Объем симметричного тетраэдра *

Д.А. Деревнин, А.Д. Медных, М.Г. Пашкевич

Аннотация: Получены элементарные формулы для вычисления объема симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах.

Ключевые слова: гиперболический тетраэдр, сферический тетраэдр, формула объема, матрица Грама

1 Введение

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. В основном это связано с тем, что объем фундаментального многогранника является одним из основных инвариантов трехмерного многообразия.

Несколько лет тому назад И. Х. Сабитов [1] доказал, что объем евклидова многогранника — это корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются многочленами, зависящими от длин ребер многогранника, а коэффициенты последних зависят лишь от комбинаторного типа многогранника. В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Формула объема для бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) была известна со времен Н. И. Лобачевского [2] и Л. Шлефли [3]. Объем куба Ламберта и некоторых других многогранников были получены Р. Келлерхальц [4], Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [5], А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Дж. Паркером [6] и другими. В 1991 году Дж. Мартин [7] получил объемы правильных многогранников в гиперболическом пространстве. Объемы идеальных гиперболических многогранников во многих основных частных случаях были найдены Э. Винбергом [8].

*Частично поддержана грантом РФФИ (грант 03-01-00104), ИНТАС (грант 03-51-3663) и Ведущие научные школы (грант НШ-300.2003.1).

Формула объема для произвольных гиперболического и сферического тетраэдров долгое время была не известна. **Первая попытка получить эту формулу** принадлежит В. –Ю. Хсянгу [9]. В 1999 году в работах Ю. Чо и Х. Кима [10], Дж. Мураками и У. Яно [11] была получена довольно сложная формула для объема тетраэдра. Простое доказательство этой формулы, которое включает также объемы усеченных тетраэдров, было найдено А. Ушиджимой [12].

Цель этой статьи состоит в нахождении элементарных формул для вычисления объема симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах.

2 Предварительные результаты

Обозначим через $\mathbb{X}^n$ — одно из следующих n–мерных пространств постоянной кривизны: евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, сферическое пространство $\mathbb{S}^n$ или гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$. Пусть $T = (A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{X}^3$ — тетраэдр с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4 и двугранными углами A, B, C, D, E, F при ребрах с длинами $l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F$ соответственно (см. рис. 1). Существование тетраэдра в сферическом, евклидовом и гиперболическом пространствах, в терминах матрицы Грама, доказано Э. Винбергом [8].

Тетраэдр T будем называть *симметричным*, если $A = D, B = E, C = F$.

Вычисление объемов тетраэдров основывается на следующей формуле Шлефли (см., например, [3],[4],[13]).

Теорема 1 (Дифференциальная формула объема Шлефли). *Пусть компактный симплекс $\mathcal{S} \in \mathbb{X}^n (n \geq 2)$ имеет вершины $P_0, ..., P_n$ и двугранные углы $\alpha_{jk} = \angle(\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_k), 0 \leq j < k \leq n$, образованные $(n-1)$ — мерными гранями $\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_k$ симплекса $\mathcal{S}$ при грани $\mathcal{S}_{jk} = \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$.*

Тогда дифференциал объема V на множестве всех симплексов в $\mathbb{X}^n$ имеет вид:

$$KdV(\mathcal{S}) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n+1} Vol_{n-2}(\mathcal{S}_{jk}) d\alpha_{jk} \qquad (V_o(\mathcal{S}_{jk}) := 1),$$

где K — кривизна пространства $\mathbb{X}^n$.

