Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 513.88

ТИПИЧНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Е. М. Бронштейн

Аннотация: Пусть K — выпуклое компактное подмножество гильбертова пространства $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{V}(K)$ — множество выпуклых компактных подмножеств K, наделенное метрикой Хаусдорфа. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если множество K бесконечномерное, то нигде не плотные в K выпуклые компакты нулевой коразмерности в K, экстремальные точки в которых типичны, являются типичными в $\mathfrak{V}(K)$.*

Теорема 2. *Если множество K конечномерное, то множества $U \in \mathfrak{V}(K)$ полной размерности, граница которых совпадает с множеством $\operatorname{ext} U$ и является гладкой, типичны в $\mathfrak{V}(K)$.*

Типичность понимается в смысле бэровских категорий. Теорема 1 усиливает результаты В. Кли и Т. Шварца — Т. Замфиреску. Библиогр. 7.

Пусть K — выпуклое компактное подмножество гильбертова пространства $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{V}(K)$ — множество выпуклых компактных подмножеств K, наделенное метрикой Хаусдорфа

$$\rho(A, B) = \max(\max_{a\in A} d(a, B), \max_{b\in B} d(b, A)).$$

Здесь $A, B \in \mathfrak{V}(K)$, $d(a, B) = \min\limits_{b\in B} \|a - b\|$.

В статье устанавливаются свойства типичных элементов множества $\mathfrak{V}(K)$. Они существенно зависят от того, является множество K конечномерным или бесконечномерным. В. Кли [1] установил, что в бесконечномерном случае типичны такие элементы $K_1 \in \mathfrak{V}(K)$, в которых множество экстремальных точек $\operatorname{ext} K_1$ плотно. Т. Шварц и Т. Замфиреску [2] доказали, что в конусе выпуклых компактных подмножеств евклидова пространства типичными являются такие множества, в которых экстремальные точки типичны.

Типичным подмножеством метрического пространства называется остаточное множество, т. е. дополнение объединения счетного семейства нигде не плотных множеств.

Оказывается, свойство Шварца — Замфиреску имеет место и в общей ситуации. Более того, справедлива

Теорема 1. *Если множество K бесконечномерное, то нигде не плотные в K выпуклые компакты нулевой коразмерности в K, экстремальные точки в которых типичны, являются типичными в $\mathfrak{V}(K)$.*

Иначе обстоит дело, если множество K конечномерное.

Теорема 2. *Если множество K конечномерное, то множества $U \in \mathfrak{V}(K)$ полной размерности, граница которых совпадает с множеством $\operatorname{ext} U$ и является гладкой, типичны в $\mathfrak{V}(K)$.*

Сопоставление теорем 1 и 2 показывает, что нигде не плотность типична только в бесконечномерном случае. Типичность экстремальных точек в бесконечномерном случае заменяется совпадением множества экстремальных точек с границей в конечномерном. Заметим при этом, что у бесконечномерного компакта все точки граничные.

Поясним, что множество $U \subset K$ имеет нулевую коразмерность в K, если для линейного ограниченного функционала a на $\mathfrak{B}$ из условия $ax = \mathrm{const}$ при $x \in U$ следует, что $ax = \mathrm{const}$ при $x \in K$.

Прежде чем доказывать теорему 1, приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Множество $\mathfrak{V}(K)$ — метрический компакт.*

В конечномерном случае это известная теорема Бляшке [3], и доказательство в бесконечномерном случае ничем не отличается от доказательства в конечномерном случае.

Обозначим через $B_K(x,r)$, где $x \in K$, $r \geq 0$, шар в индуцированной метрике, т. е. $B_K(x,r) = \{y \in K : \|y-x\| \leq r\}$.

Лемма 2. *Пусть $x_n \in K$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(B_K(x_n,r),(B_K(x,r)) = 0$$

при любом $r > 0$.

Замечание. Выпуклость K здесь существенна. Пусть, например, $K = \{-1, 0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Тогда $-1 \notin B_K(1/n, 1)$, в то время как $-1 \in B_K(0,1)$. Отсюда $\rho(B_K(1/n,1), B_K(0,1)) = 1$.

