Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ r–РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В. Н. Тютянов

Аннотация: Получена следующая характеризации r-разрешимых групп:

Теорема. *Пусть G — конечная K-группа и r — нечетный простой делитель ее порядка. Тогда G r-разрешима в том и только том случае, если всякая пара r-элементов порождает r-разрешимую группу.* Библиогр. 12.

Введение и обозначения

Пусть G — конечная группа, r — простое число, делящее ее порядок. В [1] Глауберманом показано, что если силовская r-подгруппа группы G циклическая, то G r-разрешима тогда и только тогда, когда всякая пара элементов порядка r в G порождает r-разрешимую группу. В настоящей работе доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G — конечная K-группа и r — нечетный простой делитель ее порядка. Тогда G r-разрешима в том и только том случае, если всякая пара r-элементов порождает r-разрешимую группу.*

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемые обозначения, в основном, стандартны. Их можно найти в [2–4]. Под *K-группой* понимается группа, у которой все композиционные факторы — известные простые группы. Пусть G — конечная группа. Тогда $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка. Следуя [5], назовем *графом простых чисел* $\Gamma(G)$ группы G граф с множеством вершин $\pi(G)$ и ребрами, соединяющими пару вершин $p, q \in \pi(G)$ в том и только том случае, если G содержит элемент порядка pq. Множество связных компонент графа обозначим через $\{\pi_i \mid 1 \leq i \leq t(G)\}$. π_1 — связная компонента графа, содержащая число 2. Подгруппа H группы G называется *изолированной*, если $H \cap H^g$ равно 1 или H для всех $g \in G$, и $C_G(h) \subseteq H$ для всех $h \in H$.

Всюду, где речь идет о группах Шевалле нормального или скрученного типа, фиксируем следующие обозначения: Φ — система корней евклидова пространства соответствующей размерности (и соответствующего типа); Φ^+ — система положительных корней; Σ — система простых корней. Для корня $\alpha \in \Phi$ пусть X_α — соответствующая корневая подгруппа. Отметим также следующие подгруппы: $U = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $N_G(U) \supseteq H$ — подгруппа Картана, $B = UH$ — подгруппа Бореля и $N/H = W$ — группа Вейля, где $N \subseteq N_G(H)$. Любая подгруппа в G, содержащая B, называется *параболической.*

1. Предварительные сведения

Лемма 1. *Пусть p — простое число и G — конечная группа с циклической силовской p-подгруппой. Тогда G — p-разрешимая группа в том и только том случае, если всякая пара элементов порядка p порождает p-разрешимую группу.*

Доказательство см. в [1].

Пусть G — конечная простая группа лиевского типа над полем $GF(q)$, где $q = p^m$ и p — простое число; $\overline{G}$ — связная полупростая линейная алгебраическая группа над замыканием поля $GF(q)$; $\mathfrak{S}$ — алгебраический сюръективный эндоморфизм группы $\overline{G}$ такой, что $\overline{G}_{\mathfrak{S}}$ — конечная группа. Обозначим через $\overline{T}$ максимальный $\mathfrak{S}$-инвариантный тор в $\overline{G}$ и назовем образ пересечения $\overline{T} \bigcap \overline{G}_{\mathfrak{S}}$ при естественном гомоморфизме из $\overline{G}_{\mathfrak{S}}$ в фактор-группу $G = \overline{G}_{\mathfrak{S}}/Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}})$ *максимальным тором* в G.

Лемма 2. *Если π — связная компонента графа $\Gamma(G)$, не содержащая 2, то в G существует максимальный тор T такой, что*

(a) $\pi = \pi(T)$;

(b) *T — изолированная холлова π-подгруппа в G;*

(c) $(|T|, |C_G(t)|) = 1$ *для всякой инволюции $t \in G$;*

(d) $(|T|, |Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}})|) = 1$.

Обратно, если T — максимальный тор в G, удовлетворяющий условиям (c), (d), *то $\pi(T)$ есть связная компонента графа $\Gamma(G)$, не содержащая 2.*

Доказательство. См. [5, леммы 5 и 6].

Лемма 3. *Пусть $r \in \pi(T) \setminus \pi(Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}})) \neq \varnothing$, $|T| \equiv 1 \pmod 2$ и $R = O_r(T)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *для любого $x \in R^{\#}$ выполняется $C_G(x) \subseteq T$;*

(b) *число r взаимно просто с $|C_G(t)|$ для любой инволюции $t \in G$.*

Доказательство. См. [6, лемма 11].