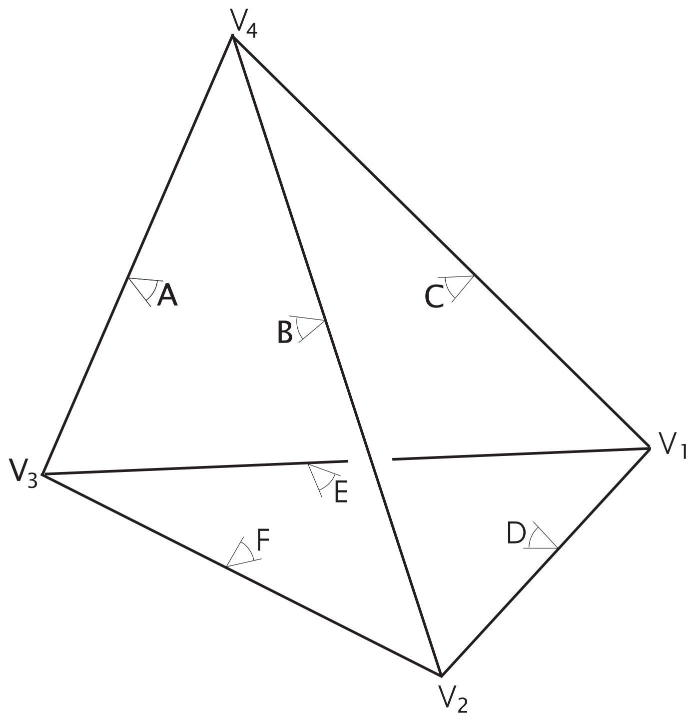

Рис. 1.

В настоящей статье положим $K = -1$ для гиперболического пространства и $K = 1$ для сферического пространства. Формула Шлефли для гиперболического и сферического трехмерных пространств приводится к следующему виду:

$$KdV = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{4} l_{jk} d\alpha_{jk},$$

где l_{jk} — длина соответствующего ребра симплекса $\mathcal{S}$.

3 Объем гиперболического тетраэдра

Пусть T — гиперболический тетраэдр. Обозначим через

$$G = \langle -\cos\alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix},$$

матрицу Грама тетраэдра T, а через $C = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$ — присоединенную матрицу, состоящую из элементов $c_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}$, где G_{ij} — ij-ый минор матрицы G.

Следуя А. Ушиджиме [12], несложно доказать

Предложение 1. *Пусть T — гиперболический тетраэдр. Тогда*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad \det G < 0, \\ &\text{(ii)} \qquad c_{ii} > 0, i = 1, 2, 3, 4, \\ &\text{(iii)} \qquad \frac{\sin A}{\operatorname{sh} l_A} = \frac{\sqrt{c_{33}c_{44}}}{\sqrt{-\det G}}. \end{aligned}$$

Из предложения 1 непосредственно следует

Предложение 2. *Пусть T — гиперболический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A \sin D}{\operatorname{sh} l_A \operatorname{sh} l_D} = \frac{\sin B \sin E}{\operatorname{sh} l_B \operatorname{sh} l_E} = \frac{\sin C \sin F}{\operatorname{sh} l_C \operatorname{sh} l_F} = \frac{\sqrt{P}}{-\det G}, \tag{3.1}$$

где $P = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}$.

Пусть теперь T — симметричный гиперболический тетраэдр. Положим $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$. При непосредственном вычислении несложно заметить, что $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = \gamma$, где $\gamma = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc$ и

$$\Delta = -\det G = (1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c),$$

Подставляя полученные выражения в условие предложения 2, получаем:

Теорема 2 (Теорема синусов). *Пусть T — симметричный гиперболический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} l_A} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} l_B} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} l_C} = u,$$

где $u = \dfrac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}, \gamma = 1-a^2-b^2-c^2-2abc, \Delta = (1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(-1+a+b+c)$ и $A = \cos\alpha, B = \cos\beta, C = \cos\gamma$.

Отметим, что из определения u следует полезное тождество:

$$u^2 + 1 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ab)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)}. \tag{3.2}$$

Для вывода формулы объема симметричного гиперболического тетраэдра потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть t определяется следующим образом:*

$$t^2 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ab)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)}, \tag{3.3}$$