Доказательство леммы 2. 1. Проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(y, B_K(x_n,r)) = 0$ для любой точки $y \in B_K(x,r)$. При $y = x$ это очевидно. Пусть $y \in K$, $0 < \|y-x\| \leq r$. Выберем число n_0 так, что $\|x_n - x\| < \|y-x\|$ при $n > n_0$. Определим при $n > n_0$ числа λ_n следующим образом. При $\|x_n - y\| \leq \|y-x\|$ полагаем $\lambda_n = 1$. Пусть $\|y - x_n\| > \|y-x\|$. Обозначим через y_λ при $\lambda \in [0,1]$ точку $\lambda y + (1-\lambda)x \in K$. Тогда при $\lambda = 1$ будет $\|y_\lambda - x_n\| = \|y - x_n\| > \|y-x\|$, при $\lambda = 0$ имеем $\|y_\lambda - x_n\| = \|x - x_n\| < \|y-x\|$. Следовательно, $\|y_\lambda - x_n\| = \|y-x\|$ при некотором $\lambda = \lambda_n$. Оценим λ_n:

$$\|y-x\| = \|y_{\lambda_n} - x_n\| \leq \|y_{\lambda_n} - x\| + \|x - x_n\| = \lambda_n\|y-x\| + \|x_n - x\|.$$

Тем самым $1 \geq \lambda_n \geq 1 - \|x - x_n\|/\|y-x\|$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$, т. е. $y_{\lambda_n} \to y$ и при этом $y_{\lambda_n} \in B_K(x_n, r)$, что и требовалось.

2. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{y\in B_K(x,r)} d(y, B_K(x_n,r)) = 0$. Пусть это не так. Тогда существуют число $\Delta > 0$, последовательность n_k и точки $y_k \in B_K(x,r)$ такие, что $d(y_k, B_K(x_{n_k}, r)) \geq \Delta$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $y_k \to y \in B_K(x,r)$. Но тогда

$$d(y, B_K(x_{n_k}, r)) \geq d(y_k, B_K(x_{n_k}, r)) - \|y - y_k\| \geq \Delta/2$$

при достаточно больших k, что противоречит п. 1.

3. Проверим, что $d(y, B_K(x,r)) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n и $y \in B_K(x_n, \varepsilon)$.

Пусть это не так, т. е. при некотором $\varepsilon > 0$ существуют последовательность n_k и точки $y_k \in B_K(x_{n_k}, r)$ такие, что $d(y_k, B_K(x,r)) > \varepsilon$. Можно считать, что $y_k \to y$. Имеем $d(y, B_K(x,r)) \geq \varepsilon$ и $\|y_k - x_{n_k}\| \leq r$. При достаточно больших k

$$\|x_{n_k} - x\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|y_k - y\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда
$$\|x-y\| \le \|x-x_{n_k}\| + \|x_{n_k}-y_k\| + \|y_k-y\| \le r + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Пусть $x^* = \lambda y + (1-\lambda)x$, где $\lambda = r/(2+\varepsilon/2)$. Тогда
$$x^* \in K, \quad \|x^*-x\| \le r, \quad \|x^*-y\| \le \varepsilon/2.$$
Но это противоречит тому, что $d(y, B_K(x,r)) \ge \varepsilon$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Конечномерное выпуклое компактное подмножество бесконечномерного выпуклого компакта K не содержит шаров (в индуцированной метрике).*

Замечание. В этом утверждении выпуклость K также существенна. В качестве примера рассмотрим в ℓ^2 множество K, которое является объединением отрезков $s_1 = \{x : -1 \le x_1 \le 1, x_i = 0$ при $i > 0\}$; $s_i = \{x : x_1 = 1/i, x_i \in [0, 1/i]; x_j = 0$ при $j \ne 1, i\}$ при $i > 1$. Ясно, что K — бесконечномерный компакт, но одномерный выпуклый компакт s_1 содержит шар $B_K(p,r)$, где $p = (-1/2, 0, \dots, 0, \dots)$, $r < 1/2$.

