x,y)\, dy + \int\limits_0^1 \int\limits_{P(\xi)} W_3(\xi,\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_3} q(\zeta, y)\, d\zeta dy \right] d\xi. \tag{18}$$

По нашему предположению весовая функция W вместе со своими производными обращается в 0 на параболоидах $\mathscr{P}(x)$. Из определения функции $q_0(x)$ (см.

(16) и (18)) вытекает, что

$$q_0(x) = \int\limits_0^1 \int\limits_{P(x)} W_1(x,\xi) q(\xi, y)\, d\xi dy,$$

где функция W_1 зависит только от функции W и ее производных. Лемма 1 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{q}(\lambda, x_3, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle\lambda,\bar{x}\rangle} q(x,y)\, d\bar{x}; \tag{19}$$

$$\hat{q}_0(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle\lambda,\bar{x}\rangle} q_0(x)\, d\bar{x}; \tag{20}$$

$$q_1(\lambda, y) = \begin{cases} \hat{q}(\lambda, h, y), & \text{если } 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{если } y > 1. \end{cases} \tag{21}$$

В пространстве переменных (x_3, y) рассмотрим полуполосу $\Omega = \{(x_3, y) : 0 \le x_3 \le h,\ 0 \le y < \infty\}$ и область $\Omega_0 = \{(x_3, y) : 0 \le x_3 \le h,\ 0 \le y \le 1\}$.

Пусть функция $Q(\lambda, x_3, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3} Q(\lambda, x_3, y) = \frac{|\lambda|^2}{4} \int\limits_0^y Q(\lambda, x_3, \eta)\, d\eta + \hat{q}_0(\lambda, x_3) \tag{22}$$

и условию

$$Q(\lambda, h, y) = q_1(\lambda, y). \tag{23}$$

Здесь $\hat{q}_0$ и q_1 определяются формулами (20) и (21) соответственно.

При фиксированных (λ_1, λ_2) рассмотрим для функции Q задачу Коши (22), (23).

Лемма 2. *Функция $\hat{q}$ может быть продолжена из $\mathbb{R}^2 \times \Omega_0$ на всю область $\mathbb{R}^2 \times \Omega$ как решение задачи Коши* (22), (23).

Доказательство. Решение задачи Коши (22), (23) имеет вид

$$Q(\lambda, x_3, y) = \int\limits_0^y J_0\big(|\lambda|\sqrt{(h - x_3)(y-\eta)}\big) \frac{\partial}{\partial \eta} q_1(\lambda, \eta)\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{2|\lambda|\sqrt{y}} \int\limits_{x_3}^h \sqrt{t - x_3}\, J_1\big(|\lambda|\sqrt{y(t-x_3)}\big) \hat{q}_0(\lambda, t)\, dt, \tag{24}$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно. Действительно, непосредственной подстановкой в уравнение (22) нетрудно убедиться, что функция Q, определенная формулой (24), удовлетворяет этому уравнению. Далее, легко показать, что задача Коши (23) для эволюционного уравнения (22) равномерно корректна, и в силу этого ее решение единственно (см. [10]).

Применим к обеим частям уравнения (15) преобразование Фурье по (x_1, x_2). Исходя из известных свойств преобразования Фурье, заключаем, что функция

$\hat{q}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{q}(\lambda, x_3, y) = \frac{|\lambda|^2}{4}\int\limits_0^y \hat{q}(\lambda, x_3, \eta)\, d\eta + \hat{q}_0(\lambda, x_3).$$

Таким образом,

$$Q(\lambda, x_3, y) = \hat{q}(\lambda, x_3, y), \qquad \text{если} \quad (x_3, y) \in \Omega_0. \tag{25}$$

Из (25) следует справедливость утверждения леммы.

Пусть $b > 0$. Рассмотрим функции

$$\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) = e^{b(x_3-h)^2 - bh^2} Q(\lambda, x_3, y), \tag{26}$$

$$g_0(x; b) = e^{b(x_3-h)^2 - bh^2} q_0(x) \tag{27}$$

и

$$g(x, y; b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle\lambda,\bar{x}\rangle}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\, d\lambda, \tag{28}$$

$$\hat{g}_0(\lambda, x_3; b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle\lambda,\bar{x}\rangle} g_0(x; b)\, d\bar{x}. \tag{29}$$

Лемма 3. *Функция $\hat{g}$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) = \frac{|\lambda|^2}{4}\int\limits_0^y \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b)\, d\eta + 2b(x_3 - h)\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) + \hat{g}_0(\lambda, x_3; b). \tag{30}$$