Лемма 4. *Пусть $r \in \pi(T) \setminus \pi(Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}})) \neq \varnothing$. Если r не делит порядок никакой собственной параболической подгруппы группы G, то для любого r-элемента $x \in T^{\#}$ выполнено соотношение $C_G(x) \subseteq N_G(T) = N_G(O_r(T))$.*

Доказательство. См. [6, лемма 13].

Лемма 5. *Пусть X — группа, в которой $Y = F^*(X)$ — простая K-группа. Если X содержит сильно p-вложенную подгруппу для некоторого нечетного простого числа p, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) *X имеет циклические силовские p-подгруппы;*

(ii) $Y \cong L_2(p^m)$, $U_3(p^m)$, ${}^2G_2(3^m)$ *или* A_{2p};

(iii) $p = 3$ *и* $Y \cong L_3(4)$, $\mathrm{Aut}(L_2(2^3))$ *или* M_{11};

(iv) $p = 5$ *и* $Y \cong {}^2F_4(2)'$, $\mathrm{Aut}(Sz(2^5))$, Mc *или* Fi_{22};

(v) $p = 11$ *и* $Y \cong J_4$.

Доказательство. См. [7, теорема 4.250].

Определение. Пусть r — простое число, n — натуральное число, не меньшее 2; число r назовем *примитивным по отношению к паре* $\{p, n\}$, если r делит $p^n - 1$ и не делит $p^i - 1$ для любого $1 \leq i < n$.

Лемма 6. *Если r — простое число, примитивное по отношению к паре $\{p, n\}$, то $r \geq n + 1$.*

Доказательство следует из малой теоремы Ферма.

Лемма 7 [8]. 1. *Пусть G — группа Шевалле лиевского ранга n. Тогда параболические подгруппы группы G, содержащие ее подгруппу Бореля B, исчерпываются группами $G_I = \langle B, X_{-r_j} \mid j \notin I\rangle$, где $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.*

2. *Положим $Q_I = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$ и $r = \sum\limits_{j=1}^{n} m_j r_j$ с $m_i > 0$ для некоторого $i \in I >$ и $L_I = \langle X_{r_i}, X_{-r_i} \mid i \notin I\rangle$. Тогда*

(a) *$G_I = Q_I L_I H$ и H нормализует L_I;*

(b) *$Q_I = O_p(G_I)$ и $Q_I \cap L_I H = 1$;*

(c) *$N_G(Q_I) = G_I$;*

(d) *если $n \geq 2$, то L является центральным произведением групп Шевалле, каждая из которых находится по связной компоненте диаграммы, полученной из диаграммы Дынкина группы G отбрасыванием вершин, входящих в I.*

2. Минимальный контрпример

Всюду далее будем считать, что группа G — минимальный контрпример к теореме, r имеет тот же смысл, что и в формулировке теоремы.

(1) *G — простая неабелева группа.*

Доказательство. Пусть N — собственная минимальная нормальная подгруппа в G. Так как G — минимальный контрпример к теореме, то N и G/N — r-разрешимые группы. Поэтому группа G обладает нормальным рядом $1 = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = G$, в котором каждая фактор-группа L_{i+1}/L_i является либо r-группой, либо r'-группой. Следовательно, G — r-разрешимая группа. Последнее невозможно. Таким образом, G — простая неабелева группа.

(2) *Группа G не содержит секций, являющихся простыми неабелевыми группами, порядок которых делится на r.*

Доказательство очевидно.

(3) *Если G — группа лиевского типа, то $r \in \pi_1$.*

Доказательство. Пусть $r \in \pi_k$ для некоторого $k \geq 2$. Силовская r-подгруппа R группы G содержится в некотором максимальном торе T, который является сильно r-вложенной подгруппой группы G, что следует из леммы 2. Поэтому группа G является простой неабелевой группой из списка, приведенного в лемме 5. Из результата Глаубермана (лемма 1) вытекает, что случай (i) невозможен. Из [5, 9] заключаем, что в случаях (ii)–(v) $r \in \pi_1$. Противоречие с тем, что $r \in \pi_k$ для $k \geq 2$.