где $a = \cos A,\ b = \cos B,\ c = \cos C$ *и* A, B, C *— двугранные углы симметричного гиперболического тетраэдра* T*. Тогда*

$$\arcsin\frac{a}{t} + \arcsin\frac{b}{t} + \arcsin\frac{c}{t} = \arcsin\frac{1}{t}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Заметим, что $t^2 = u^2 + 1 > 1$. Покажем, что t, определяемое (3.3), является корнем уравнения (3.4). Пользуясь тригонометрическим тождеством

$$\arcsin(x \pm y) = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}),$$

приведем уравнение (3.4) к следующему виду:

$$\arcsin\Big(\frac{a}{t}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}} + \frac{b}{t}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}}\Big) = \arcsin\Big(\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{c^2}{t^2}} - \frac{c}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\Big).$$

Для главных значений арксинуса, последнее равенство эквивалентно

$$a\sqrt{t^2-b^2} + b\sqrt{t^2-a^2} = \sqrt{t^2-c^2} - c\sqrt{t^2-1}.$$

Учитывая (3.2), при непосредственном вычислении имеем

$$\begin{aligned}
t^2 - a^2 &= \frac{\Big(a(1-a^2+b^2+c^2)+2bc\Big)^2}{\Delta},\\
t^2 - b^2 &= \frac{\Big(b(1-b^2+a^2+c^2)+2ac\Big)^2}{\Delta},\\
t^2 - c^2 &= \frac{\Big(c(1-c^2+a^2+b^2)+2ab\Big)^2}{\Delta},\\
t^2 - 1 &= \frac{\Big(1-a^2-b^2-c^2-2abc\Big)^2}{\Delta}.
\end{aligned}$$

По предложению 1 (ii), имеем: $1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc = c_{11} > 0$. Теперь подставим в равенство

$$a\sqrt{t^2-b^2} + b\sqrt{t^2-a^2} = \sqrt{t^2-c^2} - c\sqrt{t^2-1}$$

полученные для $t^2 - a^2, t^2 - b^2, t^2 - c^2, t^2 - 1$ выражения и получим тождество. □

Следующая теорема дает интегральное представление для объема гиперболического симметричного тетраэдра T.

Теорема 3. *Объем гиперболического симметричного тетраэдра* T *вычисляется по формуле:*

$$Vol\,T = \int\limits_{u}^{+\infty}\Big(\arcsin\frac{a}{\sqrt{\nu^2+1}} + \arcsin\frac{b}{\sqrt{\nu^2+1}} + \arcsin\frac{c}{\sqrt{\nu^2+1}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}\Big)\frac{d\nu}{\nu},$$

где
$$u=\frac{1-a^2-b^2-c^2-2abc}{\sqrt{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(-1+a+b+c)}},$$
$a=\cos A, b=\cos B, c=\cos C$.

Доказательство. Так как T симметричный тетраэдр, то $A=D, B=E, C=F$ и $l_A=l_D, l_B=l_E, l_C=l_F$. По теореме 1 (Дифференциальная формула объема Шлефли) для $V=VolT$ имеем $dV=-l_AdA-l_BdB-l_CdC$. Следовательно, объем V удовлетворяет соотношениям:
$$\frac{\partial V}{\partial A}=-l_A, \frac{\partial V}{\partial B}=-l_B, \frac{\partial V}{\partial C}=-l_C.$$
Отметим, что $V\to 0$ при $A,B,C\to \arccos\frac{1}{3}$, то есть когда T становится правильным евклидовым тетраэдром.

Положим $\widetilde{V}=\int\limits_u^{+\infty}F(\nu,A,B,C)d\nu$, где
$$F(\nu,A,B,C)=\arcsin\frac{a}{\sqrt{\nu^2+1}}+\arcsin\frac{b}{\sqrt{\nu^2+1}}+\arcsin\frac{c}{\sqrt{\nu^2+1}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}.$$
Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\widetilde{V}$ обладает свойствами:

(i) $\quad\dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial A}=-l_A, \dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial B}=-l_B, \dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial C}=-l_C,$

(ii) $\quad\widetilde{V}\to 0$ при $A,B,C\to\arccos\frac{1}{3}$.

Проверяем свойство (i).

