Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.11

О ТИПАХ СХОДСТВА И РЕКУРСИВНОГО ИЗОМОРФИЗМА ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. Литвинов

Аннотация: Частично рекурсивную функцию, отличную от пустой (т. е. нигде не определенной) функции и функций-констант, тип сходства которой совпадает с типом рекурсивного изоморфизма, назовем *t-функцией.* Доказано, что область значений любой t-функции представляет собой натуральный ряд и что уровни t-функции рекурсивно изоморфны. Библиогр. 2.

Через $\mathbb{N}$ обозначим множество всех целых неотрицательных чисел. Если $A \subseteq \mathbb{N}$, то $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A$. Под функцией понимаем одноместную частично рекурсивную функцию (ЧРФ). Обозначать ЧРФ будем греческим буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, а рекурсивные функции — латинскими: $f, g, h, \dots$. Через $\delta\alpha$ обозначим область определения, а через $\rho\alpha$ — область значений функции α. Будем писать $\alpha(x) \uparrow$, если α не определена в точке x. Множество $\{x \mid \alpha(x) = a\}$ назовем *a-уровнем* функции α (обозначение α^a). На множестве всех ЧРФ введем два отношения: сходства и рекурсивного изоморфизма. Будем говорить, что функция α *сходна* с функцией β (обозначение $a \sim \beta$), если существуют рекурсивные перестановки f и g такие, что $\alpha = f^{-1}\beta g$; функция α *рекурсивно изоморфна* функции β (обозначение $\alpha \equiv \beta$), если $\alpha = f^{-1}\beta f$ для некоторой рекурсивной перестановки f. Оба введенных отношения являются, очевидно, отношениями эквивалентности. Классы эквивалентных элементов по эквивалентности $\sim$ назовем *типами сходства*, а по эквивалентности $\equiv$ — *типами рекурсивного изоморфизма.*

Если две функции рекурсивно изоморфны, то они, очевидно, сходны. Обратное, вообще говоря, не верно. Таким образом, типы сходства распадаются на типы рекурсивного изоморфизма. Х. Роджерсом в [1] поставлена проблема: какие типы сходства состоят из единственного типа рекурсивного изоморфизма? В настоящее время известно три таких типа: тип пустой (т. е. нигде не определенной) функции, тип всех функций-констант и тип всех универсальных функций.

Определение. ЧРФ, отличную от пустой функции и функций-констант, тип сходства которой совпадает с типом рекурсивного изоморфизма, назовем *t-функцией.*

t-Функции изучались Е. А. Поляковым в [2]. В частности, им было показано, что если α — t-функция и $\delta\alpha$ не просто, то $\rho\alpha = \mathbb{N}$. В настоящей статье этот результат распространен на случай, когда $\delta\alpha$ — простое множество, а также доказано, что уровни любой t-функции рекурсивно изоморфны.

Лемма 1. *Пусть* α — ЧРФ. *Тогда свойство* $\overline{\delta\alpha} \subseteq \rho\alpha$ *инвариантно относительно рекурсивного изоморфизма (рекурсивно инвариантно).*

Доказательство. Имеем $\overline{\delta\alpha} \subseteq \rho\alpha \Leftrightarrow (\forall x)(\alpha(x)\uparrow \Rightarrow (\exists y)(\alpha(y) = x))$. Пусть f — произвольная рекурсивная перестановка и

$$f^{-1}\alpha f(x)\uparrow \Rightarrow \alpha(f(x))\uparrow \Rightarrow \exists y(\alpha(y) = f(x)).$$

Получаем $f^{-1}\alpha f(z) = x$ при $z = f^{-1}(y)$.

Предложение 1. *Пусть* α — t*-функция. Тогда* $\delta\alpha$ *просто* $\Rightarrow \rho\alpha = \mathbb{N}$.

Доказательство. Допустим, что $\rho\alpha \neq \mathbb{N}$. Имеют место два случая.

Случай 1: $\overline{\delta\alpha} \subseteq \rho\alpha$. Пусть $a \in \overline{\delta\alpha}$, $b \in \overline{\rho\alpha}$. Определим рекурсивную перестановку

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = a; \\ a, & \text{если } x = b; \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $\beta = \alpha f$. Тогда вопреки лемме 1 $\overline{\delta\beta} \nsubseteq \rho\beta$.

Случай 2: $\overline{\delta\alpha} \nsubseteq \rho\alpha$. Пусть $A = \delta\alpha \cap \rho\alpha$. Так как $\delta\alpha$ — простое множество, а $\rho\alpha$ бесконечное (см. [2]), то A — бесконечное РП множество. Пусть B — бесконечное рекурсивное подмножество A, а f — рекурсивная перестановка такая, что $f(B) = \overline{B}$. Определим $\beta = \alpha f$. Тогда $x \in \overline{\delta\beta} \Rightarrow f(x) \in \overline{\delta\alpha} \Rightarrow x \in f^{-1}(\overline{\delta\alpha})$. Так как $\overline{\delta\alpha} \subseteq \overline{B}$, а $B \subseteq \rho\alpha$, то $f^{-1}(\overline{\delta\alpha}) \subseteq \rho\alpha \Rightarrow x \in \rho\alpha = \rho\beta \Rightarrow \overline{\delta\beta} \subseteq \rho\beta$, что противоречит лемме 1.

Следствие 1. α — t*-функция* $\Rightarrow \rho\alpha = \mathbb{N}$.

Доказательство непосредственно следует из доказанного предложения и заключительного результата [2].