(4) *Пусть G — группа лиевского типа и r не делит порядок любой собственной параболической подгруппы G. Тогда $(r, |Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}})|) = 1$.*

Доказательство. Пусть $r \in \pi(Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}}))$. Так как r — нечетное число, то во всех случаях, за исключением, быть может, $G \in \{{}^2A_2(q), {}^2A_3(q)\}$, r делит порядок подгруппы Картана группы G. Если $G \cong {}^2A_2(q)$, то в этом случае $r = 3$. Группа ${}^2A_2(q)$ содержит собственную подгруппу $A_1(q)$, порядок которой делится на 3. Если $G \ncong {}^2A_2(3)$, то подгруппа $A_1(q)$ неразрешима. Противоречие с (2). Поэтому $G \cong {}^2A_2(3)$. Группа ${}^2A_2(3)$ содержит секцию $L_3(2)$. Снова получаем противоречие с (2). Таким образом, $G \cong {}^2A_3(q)$. В этом случае $|Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}})| = 4$. Так как r — нечетное число, этот случай невозможен. Утверждение доказано.

(5) *Пусть G — простая группа лиевского типа над полем четной характеристики. Тогда r делит порядок некоторой собственной параболической подгруппы в G.*

Доказательство. Предположим, что r не делит порядок никакой собственной параболической подгруппы в G. Рассмотрим максимальный тор T, порядок которого делится на r. Если $|T| \equiv 0 \pmod 2$, то порядок некоторой 2-локальной подгруппы в G делится на r. По теореме Бореля — Титса r делит порядок некоторой параболической подгруппы в G. Таким образом, $|T|$ — нечетное число и $(r, |C_G(t)|) = 1$ для всякой инволюции $t \in G$. Согласно (4) $r \in \pi(T) \setminus \pi(Z(\overline{G}_{\mathfrak{S}}))$. Из леммы 3 заключаем, что для всякого $x \in O_r(T)^{\#}$ имеем $C_G(x) \subseteq T$. Поэтому максимальный тор T является сильно r-вложенной подгруппой в группе G лиевского типа четной характеристики. Из лемм 1 и 5 следует, что либо $r = 3$ и $G \cong L_3(4)$, либо $r = 5$ и $G \cong {}^2F_4(2)'$. В первом случае группа G содержит секцию $L_2(4)$; во втором — секцию $L_2(25)$. Получаем противоречие с (2).

(6) *Пусть G — группа лиевского типа нечетной характеристики и W — ее подгруппа Вейля. Если r не делит порядок любой собственной параболической подгруппы группы G, то $(|W|, r) = r$.*

Доказательство. Пусть $(|W|, r) = 1$. Тогда силовская r-подгруппа R группы G является абелевой [10, утверждение 5.19(b), с. 186]. Пусть T — максимальный тор, который содержит R. Согласно (4) и лемме 4 тор T является сильно r-вложенной подгруппой группы G. Из леммы 5 следует, что либо силовская r-подгруппа в G циклическая, либо $G \in \{L_2(r^m); U_3(r^m); {}^2G_2(3^m), r = 3\}$. Первый случай исключается леммой 1; во втором r делит порядок собственной параболической подгруппы группы G, что невозможно.

(7) *Пусть G — простая группа лиевского типа над полем нечетной характеристики. Тогда r делит порядок некоторой собственной параболической подгруппы группы G.*

Доказательство. Необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. $G \cong A_n(q)$, $q = p^f$ — нечетное число.

Очевидно, $r \nmid (q-1)$. Группа $A_n(q)$ содержит собственную параболическую подгруппу P такую, что $P/O_p(P) \cong A_{n-1}(q)$. Поэтому $r \mid (q^{n+1} - 1)$ и $r \nmid (q^{i+1} - 1)$ для всех $1 \le i \le n-1$. Имеем

$$q^i - 1 = p^{fi} - 1 = (p^i)^f - 1 = s^f - 1 = (s-1)f(s) = (p^i - 1)f(p^i),$$

где $s = p^i$; $f(x)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Значит, $r \nmid (p^i - 1)$ для всех $1 \le i \le n$. Таким образом, r примитивно по отношению к паре $\{p, n+1\}$, поэтому согласно лемме 6 $r \ge n+2$. Порядок группы Вейля W группы $A_n(q)$ есть $(n+1)!$, следовательно, $(|W|, r) = 1$. Противоречие с (6).

2. $G \cong B_n(q)$.