Используя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получаем:
$$\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial A}=-F(u,A,B,C)\frac{\partial u}{\partial A}+\int\limits_u^{+\infty}\frac{\partial F(\nu,A,B,C)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial A}\frac{d\nu}{\nu}.$$

По лемме 1
$$F(u,A,B,C)=\arcsin\frac{a}{\sqrt{u^2+1}}+\arcsin\frac{b}{\sqrt{u^2+1}}+\arcsin\frac{c}{\sqrt{u^2+1}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}=0.$$
Следовательно $F(u,A,B,C)\dfrac{\partial u}{\partial A}=0$.

Далее
$$\frac{\partial F(\nu,A,B,C)}{\partial a}=\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1-a^2}}$$
и
$$\frac{\partial a}{\partial A}=\frac{d(\cos A)}{dA}=-\sin A=-\sqrt{1-a^2}.$$

Откуда

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = -\int\limits_u^{+\infty} \frac{\sqrt{1-a^2}d\nu}{\nu\sqrt{\nu^2+1-a^2}} = \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{1-a^2}}{\nu}\Big|_u^{\infty} = -\operatorname{arsh}\frac{\sqrt{1-a^2}}{u} = -l_A,$$

так как из условия теоремы 2 (Теорема синусов) $l_A = \operatorname{arsh}\dfrac{\sin A}{u} =$
$= \operatorname{arsh}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{u}$.

Аналогично проверяются равенства $\dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial B} = -l_B, \dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial C} = -l_C$.

Проверяем свойство (ii). Если $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$, то $u \to +\infty$. В силу сходимости интеграла имеем $\widetilde{V} \to 0$. □

Подставляя $\nu = \operatorname{tg} t$ в условие теоремы 3, получаем:

Теорема 4. *Объем гиперболического симметричного тетраэдра T вычисляется по формуле:*

$$2\int\limits_{\theta}^{\pi/2} (\arcsin(\cos A\cos t) + \arcsin(\cos B\cos t) + \arcsin(\cos C\cos t) - \arcsin(\cos t))\frac{dt}{\sin 2t},$$

где $\theta \in [0, \pi/2]$ и $\operatorname{tg}^2\theta$ равно

$$\frac{1-a^2-b^2-c^2-2abc}{\sqrt{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(-1+a+b+c)}},$$

где $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$.

Этот результат численно совпадает с результатом полученным ранее Ю. Чо и Х. Кимом [10] и может быть переписан через функцию Лобачевского $\Lambda(x) = -\int\limits_0^x \ln|2\sin\xi|d\xi$.

4 Объем сферического тетраэдра

Рассмотрим тетраэдр T (см. рис. 1) в сферическом пространстве $\mathbb{S}^3$.

Пусть

$$G = \langle -\cos\alpha_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

матрица Грама тетраэдра T, а $C = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$ — присоединенная матрица, состоящая из элементов $c_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}$, где G_{ij} — ij-ый минор матрицы G. Существование сферического тетраэдра показано в [14].

Следующее предложение существенно опирается на теоремы существования симметричного тетраэдра, полученные в [8] и [14].

Предложение 3. *Пусть T — сферический тетраэдр. Тогда*

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \det G > 0, \\
&\text{(ii)} && c_{ii} > 0, i = 1,2,3,4, \\
&\text{(iii)} && \frac{\sin A}{\sin l_A} = \frac{\sqrt{c_{33}c_{44}}}{\sqrt{\det G}}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Доказательство. Условия (i) и (ii) следуют из существования сферического тетраэдра с матрицей Грама G (см. [8], [14]). Для доказательства равенства (iii) воспользуемся следующей теоремой (см. [15], стр. 24, теор. 2.5.1).