Доказательство леммы 3. Пусть K_1 — конечномерный выпуклый компакт из $\mathfrak{V}(K)$, при этом $B_K(p,r) \subset K_1$. Пусть $\mathscr{L}(K_1)$ — линейная оболочка K_1. Тогда $\mathscr{L}(K_1)$ — конечномерное, т. е. замкнутое, подпространство $\mathfrak{B}$. Ввиду бесконечномерности K существует точка $x \in K \setminus \mathscr{L}(K_1)$. Положим $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)p$. При достаточно малых положительных λ будет $\|x_\lambda - p\| < r$, причем $x_\lambda \in B_K(p,r) \setminus \mathscr{L}(K_1)$. Противоречие завершает доказательство.

Лемма 4. *Пусть M — конечное подмножество бесконечномерного выпуклого компакта K. Множество*
$$\{x \in K : \operatorname{ext}\operatorname{conv}(M \cup \{x\}) = (\operatorname{ext}\operatorname{conv} M) \cup \{x\}\}$$
всюду плотно в K. Здесь ext *— множество крайних точек,* conv *— выпуклая оболочка.*

Доказательство. Поскольку K — бесконечномерный выпуклый компакт, а $\mathscr{L}(M)$ — конечномерное (а значит, замкнутое) подпространство, то множество $(K \setminus \mathscr{L}(M))$ всюду плотно в K.

Пусть $x \in (K \setminus \mathscr{L}(M))$. Докажем, что точка x обладает нужным свойством. В силу замкнутости множества $M \cup \{x\}$ имеем $\operatorname{ext}\operatorname{conv}(M \cup \{x\}) \subset (M \cup \{x\})$. Если $\operatorname{ext}\operatorname{conv}(M \cup \{x\}) \subset M$, то $x \in \operatorname{conv} M \subset \mathscr{L}(M)$; противоречие. Доказательство леммы завершает тот очевидный факт, что $\operatorname{ext}\operatorname{conv} M \subset \operatorname{ext}\operatorname{conv}(M \cup \{x\})$.

Доказательство теоремы 1. Поскольку счетное пересечение остаточных множеств является остаточным множеством, достаточно доказать три утверждения:

(а) нигде не плотные выпуклые компактные подмножества K — типичные элементы $\mathfrak{V}(K)$,

(б) элементы $\mathfrak{V}(K)$ нулевой коразмерности в K являются типичными,

(в) элементы $\mathfrak{V}(K)$, экстремальные точки которых типичны, также типичны.

Докажем утверждение (а). (В [2] указано, что В. Кли сообщил об этом факте, но соответствующая публикация автору неизвестна.)

Пусть $S \subset \mathfrak{V}(K)$ — множество выпуклых компактов, которые не являются нигде не плотными. Тогда $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, где S_n — совокупность выпуклых компактных подмножеств K, содержащих шар $B_K(y, 1/n)$ при некотором $y \in K$. Достаточно доказать, что каждое из множеств S_n нигде не плотно в $\mathfrak{V}(K)$.

Проверим сначала, что множество S_n замкнуто. Пусть $U_k \in S_n$, $\rho(U_k, U) \to 0$. Надо доказать, что $U \in S_n$. По лемме 1 $U \in \mathfrak{V}(K)$. Пусть $B_K(y_k, 1/n) \subset U_k$. Как и раньше, можно считать, что $y_k \to y_0 \in U$. По лемме 2

$$\lim_{k \to \infty} \rho(B_K(y_0, 1/n), B_K(y_k, 1/n)) = 0,$$

откуда $B_K(y_0, 1/n) \subset U$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что S_n нигде не плотно в $\mathfrak{V}(K)$. Для этого в силу замкнутости S_n достаточно проверить, что при любых $\varepsilon > 0$, $U \in \mathfrak{V}(K)$ найдется множество $V \in B_{\mathfrak{V}(K)}(U, \varepsilon) \setminus S_n$. Рассмотрим конечную $\varepsilon/2$-сеть компакта U. Ее выпуклая оболочка — конечномерный выпуклый компакт V такой, что $\rho(U, V) \le \varepsilon/2$. По лемме 3 $V \notin S_n$. Утверждение (а) доказано.