Доказательство. Справедливость утверждения леммы вытекает из (22) и (26).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) = \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) - \frac{|\lambda|^2}{4}\int\limits_0^y \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b)\, d\eta - 2b(x_3 - h)\hat{g}(\lambda, x_3, y; b); \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^*\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) = &-\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\\ &- \frac{|\lambda|^2}{4}e^{ay}\int\limits_y^\infty e^{-a\eta}\hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b)\, d\eta - 2b(x_3 - h)\hat{g}(\lambda, x_3, y; b);\end{aligned} \tag{32}$$

$$\hat{g}_3'(\lambda, h, y; b) = \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\big|_{x_3=h}.$$

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned}\int\limits_0^h\int\limits_0^\infty e^{-ay}[\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2\, dydx_3 = \int\limits_0^h\int\limits_0^\infty e^{-ay}\mathbf{L}^*\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\, dydx_3\\ + \int\limits_0^\infty e^{-ay}\left[\hat{g}_3'(\lambda, h, y; b)\hat{g}(\lambda, h, y; b) - \frac{|\lambda|^2}{4}\int\limits_0^y \hat{g}(\lambda, h, \eta; b)\, d\eta\hat{g}(\lambda, h, y; b)\right] dy.\end{aligned}$$

Доказательство. Из (31) и (32) имеем

$$[\mathbf{L}\hat g(\lambda,x_3,y;b)]^2=\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\right]^2-2\frac{\partial}{\partial x_3}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\frac{|\lambda|^2}{4}\int\limits_0^y\hat g(\lambda,x_3,\eta;b)\,d\eta$$

$$-4b(x_3-h)\hat g(\lambda,x_3,y;b)\frac{\partial}{\partial x_3}\hat g(\lambda,x_3,y;b)+\left[\frac{|\lambda|^2}{4}\int\limits_0^y\hat g(\lambda,x_3,\eta;b)\,d\eta\right]^2$$

$$+4b(x_3-h)\hat g(\lambda,x_3,y;b)\frac{|\lambda|^2}{4}\int\limits_0^y\hat g(\lambda,x_3,\eta;b)\,d\eta+4b^2(x_3-h)^2\hat g^2(\lambda,x_3,y;b);$$

$$\mathbf{L}^*\mathbf{L}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,y;b)=-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,y;b)$$

$$+\frac{|\lambda|^2}{4}(I-I^*)\frac{\partial}{\partial x_3}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,\eta;b)$$

$$-2b[\hat g(\lambda,x_3,y;b)]^2+\frac{|\lambda|^4}{16}I^*I\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,y;b)$$

$$+2b(x_3-h)\frac{|\lambda|^2}{4}(I+I^*)\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,\eta;b)+4b^2(x_3-h)^2[\hat g(\lambda,x_3,y;b)]^2.$$

Рассмотрим первое слагаемое в разложении $[\mathbf{L}\hat g(\lambda,x_3,y;b)]^2$. Поскольку $u\in C_0^3(\mathscr{A})$, с помощью интегрирования по частям легко показать, что

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^\infty e^{-ay}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\right]^2dydx_3$$

$$=-\int\limits_0^h\int\limits_0^\infty e^{-ay}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,y;b)\,dydx_3$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-ay}\frac{\partial}{\partial x_3^2}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,y;b)\,dy.$$

Проделав подобные операции над остальными слагаемыми в полученных выражениях для $[\mathbf{L}\hat g(\lambda,x_3,y;b)]^2$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{L}\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,y;b)$, после несложных, хотя и довольно громоздких, преобразований убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Аналогично можно показать, что справедлива

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^\infty e^{-ay}\left[\mathbf{L}^*\hat g(\lambda,x_3,y;b)\right]^2dydx_3$$

$$=\int\limits_0^h\int\limits_0^\infty e^{-ay}\mathbf{L}\mathbf{L}^*\hat g(\lambda,x_3,y;b)\hat g(\lambda,x_3,y;b)\,dydx_3$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-ay}\left[\hat g_3'(\lambda,h,y;b)\hat g(\lambda,h,y;b)+\frac{|\lambda|^2}{4}e^{ay}\int\limits_y^\infty e^{-a\eta}\hat g(\lambda,h,\eta;b)\,d\eta\hat g(\lambda,h,y;b)\right]dy.$$

Как следует из условий теоремы и леммы 2, при фиксированных λ, x_3 и b функцию $\hat{g}$ можно рассматривать как элемент гильбертова пространства $\mathscr{H}$ функций, определенных на полуоси $0 \le y < \infty$, со скалярным произведением

$$(h_1, h_2) = \int\limits_0^\infty e^{-ay} h_1(y) h_2(y)\, dy, \quad a > 0.$$

В пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим интегральный оператор

$$Ip = \int\limits_0^y p(\eta)\, d\eta. \tag{33}$$

Легко видеть, что сопряженный оператор определяется равенством

$$I^* g = e^{ay} \int\limits_y^\infty e^{-a\eta} g(\eta)\, d\eta. \tag{34}$$

Лемма 6. *Пусть операторы I и I^* определяются формулами* (33) *и* (34) *соответственно. Тогда справедливо соотношение*

$$(I^* I - I I^*)\hat{g} = \frac{1}{a} \int\limits_0^\infty e^{-a\eta} \hat{g}(\eta)\, d\eta.$$

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 3 из [1].