Группа $B_n(q)$ содержит собственную параболическую подгруппу P такую, что $P/O_p(P) \cong B_{n-1}(q)$. Следовательно, $r \mid (q^{2n} - 1)$ и $r \nmid (q^{2i} - 1)$ для всех $1 \le i \le n-1$. Далее, $q^{2i} - 1 = (q^i - 1)(q^i + 1)$, поэтому $r \nmid (q^i - 1)$ для всех $1 \le i \le n-1$. Если $r \mid (q^n - 1)$, то r примитивно по отношению к паре $\{p, n\}$ и в силу леммы 6 $r \ge n+1$. Если $r \nmid (q^n - 1)$, то, так как $r \mid (q^{2n} - 1)$, найдется такое наименьшее натуральное $s > n$, для которого $r \mid (q^s - 1)$ и снова $r \ge n+1$. Порядок группы Вейля W группы $B_n(q)$ есть $2^n n!$, поэтому $(|W|, r) = 1$. Противоречие с (6).

3. $G \cong C_n(q)$.

Дословное повторение рассуждений предыдущего пункта.

4. $G \cong D_n(q)$, $n \ge 4$.

Очевидно, $r \nmid (q-1)$. Далее,

$$|D_n(q)| = \frac{q^n-1}{(4,q^n-1)} q^{n(n+1)} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$$

и группа $D_n(q)$ содержит собственную параболическую подгруппу P такую, что $P/O_p(P) \cong A_{n-1}(q)$, поэтому $r \nmid (q^n-1)$. Группа $D_n(q)$ содержит подгруппу $B_{n-1}(q)$ [11] и

$$|B_{n-1}(q)| = \frac{q^{(n-1)^2}}{(2,q-1)} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

Так как $n \geq 4$, то $B_{n-1}(q)$ — простая группа. Отсюда заключаем, что

$$r \nmid \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1),$$

а следовательно, $r \nmid |D_n(q)|$. Противоречие.

5. $G \cong {}^2A_n(q)$, $q = p^f$ и $n \geq 2$.

Имеем

$$|{}^2A_n(q)| = \frac{1}{(n+1,q+1)} q^{n(n+1)/2} \prod_{i=1}^{n}(q^{i+1}-(-1)^{i+1}).$$

Группа ${}^2A_n(q)$ содержит подгруппу ${}^2A_{n-1}(q)$ [11]. Если $n = 2k$, то

$$|{}^2A_{n-1}(q)| = \frac{1}{(n,q+1)} q^{n(n-1)/2}(q^2-1)(q^3+1)\dots(q^n-1).$$

Пусть ${}^2A_{n-1}(q) \ncong {}^2A_1(3)$. Тогда в силу (2) $r \nmid |{}^2A_{n-1}(q)|$ и согласно лемме 6 $r \geq n/2+2$. Порядок группы Вейля W группы ${}^2A_n(q)$ равен $2^{n/2}(n/2)!$. Следовательно, $(|W|, r) = 1$. Противоречие с (6). Поэтому $G \cong {}^2A_2(3)$. В этом случае $r = 7$, а силовская 7-подгруппа в ${}^2A_2(3)$ циклическая. Противоречие с леммой 1. Таким образом, $n = 2k+1 \geq 3$. Имеем

$$|{}^2A_{n-1}(q)| = \frac{1}{(n,q+1)} q^{n(n-1)/2}(q^2-1)(q^3+1)\dots(q^n+1).$$

Так как $n-1 \geq 2$ и q — нечетное число, то согласно (2) $r \nmid |{}^2A_{n-1}(q)|$. В силу леммы 6 $r \geq (n-1)/2+2 = n/2+3/2$. Поскольку $|W| = 2^{(n+1)/2}((n+1)/2)!$, то $(|W|, r) = 1$. Противоречие с (6).

6. $G \cong {}^2D_n(q)$, $n \geq 4$.

Имеем

$$|{}^2D_n(q)| = \frac{1}{(4,q^n+1)} q^{n(n-1)}(q^n+1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

Группа ${}^2D_n(q)$ содержит подгруппу $B_{n-1}(q)$ [11] и

$$|B_{n-1}(q)| = \frac{1}{(2,q-1)} q^{(n-1)^2} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

Так как $n-1 \geq 3$, а q — нечетное число, то в силу (2)

$$r \nmid \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

Из леммы 6 заключаем, что $r \geq n+1$. Порядок подгруппы Вейля W группы ${}^2D_n(q)$ равен $2^{n-1}(n-1)!$, поэтому $(|W|, r) = 1$. Противоречие с (6).