Докажем утверждение (б). Можно считать, что множество K имеет в $\mathfrak{B}$ нулевую коразмерность. Пусть $(e_1, \dots, e_n, \dots)$ — ортонормальная система координат в пространстве $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{A}^+_{m,n}$ и $\mathfrak{A}^-_{m,n}$ соответственно множества $\{x \in \mathfrak{B} : \|x\| \le 1,\ x_n \ge 1/m\}$ и $\{x \in \mathfrak{B} : \|x\| \le 1,\ x_n \le -1/m\}$. Отметим, что

$$\bigcup_{m,n} (\mathfrak{A}^+_{m,n} \cup \mathfrak{A}^-_{m,n}) = \{x \in B : 0 < \|x\| \le 1\}.$$

Множество $K_1 \subset K$ имеет положительную коразмерность, если существуют числа m, n и вектор $a \in \mathfrak{A}^+_{m,n} \cup \mathfrak{A}^-_{m,n}$, для которых функция ax является постоянной на K_1.

Обозначим через $\mathfrak{U}^+_{m,n}$, $\mathfrak{U}^-_{m,n}$ множества элементов $\mathfrak{V}(K)$, на которых функции ax постоянны соответственно при $a \in \mathfrak{A}^+_{m,n}$ или $a \in \mathfrak{A}^-_{m,n}$. Для доказательства нужного утверждения достаточно проверить, что каждое из множеств $\mathfrak{U}^+_{m,n}$, $\mathfrak{U}^-_{m,n}$ замкнуто и нигде не плотно. Проверим для определенности замкнутость множества $\mathfrak{U}^+_{m,n}$. Множество $\mathfrak{A}^+_{m,n}$ является замкнутым выпуклым подмножеством слабо компактного единичного шара, поэтому слабо компактно [4]. Пусть $K_s \in \mathfrak{U}^+_{m,n}$, $\rho(K_s, K_0) \to 0$. Обозначим через a_s вектор из $\mathfrak{A}^+_{m,n}$ такой, что на K_s постоянна функция $a_s x$. Можно считать, что последовательность a_s слабо сходится к вектору $a_0 \in \mathfrak{A}^+_{m,n}$.

Докажем, что функция $a_0 x$ постоянна на K_0. Пусть $p, q \in K_0$, ε — произвольное положительное число. Выберем число s таким, что существуют точки $p_s, q_s \in K_s$, удовлетворяющие условиям

$$\|p - p_s\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|q - q_s\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |a_s p - a_0 p| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |a_s q - a_0 q| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

При достаточно больших s все эти условия выполняются. Имеем

$$\begin{aligned} |a_0 p - a_0 q| &\le |a_0 p - a_s p| + |a_s p - a_s p_s| + |a_s p_s - a_s q_s| + |a_s q_s - a_s q| + |a_s q - a_0 q| \\ &\le \frac{\varepsilon}{4} + \|a_s\|\,\|p - p_s\| + 0 + \|a_s\|\,\|q - q_s\| + \frac{\varepsilon}{4} \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь использованы постоянство на K_s функции $a_s x$ и неравенство $\|a_s\| \le 1$. Поскольку точки p, q и число ε произвольны, функция $a_0 x$ постоянна на K_0.