§ 4. Доказательство теоремы единственности

Возьмем функцию $\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)$, определенную формулой (24), и рассмотрим функционал

$$\mathbf{F}(\hat{g}) = \int\limits_0^h \int\limits_0^\infty e^{-ay} [\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2\, dy dx_3.$$

Из (31), (32) и леммы 4 следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\hat{g}) = &\int\limits_0^h \int\limits_0^\infty e^{-ay} \mathbf{L}\mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\, dy dx_3 \\
&+ \int\limits_0^h \int\limits_0^\infty e^{-ay} \left[4b + \frac{|\lambda|^4}{16}(I^* I - I I^*)\right] \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\, dy dx_3 \\
&+ \int\limits_0^\infty e^{-ay} \left[\hat{g}_3'(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) - \frac{|\lambda|^2}{4} I \hat{g}(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b)\right] dy.
\end{aligned}$$

Аналогично, используя лемму 5, получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\hat{g}) = &\int\limits_0^h \int\limits_0^\infty e^{-ay} [\mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2\, dy dx_3 \\
&+ \int\limits_0^h \int\limits_0^\infty e^{-ay} \left[4b + \frac{|\lambda|^4}{16}(I^* I - I I^*)\right] \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)\, dy dx_3
\end{aligned}$$

$$
-\int_0^\infty e^{-ay}\left[\hat{g}_3'(\lambda,h,y;b)+\frac{|\lambda|^2}{4}I^*\hat{g}(\lambda,h,y;b)\right]\hat{g}(\lambda,h,y;\delta)\,dy
$$
$$
+\int_0^\infty e^{-ay}\left[\hat{g}_3'(\lambda,h,y;b)-\frac{|\lambda|^2}{4}I\hat{g}(\lambda,h,y;b)\right]\hat{g}(\lambda,h,y;b)\,dy.
$$

Последнее равенство с помощью леммы 6 можно записать следующим образом:

$$
\mathbf{F}(\hat{g})=\int_0^h\int_0^\infty e^{-ay}[\mathbf{L}^*\hat{g}(\lambda,x_3,y;b)]^2\,dydx_3+4b\int_0^h\int_0^\infty e^{-ay}[\hat{g}(\lambda,x_3,y;b)]^2\,dydx_3
$$
$$
+\frac{|\lambda|^4}{16a}\int_0^h\int_0^\infty e^{-ay}\left[\int_0^\infty e^{-a\eta}\hat{g}(\lambda,x_3,\eta;b)\,d\eta\right]\hat{g}(\lambda,x_3,y;b)\,dydx_3
$$
$$
-\frac{|\lambda|^2}{4}\int_0^\infty e^{-ay}(I+I^*)\hat{g}(\lambda,h,y;b)\hat{g}(\lambda,h,y;b)\,dy. \tag{35}
$$

С другой стороны, как следует из леммы 3, $\mathbf{F}(\hat{g})$ может быть представлен в виде

$$
\mathbf{F}(\hat{g})=\frac{1}{a}\int_0^h\hat{g}_0^2(\lambda,x_3;b)\,dx_3. \tag{36}
$$

Из (35) и (36) имеем

$$
\int_0^h\int_0^\infty e^{-ay}[\mathbf{L}^*\hat{g}(\lambda,x_3,y;b)]^2\,dydx_3+4b\int_0^h\int_0^\infty e^{-ay}[\hat{g}(\lambda,x_3,y;b)]^2\,dydx_3
$$
$$
+\frac{|\lambda|^4}{16a}\int_0^h\int_0^\infty e^{-ay}\left[\int_0^\infty e^{-a\eta}\hat{g}(\lambda,x_3,\eta;b)\,d\eta\right]\hat{g}(\lambda,x_3,y;b)\,dydx_3
$$
$$
=\frac{|\lambda|^2}{4}\int_0^\infty e^{-ay}(I+I^*)\hat{g}(\lambda,h,y;b)\hat{g}(\lambda,h,y;b)\,dy+\frac{1}{a}\int_0^h\hat{g}_0^2(\lambda,x_3;b)\,dx_3. \tag{37}
$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$
4b\int_0^h\int_0^\infty e^{-ay}\hat{g}^2(\lambda,x_3,y;b)\,dydx_3
$$
$$
\le\frac{|\lambda|^2}{4}\int_0^\infty e^{-ay}(I+I^*)\hat{g}(\lambda,h,y;b)\hat{g}(\lambda,h,y;b)\,dy+\frac{1}{a}\int_0^h\hat{g}_0^2(\lambda,x_3;b)\,dx_3. \tag{38}
$$