7. $G \cong G_2(q)$.

В этом случае согласно (6) $r = 3$. Группа $G_2(q)$ содержит секцию $L_3(q)$, порядок которой делится на 3. Противоречие с (2).

8. $G \cong {}^2G_2(q)$.

Так как порядок подгруппы Вейля в ${}^2G_2(q)$ равен 2, а r — нечетное число, то в силу (6) этот случай невозможен.

9. $G \cong F_4(q)$.

Из (6) следует, что $r = 3$. Группа $F_4(q)$ содержит подгруппу $L_3(q)$, порядок которой делится на 3. Противоречие с (2).

10. $G \cong E_6(q)$.

Согласно (6) $r \in \{3, 5\}$. Группа $E_6(q)$ содержит максимальную параболическую подгруппу P такую, что $P/O_p(P) \cong A_5(q)$. Очевидно, $3 \mid |A_5(q)|$. Поэтому $r = 5$. Так как $(q^4 - 1) \mid |A_5(q)|$, по малой теореме Ферма $5 \in \pi(A_5(q))$. Противоречие с (2).

11. $G \cong {}^2E_6(q)$.

Ввиду (6) $r = 3$. Группа ${}^2E_6(q)$ содержит подгруппу ${}^2A_2(q)$, порядок которой делится на 3. Противоречие с (2).

12. $G \cong E_7(q)$.

Согласно (6) $r \in \{3, 5, 7\}$. Если $r \in \{3, 5\}$, то рассуждаем, как в п. 10. Поэтому $r = 7$. Этот случай исключается наличием подгруппы $A_6(q)$, порядок которой делится на 7.

13. $G \cong E_8(q)$.

Дословное повторение рассуждений предыдущего пункта.

(8) *Пусть G — группа Ли нормального типа характеристики p, лиевский ранг которой не меньше двух. Если $(r, p) = 1$, то $r = 3$.*

Доказательство. Пусть $r \geq 5$ и L — собственная параболическая подгруппа в G, порядок которой делится на r. Ее существование следует из (5) и (7). Из леммы 7 вытекает, что для L имеет место разложение Леви $L = O_p(L)(L_I H)$. Так как $(r, p) = 1$, то $r \mid |L_I H|$.

Покажем, что $r \in \pi(q-1)$, где $q = p^m$ — порядок поля Галуа, над которым определена группа G. Если $r \mid |Z(L_I)|$, то $r \in \pi(q-1)$, так как $r \geq 5$ (см. [2, с. 491]). Поэтому $(r, |Z(L_I)|) = 1$. Рассмотрим фактор-группу

$$L_I H / Z(L_I) = \overline{L}_I \overline{H} = (\overline{L}_1 \times \ldots \times \overline{L}_k)\overline{H}.$$

Если $r \mid |\overline{L}_j|$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$, то, так как $r \geq 5$, заключаем, что $\overline{L}_j$ — простая неабелева группа (лемма 7(d)). Это невозможно в силу (2). Следовательно, $r \mid |\overline{H}|$, поэтому $r \in \pi(q-1)$.

Группа G содержит собственную подгруппу $A_1(q) \cong \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$, где $\alpha \in \Phi^+$ и $|A_1(q)| = q(q-1)(q+1)$. Поскольку $r \geq 5$ и $r \in \pi(q-1)$, то $A_1(q)$ — неразрешимая группа. Теперь противоречие следует из (2). Таким образом, $r = 3$.

(9) *Минимальный контрпример к теореме не может быть группой Ли нормального типа нечетной характеристики p, если $(r, p) = 1$.*

Доказательство. Если лиевский ранг G больше одного, то согласно (8) $r = 3$. Группа G содержит собственную подгруппу $A_1(p^m)$, где $m \geq 1$. Очевидно, $A_1(p^m)$ — неразрешимая группа и $3 \mid |A_1(p^m)|$. Противоречие с (2).

Следовательно, лиевский ранг G равен единице и $G \cong A_1(p^m)$. В этом случае r-силовская подгруппа в G циклическая. Противоречие с леммой 1.