Проверим нигде не плотность множества $\mathfrak{U}^+_{m,n}$. Пусть $K_0 \in \mathfrak{U}^+_{m,n}$. Рассмотрим выпуклый компакт $K_\lambda = (1 - \lambda)K_0 + \lambda K$ при $\lambda > 0$. Поскольку $K_0 \subset K$, то $K_\lambda \subset K$. Далее, так как множество K имеет нулевую коразмерность, тем же свойством обладает и множество K_λ, т. е. $K_\lambda \notin \mathfrak{U}^+_{m,n}$. Проверим, что при достаточно малом положительном λ будет $\rho(K_\lambda, K_0) < \varepsilon$ при заданном положительном ε. Если $x \in K_0$, $y \in K$, то $\|(1-\lambda)x + \lambda y - x\| = \lambda\|y - x\| \le 2\lambda \operatorname{diam} K$, т. е. можно взять $\lambda < \varepsilon/(2 \operatorname{diam} K)$, что и требовалось.

Докажем утверждение (в). Рассуждение следует схеме работы [2]. Пусть $U \in \mathfrak{V}(K)$. Положим

$$S_n(U) = \{x \in U : x = (y+z)/2;\ y, z \in U,\ \|y - z\| \ge 1/n\}.$$

Тогда $S(U) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n(U)$ — множество неэкстремальных точек U, т. е. $S(U) = U \setminus \operatorname{ext} U$. Из компактности U следует компактность $S_n(U)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — подмножество $\mathfrak{V}(K)$, элементами которого являются выпуклые компакты $U \subset K$ с множеством $\operatorname{ext} U$ первой категории (соответственно с остаточным множеством $S(U)$). Нужно проверить, что $\mathfrak{M}$ — множество первой категории в $\mathfrak{V}(K)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{m,n}$ множество выпуклых компактов $U \in \mathfrak{V}(K)$, для каждого из которых существует точка $x \in U$ такая, что $B_K(x, 1/m) \subset S_n(U)$. Далее будет использован тот факт, что если для любой точки $y \in U$ справедливо свойство $B_K(y, 1/m) \cap \operatorname{ext} U \ne \varnothing$, то $U \notin \mathfrak{M}_{m,n}$.

Установим некоторые свойства множеств $\mathfrak{M}_{m,n}$.

1. $\mathfrak{M} \subset \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_{m,n}$.

Пусть $U \in \mathfrak{M}$. Тогда $S(U)$ — остаточное множество. Поскольку $S(U) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n(U)$, то хотя бы одно из множеств $S_n(U)$ не является нигде не плотным. В силу замкнутости $S_n(U)$ это означает, что множество $S_n(U)$ содержит некоторый шар, что и требовалось.

2. Множество $\mathfrak{M}_{m,n}$ замкнуто в $\mathfrak{V}(K)$. Пусть $U_k \in \mathfrak{M}_{m,n}$, $\rho(U_k, U) \to 0$. Существуют точки y_k такие, что $B_K(y_k, 1/m) \subset S_n(U_k) \subset U_k$.

В силу компактности K можно считать, что $y_k \to y \in K$. Как и при доказательстве леммы 2, $y \in U$. По лемме 2 $\rho(B_K(y_k, 1/m), B_K(y, 1/m)) \to 0$, откуда $B_K(y, 1/m) \subset U$.

Пусть $z \in B_K(y, 1/m)$. Тогда $z = \lim z_k$, где $z_k \in B_K(y_k, 1/m)$, причем $z_k = (p_k + q_k)/2$ при $p_k, q_k \in U_k$, $\|p_k - q_k\| \ge 1/n$. В силу компактности K можно считать, что $p_k \to p$, $q_k \to q$. Тогда $p, q \in U$, $\|p - q\| \ge 1/n$, $z = (p+q)/2$. Тем самым $B_K(y, 1/m) \subset S_n(U)$, что и требовалось.

3. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что каждое из множеств $\mathfrak{M}_{m,n}$ нигде не плотно в $\mathfrak{V}(K)$. Поскольку множества $\mathfrak{M}_{m,n}$ замкнуты, достаточно проверить, что для любых $U \in \mathfrak{V}(K)$, $\varepsilon > 0$ найдется множество $V \in \mathfrak{V}(K) \setminus \mathfrak{M}_{m,n}$, удаленное от U меньше чем на ε.