Из определения функций g, g_0 и (37), (38) следует, что

$$4b\int_0^h\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}g^2(x,y;b)\,d\bar{x}dydx_3$$
$$\le \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}(I+I^*)\Delta_{\bar{x}}g(\bar{x},h,y;b)g(\bar{x},h,y;b)\,d\bar{x}dy + \frac{1}{a}\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x;b)\,d\bar{x}dx_3. \tag{39}$$

При $y \in [0,1]$ из леммы 2 и (26), (28) вытекает, что

$$g(x,y;b) = e^{b(x_3-h)^2-bh^2}q(x,y), \tag{40}$$

$$g(\bar{x},h,y;b) = e^{-bh^2}q(\bar{x},h,y). \tag{41}$$

По условию теоремы $u \in C_0^3(\mathscr{A})$. Тогда из (41) и определения функции $q(x,y)$ по теореме об интегральном среднем получаем

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}(I+I^*)\Delta_{\bar{x}}g(\bar{x},h,y;b)g(\bar{x},h,y;b)d\bar{x}\,dy \le C_1e^{-2bh^2}, \tag{42}$$

где C_1 — некоторая постоянная.

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части неравенства (39):

$$\frac{1}{a}\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x;b)\,d\bar{x}dx_3.$$

Из леммы 1 и (27), (40) следует, что

$$g_0(x;b) = \int_0^1\int_{P(x)} K(x,\xi;b)g(\xi,y;b)\,d\xi dy, \tag{43}$$

где $K(x,\xi;b) = e^{b(x_3-\xi_3)(x_3+\xi_3-2h)}W_1(x,\xi)$; $0 \le \xi_3 \le x_3 \le h$. Как отмечено в лемме 1, функция W_1 непрерывна и зависит от функции W и ее производных.

Используя неравенство Буняковского — Шварца и теорему об интегральном среднем, из (43) получим

$$\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x;b)\,d\bar{x}dx_3 \le C_2\int_0^1\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} g^2(x,y;b)\,d\bar{x}dx_3dy,$$

где C_2 — некоторая постоянная. Учитывая, что $y \in [0,1]$, из последнего неравенства имеем

$$\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x;b)\,d\bar{x}dx_3 \le C_3\int_0^1\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}g^2(x,y;b)\,d\bar{x}dx_3dy, \tag{44}$$

где C_3 — некоторая постоянная.

Из (39), (42) и (44) с учетом очевидного неравенства

$$\int_0^1\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}g^2(x,y;b)\,d\bar{x}dx_3dy \le \int_0^\infty\int_0^h\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}g^2(x,y;b)\,d\bar{x}dx_3dy$$

получаем

$$(4b - C_4)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^h\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}g^2(x,y;b)d\bar{x}dx_3dy \le C_1e^{-2bh^2}, \tag{45}$$

где C_4 — постоянная.

Легко заметить, что функцию g можно представить в виде

$$g(x,y;b) = e^{b(x_3-h)^2-bh^2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle\lambda,\bar{x}\rangle}Q(\lambda,x_3,y)\,d\lambda, \tag{46}$$

Пусть функция u не равна тождественно 0. Тогда функция q (а следовательно, и функция g) не равна тождественно 0. Как вытекает из леммы 2 и (46), существует $\varepsilon \in (0;1)$ такое, что

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^h\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ay}g^2(x,y;b)\,d\bar{x}dx_3dy \ge C_5e^{-2bh^2\varepsilon}, \tag{47}$$

где C_5 — некоторая постоянная.

Из (45) и (47) следует, что при $b > C_4/4$ имеет место неравенство

$$e^{-2bh^2\delta} \ge C(b), \tag{48}$$

где $C(b) = (4b - C_4)C_5/C_1$, $\delta = 1-\varepsilon$, $0 < \delta < 1$.

Как легко заметить, всегда найдется такое $B > 0$, что неравенство (48) не выполняется при $b > B$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М.* Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 851–857.
2. *Бухгейм А. Л.* О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 1. С. 34–42.
3. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.
4. *Бегматов Акбар Х.* Об одном классе задач интегральной геометрии на плоскости // Докл. РАН. 1993. Т. 331, № 3. С. 261–262.
5. *Бегматов Акбар Х.* Редукция задачи интегральной геометрии в трехмерном пространстве к полисингулярному интегральному уравнению с возмущением // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 5. С. 583–585.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
7. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
9. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 15 сентября 1999 г.

г. Новосибирск