(10) *Минимальный контрпример не может быть группой Ли нормального типа четной характеристики.*

Доказательство. Если лиевский ранг группы G не меньше двух, то согласно (8) $r = 3$. Группы $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ и $D_n(q)$, $n \geq 4$, исключаются наличием у них подгруппы $A_2(q)$. Группа $F_4(q)$ содержит подгруппу $B_4(q)$ [11]. Противоречие с (2). Группа $G_2(q)$ исключается наличием у нее подгруппы $A_2(q)$ [11]. Пусть $G \cong A_n(q)$. При $n = 1$ силовские подгруппы нечетного порядка в G циклические. Противоречие с леммой 1. Если $n \geq 2$ и $q > 2$, то G содержит подгруппу $A_1(q)$. Противоречие с (2). Поэтому $G \cong A_2(2)$, силовские 3-подгруппы которой циклические. Противоречие с леммой 1. Осталось рассмотреть случай $G \cong C_n(q)$, $n \geq 2$. Если $q \geq 4$, то группа $C_n(q)$ содержит простую подгруппу $A_1(q)$. Противоречие с (2). Поэтому $q = 2$. При $n \geq 3$ группа $C_n(2)$ содержит собственную подгруппу $C_2(2)$, что невозможно. Следовательно, $G \cong C_2(2)' \cong A_6$. Так как G содержит подгруппу A_5, этот случай невозможен в силу (2).

(11) *Пусть $G \in \{^2A_n(q),\ n \geq 2;\ ^2D_n(q),\ n \geq 4;\ ^2E_6(q)\}$, где $q = p^m$. Если $(r, p) = 1$, то G не является минимальным контрпримером к теореме.*

Доказательство. Пусть $G \cong {}^2A_n(q)$, $n \geq 2$. Если $n \geq 3$, то согласно [11] группа G содержит подгруппу $C_2(q)$. Имеем $|C_2(q)| = q^4(q^2 - 1)(q^4 - 1)$. Из (2) следует, что $r \notin \pi(C_2(q))$. По малой теореме Ферма $3, 5 \in \pi(C_2(q))$. Поэтому $r \geq 7$. Теперь так же, как в (8), устанавливается, что $r \in \pi(q^2-1)$. Это противоречит тому, что $r \notin \pi(C_2(q))$. Таким образом, $n = 2$. Все параболические подгруппы в ${}^2A_2(q)$ исчерпываются подгруппами Бореля B. Имеем

$$|B| = \frac{q^3}{(3, q+1)}(q^2 - 1).$$

Поэтому $r \in \pi(q^2-1)$. Если q является четным числом, то $q \geq 4$, так как ${}^2A_2(2)$ — разрешимая группа. Группа ${}^2A_2(q)$ содержит подгруппу $A_1(q)$, и $|A_1(q)| = q(q^2-1)$. Так как $q \geq 4$, то $A_1(q)$ — простая группа и $r \in \pi(A_1(q))$. Противоречие с (2). Поэтому, q — нечетное число. Если $q \neq 3$, то группа G содержит неразрешимую подгруппу $A_1(q)$ и $r \in \pi(A_1(q))$. Противоречие с (2). Следовательно, $G \cong {}^2A_2(3)$ и $r = 7$. Силовская 7-подгруппа у ${}^2A_2(3)$ циклическая. Противоречие с леммой 1.

В оставшихся случаях показывается, как и выше, что $r \in \pi(q^2-1)$. Случай $G \cong {}^2D_n(q)$, $q \geq 4$, исключается наличием у ${}^2D_n(q)$ неразрешимой подгруппы $B_3(q)$ [11], порядок которой делится на $q^2 - 1$, случай $G \cong {}^2E_6(q)$ — наличием подгруппы $F_4(q)$ [11], порядок которой делится на $q^2 - 1$.

3. Доказательство теоремы

Рассмотрим случай, когда G не является группой лиевского типа.

Пусть сначала G — простая группа Ли над полем четной характеристики. Из (10), (11) и результатов А. С. Кондратьева [9] следует, что возможен один из следующих случаев:

(a) $G \cong {}^2F_4(2)'$; $t(G) = 2$.

Согласно (3) $r \in \pi_1 = \{2, 3, 5\}$. Группа ${}^2F_4(2)'$ содержит секцию $L_2(25)$. Это невозможно в силу (2).

(b) $G \cong {}^3D_4(q)$; $t(G) = 2$.