Выберем конечную $\varepsilon/2$-сеть в компакте U и обозначим через V_0 ее выпуклую оболочку. Тогда V_0 — конечномерный выпуклый компакт, $V_0 \in \mathfrak{V}(K)$, $\rho(U, V_0) \le \varepsilon/2$.

Пусть существует точка $x_0 \in V_0$, удаленная от всех точек конечного множества $\operatorname{ext} V_0$ больше чем на $1/m$. По лемме 4 существует точка $y_0 \in K$ такая, что $\|x_0 - y_0\| \le \min \|1/2m, \varepsilon/4\}$ и $\operatorname{ext} \operatorname{conv}(V_0 \cup \{y_0\}) = \operatorname{ext} V_0 \cup \{y_0\}$. Пусть $V_1 = \operatorname{conv}(V_0 \cup \{y_0\})$. Продолжим построение. Пусть построены точки $x_0, x_1, \ldots, x_k$; $y_0, y_1, \ldots, y_k$ и выпуклые тела $V_0 \subset \cdots \subset V_{k+1}$, где $\operatorname{ext} V_i = \operatorname{ext} V_0 \cup \{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$ при $i \ge 1$, $x_i \in V_i$, $d(x_i, \operatorname{ext} V_i) > 1/m$. Если существует точка $x_{k+1} \in V_{k+1}$, удаленная от всех точек конечного множества $\operatorname{ext} V_{k+1}$ больше чем на $1/m$, то выберем точку $y_{k+1} \in K$ такую, что

$$\|x_{k+1} - y_{k+1}\| \le \min\{1/2m, \varepsilon/2^{k+2}\}, \quad \operatorname{ext}\operatorname{conv}(V_k \cup \{y_{k+1}\}) = \operatorname{ext} V_k \cup \{y_{k+1}\}.$$

Докажем, что описанный процесс построения множеств V_k закончится на некотором шаге.

Пусть это не так. Ввиду компактности K из последовательности $\{y_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Но при $j > i$ справедливо неравенство

$$\|y_i - y_j\| \ge \|y_i - x_j\| - \|y_j - x_j\| \ge \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m},$$

т. е. в последовательности $\{y_k\}$ нет фундаментальной подпоследовательности.

Пусть V — последнее из построенных множеств. Поскольку $d(y_{k+1}, V) \le \varepsilon/2^{k+2}$ и $V_{k+1} = \operatorname{conv}(V_k \cup \{y_{k+1}\})$, то $\rho(V_{k+1}, V_k) \le \varepsilon/2^{k+2}$. Отсюда $\rho(V, U) = \rho(V_n, U) < \varepsilon$. При этом $1/m$-окрестность любой точки V пересекается с $\operatorname{ext} V$, т. е. $V \notin \mathfrak{M}_{m,n}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертов куб. Множество $\operatorname{ext}\mathfrak{H}$ замкнуто и тем самым нигде не плотно в $\mathfrak{H}$.

Замечание 2. Из теоремы следует, что в типичном выпуклом компакте из $\mathfrak{V}(K)$ множество экстремальных точек несчетно. Этот факт перекликается с теоремой Линденштраусса — Фелпса [5], утверждающей, что у любого выпуклого замкнутого подмножества гильбертова пространства, компактного в слабой топологии, множество экстремальных точек несчетно.

Замечание 3. Семейство бесконечномерных элементов $\mathfrak{V}(K)$, не являющихся нигде не плотными, плотно в $\mathfrak{V}(K)$.

Действительно, пусть $U \in \mathfrak{V}(K)$, $\varepsilon > 0$. Выберем произвольную точку $p \in U$ и рассмотрим множество $V = \operatorname{conv}(U \cup B_K(p, \varepsilon))$. Тогда $\rho(V, U) \le \varepsilon$, множество V содержит шар $B_K(\rho, \varepsilon)$, т. е. не является нигде не плотным.