Определение. Пусть α — ЧРФ, A — произвольное РП множество, а ЧРФ β такова, что

$$(a, b) \in \beta \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha \wedge \alpha^b \equiv A$$

(здесь запись $(a, b) \in \alpha$ эквивалентна записи $\alpha(a) = b$). Тогда β назовем A-*подфункцией* функции α (обозначение $\beta \subseteq_A \alpha$). Иначе говоря, β — это подфункция α, область определения которой содержит все уровни функции α, рекурсивно изоморфные A.

Легко видеть, что для всякого фиксированного РП множества A найдется не более одной A-подфункции функции α. Действительно, если $\beta_1 \subseteq_A \alpha$, $\beta_2 \subseteq_A \alpha$, то

$$(a, b) \in \beta_1 \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha \wedge \alpha^b \equiv A \Leftrightarrow (a, b) \in \beta_2.$$

Отметим также, что для любой непустой ЧРФ α найдется по крайней мере одна непустая ЧРФ β такая, что $\beta \subseteq_A \alpha$ для некоторого РП множества A.

Лемма 2. *Пусть* α — ЧРФ, f, g — *рекурсивные перестановки. Тогда* $(\forall a)((f^{-1}\alpha g)^a \equiv \alpha^{f(a)})$.

Доказательство. Имеем

$$x \in (f^{-1}\alpha g)^a \Leftrightarrow f^{-1}\alpha g(x) = a \Leftrightarrow \alpha g(x) = f(a) \Leftrightarrow x \in (\alpha g)^{f(a)}$$
$$\Leftrightarrow g(x) \in \alpha^{f(a)} \Leftrightarrow x \in g^{-1}(\alpha^{f(a)}).$$

Лемма 3. *Пусть* α — ЧРФ; $\alpha' \subseteq_A \alpha$. *Тогда*

1) *любая функция* β', *сходная с* α', *является* A-*подфункцией некоторой функции* β, *сходной с* α, *т. е.* $(\forall\beta')(\exists\beta)(\beta' \sim \alpha' \Rightarrow \beta \sim \alpha \wedge \beta' \subseteq_A \beta)$;

2) *любая функция* β, *рекурсивно изоморфная* α, *содержит* A-*подфункцию* β', *рекурсивно изоморфную* α', *т. е.* $(\forall\beta)(\exists\beta')(\beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta' \equiv \alpha' \wedge \beta' \subseteq_A \beta)$.

Доказательство. 1. Пусть $\beta' \sim \alpha'$. Тогда $\beta' = f^{-1}\alpha' g$ для некоторых рекурсивных перестановок f и g. Определим $\beta = f^{-1}\alpha g$, $\beta \sim \alpha$. Осталось показать, что $\beta' \subseteq_A \beta$.

Пусть $(a,b) \in \beta' \Rightarrow (g(a), f(b)) \in \alpha'$. Так как α' — A-подфункция α, то $(g(a), f(b)) \in \alpha \wedge \alpha^{f(b)} \equiv A$. Из определения функции β и леммы 2 получаем, что $(a,b) \in \beta \wedge b^b \equiv A$.

Обратно,

$$(a,b) \in \beta \wedge \beta^b \equiv A \Rightarrow (g(a), f(b)) \in \alpha \wedge \alpha^{f(b)} \equiv A \\ \Rightarrow (g(a), f(b)) \in \alpha' \Rightarrow (a,b) \in \beta'.$$

2. Пусть $\beta \equiv \alpha$. Тогда $\beta = f^{-1}\alpha f$ для некоторой рекурсивной перестановки f. Определим $\beta' = f^{-1}\alpha' f$, $\beta' \equiv \alpha'$. Рассуждая, как и при доказательстве п. 1, получаем, что $\beta' \subseteq_A \beta$.

Предложение 2. *Пусть* α' — *непустая* A-*подфункция* t-*функции* α. *Тогда* $\alpha' = \alpha$.

Доказательство. Покажем, что α' является t-функцией. Тогда из того, что $\rho a' = \rho\alpha = \mathbb{N}$, и определения A-подфункции, очевидно, будет следовать нужное предложение.

Пусть $\beta' \sim \alpha'$. В силу п. 1 леммы 3 $(\exists\beta)(\beta \sim \alpha \wedge \beta' \subseteq_A \beta)$, $\alpha - t$ — функция $\Rightarrow \beta \equiv \alpha$. Ввиду п. 2 леммы 3 $(\exists\beta'')(\beta'' \equiv \alpha' \wedge \beta'' \subseteq_A \beta)$. Как отмечено выше, для фиксированного РП множества A найдется не более одной A-подфункции функции α. Следовательно, $\beta' = \beta''$ и $\beta' \equiv \alpha'$. По условию α' не пустая, а так как α' — подфункция t-функции, то она и не функция-константа. Значит, α' — t-функция.

Следствие 2. α — t-*функция* $\Rightarrow (\forall a)(\forall b)(\alpha^a \equiv \alpha^b)$.

Доказательство очевидно.

Следствие 3. α — t-*функция* $\Rightarrow (\forall a)$ (α^a *бесконечно*).

Доказательство. Если α^a конечно и содержит n элементов, то согласно следствию 2 любой уровень α содержит n элементов. Тогда множество $\{x \mid \alpha(x) = x\}$, очевидно, является рекурсивным, что не верно для t-функций (см. [2]).

Автор благодарит Е. А. Полякова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
2. *Поляков Е. А.* О типах сходства и рекурсивного изоморфизма частично рекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 188–192.

Статья поступила 16 января 1998 г.

г. Шуя Ивановской обл.