В силу (3) $r \in \pi_1 = \pi(2(q^6 - 1))$. Группа ${}^3D_4(q)$ содержит подгруппу $G_2(q)$ [11] порядка $q^6(q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Противоречие с (2).

(c) $G \cong {}^2B_2(q)$, $q > 2$; $t(G) > 2$.

Согласно (3) $r \in \pi_1 = \{2\}$. Так как r — нечетное число, этот случай невозможен.

(d) $G \cong {}^2F_4(q)$, $q > 2$; $t(G) > 3$.

Ввиду (3) $r \in \pi_1 = \pi(2(q^3 + 1)(q^4 - 1))$. Группа ${}^2F_4(q)$ содержит собственные подгруппы ${}^2A_2(q)$ и ${}^2B_2(q)$ порядков $q^3(q^2 - 1)(q^3 + 1)$ и $q^2(q^2 + 1)(q^3 - 1)$ соответственно. Поэтому $r \in \pi({}^2A_2(q)) \cup \pi({}^2B_2(q))$. Противоречие с (2).

Завершает доказательство теоремы рассмотрение групп лиевского типа над полем нечетной характеристики p. Сначала рассмотрим случай, когда $r = p$.

1. $G \cong A_n(q)$, $n \geq 1$.

Пусть $n \geq 2$. Если $G \ncong A_2(3)$, то она содержит собственную подгруппу $A_1(q)$, которая неразрешима. Противоречие с (2). Следовательно, $G \cong A_2(3)$. Группа $SL_3(3)$ содержит элементы

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x^3 = y^3 = 1.$$

Имеем

$$xy = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (xy)^8 = 1; \quad xy^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (xy^2)^{13} = 1.$$

Таким образом, $\langle x, y \rangle = SL_3(3) \cong L_3(3)$, что невозможно. При $n = 1$ противоречие получается из теоремы 2.8.4 [2].

2. $G \cong C_n(q)$, $n \geq 2$.

В этом случае группа G содержит собственную подгруппу $C_{n-1}(q)$. Если $G \ncong PSp_4(3)$, то $C_{n-1}(q)$ является неразрешимой группой. Противоречие с (2). Поэтому $G \cong PSp_4(3) \cong PSU_4(2)$ содержит параболическую подгруппу P, для которой $P/O_2(P) \cong A_5$. Последнее невозможно в силу (2).

3. $G \cong B_n(q)$, $n \geq 3$.

Группа $B_n(q)$ содержит собственную подгруппу $G_2(q)$ ($n = 3$) [11], или $D_n(q)$ ($n \geq 4$) [11]. Противоречие с (2).

4. $G \cong D_n(q)$, $n \geq 4$.

Группа G содержит подгруппу $A_3(q)$. Противоречие с (2).

5. $G \cong G_2(q)$.

Группа G содержит собственную подгруппу $A_2(q)$ [11]. Противоречие с (2).

6. $G \cong F_4(q)$.

В группе $F_4(q)$ имеется собственная подгруппа $B_4(q)$ [11]. Противоречие с (2).

7. $G \in \{E_6(q), E_7(q), E_8(q)\}$.

Группа G содержит секцию, изоморфную $A_2(q)$. Противоречие с (2).

8. $G \cong {}^2A_n(q)$, $n \geq 2$.

Если $n = 2l - 1$, то $l \geq 2$. Из [11] следует, что группа G содержит собственную подгруппу $C_2(2)$. Противоречие с (2). Поэтому $n = 2l$ и $l \geq 1$. При $l = 1$ группа G содержит собственную подгруппу $A_1(q)$. Если $q \neq 3$, то получим противоречие с (2). Следовательно, $G \cong PSU(3, 3)$. Группа $PSU(3, 3)$ содержит собственную подгруппу $L_3(2)$, что невозможно в силу (2). При $l \geq 2$ группа G содержит подгруппу ${}^2A_{2l-1}(q)$ [11]. Противоречие с (2).

9. $G \cong {}^2D_n(q)$, $n \geq 4$.

Группа G содержит собственную подгруппу $B_{n-1}(q)$ [11]. Противоречие с (2).

10. $G \cong {}^2G_2(3^{2k+1})$.