Замечание 4. Докажем, что плотным в $\mathfrak{V}(K)$ является и семейство бесконечномерных компактов U таких, что множество $\operatorname{ext} U$ нигде не плотно в U. Для этого заметим, что для любых бесконечномерного компакта $U \in V(K)$, точки $p \in U$ и числа $r > 0$ компакт $U \cap B_K(p, r)$ бесконечномерен. Действительно, если это не так, то линейная оболочка $\mathscr{L}(U \cap B_K(p, r))$ конечномерна. Тогда существует точка $q \in U \setminus \mathscr{L}(U \cap B_K(p, r))$. Но на отрезке $[p, q]$ есть точки из множества $U \cap B_K(p, r)$, отличные от p. Поэтому $q \in \mathscr{L}(U \cap B_K(p, r))$; противоречие.

Пусть U — бесконечномерный выпуклый компакт из $\mathfrak{V}(K)$, $\varepsilon > 0$ и $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — $\varepsilon/2$-сеть в U. Тогда $\rho(U, \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}) \le \varepsilon/2$. Выберем в шаре $B_K(x_0, \varepsilon/2)$ точку z_1 такую, что $z_1 \in K \setminus \mathscr{L}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Ясно, что такая точка существует.

По индукции выбираем в шаре $B_K(x_0, \varepsilon/2^k)$ точку z_k такую, что $z_k \in K \setminus \mathscr{L}\{x_0, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_{k-1}\}$. Пусть

$$V = \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k, \ldots\},$$

$$\rho(U, V) \le \rho(U, \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}) + \rho(\operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, V) \le \varepsilon.$$

Далее,

$$\operatorname{ext} V \subset \{x_0, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k, \ldots\},$$

поскольку это множество замкнутое. Но тогда $\operatorname{ext} V$ нигде не плотно в V.

Замечание 5. Аналогичное утверждение справедливо для локально компактных выпуклых конусов. В частности, утверждение (в) доказано в [6].

Доказательство теоремы 2. Можно считать, что $K \subset \mathbb{R}^n$, причем $\dim K = n$. Как и при доказательстве теоремы 1, необходимо установить три факта:

(а) совокупность множеств из $\mathfrak{V}(K)$, имеющих размерность n, остаточное в $\mathfrak{V}(K)$;

(б) совокупность множеств $V \in \mathfrak{V}(K)$, у которых $\operatorname{ext} V = \partial V$, остаточное в $\mathfrak{V}(K)$;

(в) совокупность множеств из $\mathfrak{V}(K)$ с гладкой границей остаточное в $\mathfrak{V}(K)$.

Утверждение (а) очевидно. Более того, множество $\mathfrak{V}'(K) = \{U \in \mathfrak{V}(K) : \dim U = n\}$ — открытое всюду плотное подмножество $\mathfrak{V}(K)$. Мы будем анализировать только $\mathfrak{V}''(K)$, поскольку типичное подмножество $\mathfrak{V}''(K)$ является типичным и в $\mathfrak{V}(K)$.

Докажем свойство (б). Обозначим через T_k множество таких тел из $\mathfrak{V}''(K)$, границы которых содержат отрезок длины не менее $1/k$. Достаточно доказать, что T_k — замкнутое нигде не плотное подмножество $\mathfrak{V}''(K)$.

Пусть

$$V_i, V \in \mathfrak{V}''(K), \quad \rho(V_i, V) \to 0, \quad V_i \in T_k.$$

Тогда существуют точки $a_i, b_i \in \partial V_i$ такие, что $|a_i - b_i| \geq 1/k$, $(a_i + b_i)/2 \in \partial V_i$. Ввиду компактности K можно считать, что $a_i \to a$, $b_i \to b$. Поскольку $V \in \mathfrak{V}''(K)$ и $\rho(V_i, V) \to 0$, имеем $a, b, (a+b)/2 \in \partial V$, причем $\|a - b\| \geq 1/k$. Замкнутость T_k доказана.

Пусть теперь $V \in \mathfrak{V}''(K)$, $d > 0$. Докажем, что существует множество $V' \in \mathfrak{V}''(K) \setminus T_k$ такое, что $\rho(V', V) < d$. Выберем точку $p \in \operatorname{Int} V$ и положим $V_\lambda = p + \lambda(V - p)$ при $\lambda \in (0, 1)$. Тогда $\rho(V_\lambda, V) \to 0$ при $\lambda \to 1$. Поэтому при некотором λ имеем $\rho(V_\lambda, V) < d/2$ и $V_\lambda \subset \operatorname{Int} K$. Примем за V' пересечение шаров достаточно большого фиксированного радиуса, содержащих V_λ. При достаточно большом радиусе шаров $p(V_\lambda, V') < d/2$, $V' \subset \operatorname{Int} K$. По построению граница $\partial V'$ не содержит отрезков, т. е. $V' \notin T_k$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение (в). Обозначим через P_k множество тел $V \in \mathfrak{V}''(K)$, обладающих следующим свойством: существуют точка $a \in \partial V$ и две гиперплоскости, опорные к V, проходящие через p и такие, что меньший из двух углов между ними достаточно велик. Более точно: $V \in P_k$, если существуют точка $a \in \partial V$, единичные векторы q, p и числа l, m такие, что

$$pa = l,\ qa = m; \quad qx \leq m \quad \text{для любого } x \in V;\ px \leq l, qx \leq m, \quad |pq| \geq 1 - 1/k. \tag{$*$}$$

Как и раньше, достаточно доказать, что P_k — замкнутое нигде не плотное подмножество $\mathfrak{V}''(K)$.

Пусть $V_i, V \in \mathfrak{V}''(K)$, $\rho(V_i, V) \to 0$, a_i, p_i, q_i, l_i, m_i — соответствующие векторы и числа для тела V_i. Ввиду компактности K и единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ можно считать, что $a_i \to a$, $p_i \to p$, $q_i \to q$. Поскольку величины l_i и m_i ограничены, можно считать, что $l_i \to l$, $m_i \to m$. Тогда $a \in \partial V$, причем выполняются соотношения $(*)$ для тела V. Замкнутость P_k доказана.

Пусть теперь $V \in \mathfrak{V}''(K)$, $d > 0$. Докажем, что существует множество $V' \in B_{\mathfrak{V}''(K)}(V, d) \setminus P_k$.

Пусть обозначение V_λ имеет тот же смысл, что и раньше. Выберем такое λ, при котором $\rho(V_\lambda, V) < d/2$. Поскольку $V_\lambda \subset \operatorname{Int} K$ и множества V_λ, ∂K

компактны, величина

$$\delta = \inf\{|x - y| : x \in \partial K,\ y \in V_\lambda\}$$

положительна. Пусть $t = \min\{d/2, \delta/2\}$. Обозначим через V' тело $V_\lambda + tB_n$, где B_n — единичный шар. Тогда $V' \subset \operatorname{Int} K$, $\rho(V', V) \leq \rho(V, V_\lambda) + \rho(V_\lambda, V') < d$ и тело V' имеет гладкую границу, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема 2 перекликается с результатом А. В. Кузьминых [7], который устанавливает свойства типичных компактов в $\mathbb{R}^n$ и их выпуклых оболочек. В частности, свойство (в) присутствует и в этой ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klee V.* Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces // Math. Ann. (2). 1959. V. 159. P. 51–63.

2. *Schwarz T., Zamfirescu T.* Typical sets of convex sets // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1987. V. 43. P. 287–290.

3. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1976.

4. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

5. *Lindenstrauss J., Phelps R.* Extreme points properties // Israel. J. Math. 1968. V. 13, N 6. P. 39–48.

6. *Бронштейн Е. М.* О выпуклых конусах со свойством Шварца — Замфиреску // Функцион. анализ и приложения. 1998. Т. 32, № 3. С. 57–59.

7. *Кузьминых А. В.* Структура типичных компактов евклидова пространства // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 344–350.

Статья поступила 6 октября 1997 г.

г. Уфа