Пусть $k \geq 1$ и t — инволюция в G. Тогда $C_G(t) \cong 2 \times L_2(3^{2k+1})$. Противоречие с (2). Поэтому $G \cong {}^2G_2(3)' \cong L_2(8)$ имеет циклическую силовскую 3-подгруппу. Противоречие с леммой 1.

11. $G \cong {}^2E_6(q)$.

Группа G содержит собственную подгруппу $F_4(q)$ [11]. Противоречие с (2).

12. $G \cong {}^3D_4(q)$.

В группе ${}^3D_4(q)$ имеется собственная подгруппа $G_2(q)$ [11]. Противоречие с (2).

Таким образом, $r \neq p$. Из (9), (11) и [5] следует, что имеет место один из следующих случаев.

(a) $G \cong {}^3D_4(q)$; $t(G) = 2$.

Согласно (3) $r \in \pi_1 = \pi(q(q^6-1))$. Группа ${}^3D_4(q)$ содержит подгруппу $G_2(q)$ [11] порядка $q^6(q^6-1)(q^2-1)$. Противоречие с (2).

(b) $G \cong {}^2G_2(3^{2k+1})$, $q = 3^{2k+1} > 3$; $t(G) = 3$.

Группа ${}^2G_2(q)$ содержит один класс параболических подгрупп $[q^3] : (q-1)$. Поэтому ввиду (7) $r \in \pi(q-1)$. Группа ${}^2G_2(q)$ содержит подгруппу $A_1(q)$ [12], которая неразрешима, так как $q > 3$. Поскольку $r \in \pi(A_1(q))$, получаем противоречие с (2).

Рассмотрим случай, когда G не является спорадической группой.

1. $G \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, J_3, Co_2, Co_3, HS, M^cL, Suz, Ly, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, F_5\}$.

Согласно лемме 1 $r \in \{3, 5\}$. Группы данного списка содержат секцию A_5 [4]. Противоречие с (2).

2. $G \cong J_1$.

В группе J_1 все силовские подгруппы нечетного порядка циклические, что невозможно в силу леммы 1.

3. $G \cong J_4$.

Ввиду леммы 1 $r \in \{3, 11\}$. Группа J_4 содержит секцию, изоморфную M_{22} [4]. Противоречие с (2).

4. $G \in \{Co_1, He, Fi'_{22}, F_2, F_3\}$.

Согласно лемме 1 $r \in \{3, 5, 7\}$. Группы данного списка содержат соответственно секции $\{A_9, A_7, A_7, A_9, A_{22}\}$ [4]. Противоречие с (2).

5. $G \cong O'N$.

В силу леммы 1 $r \in \{3, 7\}$. Группа $O'N$ содержит секцию $L_3(7)$ [4], что противоречит (2).

6. $G \cong F_1$.

Согласно лемме 1 $r \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Группа F_1 содержит секцию A_{13} [4]. Противоречие с (2).

Рассмотрим случай, когда G не является знакопеременной группой.

Пусть $G \cong A_m$, где $m \geq 5$. Если $m = r$, то силовские r-подгруппы у A_m циклические. Это невозможно в силу леммы 1. Поэтому $m > r$. В этом случае группа A_m содержит собственную подгруппу A_r. При $r > 3$ группа A_r является простой. Это невозможно в силу (2). Таким образом, $r = 3$. Если $m \geq 6$, то A_m содержит собственную подгруппу A_5. Противоречие с (2). Следовательно, $m = 5$. Группа A_5 есть $\langle(1, 2, 3), (3, 4, 5)\rangle$, что противоречит условию теоремы.

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauberman G.* A characterization of the Suzuki group. Ill // J. Math. 1968. V. 12. P. 76–98.
2. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.
3. *Carter W. R.* Simple groups of Lie type. London: Wiley-Interscience, 1972.
4. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* An atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
5. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69. P. 487–513.
6. *Kazarin L. S.* Product of two solvable groups // Com. Algebra. 1986. V. 14, N 6. P. 1001–1066.
7. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
8. *Curtis R. T., Kantor W. M., Seitz G. M.* The 2-transitive permutation representations of the finite Chevalley groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 1–59.
9. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
10. *Семинар* по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973.
11. *Stensholt E.* Certain embedding among finite groups of Lie type // J. Algebra. 1978. V. 53. P. 136–187.
12. *Kleidman P.* The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, Ree groups ${}^2G_2(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. V. 117. P. 30–71.

Статья поступила 28 мая 1998 г.

г. Гомель