Теорема 5. *Пусть $A = \langle a_{ij} \rangle_{i,j=1,\ldots,n}$ — матрица порядка $n \times n$ с определителем $\Delta = \det A$. Обозначим через $C = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\ldots,n}$ матрицу, состоящую из элементов $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, где A_{ij} — ij-ый минор матрицы A. Тогда для всякого $k, 1 \le k \le n-1$ справедливо равенство:*

$$\det \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\ldots,k} = \Delta^{k-1} \det \langle a_{ij} \rangle_{i,j=k+1,\ldots,n}.$$

Применяя эту теорему к матрицам G и C для $k = 2$, получаем равенство

$$(1 - \cos^2 A) \det G = (c_{33}c_{44} - c_{34}^2).$$

Заметим, что $\cos l_A = \dfrac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}$.
Откуда элементарными преобразованиями получаем: $\dfrac{\sin A}{\sin l_A} = \dfrac{\sqrt{c_{33}c_{44}}}{\sqrt{\det G}}$. □

Из предложения 3, как и в гиперболическом случае, непосредственно следует

Теорема 6. *Пусть T — сферический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A \sin D}{\sin l_A \sin l_D} = \frac{\sin B \sin E}{\sin l_B \sin l_E} = \frac{\sin C \sin F}{\sin l_C \sin l_F} = \frac{\sqrt{P}}{\det G}, \tag{4.6}$$

где $P = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}$.

Пусть теперь T — симметричный сферический тетраэдр.

Положим $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$. При непосредственном вычислении несложно заметить, что $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = \gamma$, где $\gamma = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc$, и $\Delta = \det G = (1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)$. Подставляя полученные выражения в условие теоремы 6, получаем:

Теорема 7 (Теорема синусов). *Пусть T — симметричный сферический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A}{\sin l_A} = \frac{\sin B}{\sin l_B} = \frac{\sin C}{\sin l_C} = v,$$

где $v = \dfrac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}, \gamma = 1-a^2-b^2-c^2-2abc, \Delta = (1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(1-a-b-c)$ и $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$.

Отметим, что из определения v следует полезное тождество:

$$v^2 - 1 = \frac{4(a+bc)(b+ac)(c+ba)}{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(1-a-b-c)}.$$

Аналогично лемме 1, получаем лемму 2.

Лемма 2. *Пусть p определяется следующим образом:*

$$p^2 = \frac{4(a+bc)(b+ac)(c+ba)}{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(1-a-b-c)},$$

где $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$ и A, B, C — двугранные углы симметричного сферического тетраэдра T. Тогда

$$\operatorname{arsh}\frac{a}{p} + \operatorname{arsh}\frac{b}{p} + \operatorname{arsh}\frac{c}{p} = \operatorname{arsh}\frac{1}{p}.$$

Следующая теорема дает интегральное представление для объема сферического симметричного тетраэдра T.

Теорема 8. *Объем сферического симметричного тетраэдра T вычисляется по формуле:*

$$Vol\, T = -\int\limits_{v}^{+\infty}\Big(\operatorname{arsh}\frac{a}{\sqrt{\nu^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{b}{\sqrt{\nu^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{c}{\sqrt{\nu^2-1}} - \operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{\nu^2-1}}\Big)\frac{d\nu}{\nu},$$

где

$$v = \frac{1-a^2-b^2-c^2-2abc}{\sqrt{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(-1+a+b+c)}}$$

и $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$.

Доказательство. По теореме 1 (Дифференциальная формула объема Шлефли) для $V = VolT$ имеем $dV = l_A dA + l_B dB + l_C dC$. Следовательно объем V удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = l_A, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = l_B, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = l_C.$$

Отметим, что $V \to 0$ при $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$, то есть когда тетраэдр T становится правильным евклидовым тетраэдром.

Положим $\widetilde{V} = -\int\limits_{v}^{+\infty} F(\nu, A, B, C)d\nu$, где

$$F(\nu, A, B, C) = \operatorname{arsh}\frac{a}{\sqrt{\nu^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{b}{\sqrt{\nu^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{c}{\sqrt{\nu^2-1}} - \operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{\nu^2-1}}.$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\widetilde{V}$ обладает свойствами:

(i) $\quad \dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = l_A, \dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial B} = l_B, \dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial C} = l_C,$

(ii) $\quad \widetilde{V} \to 0$ при $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$.

Проверяем свойство (i).

Используя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получаем:

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = F(v, A, B, C)\frac{\partial v}{\partial A} + \int\limits_{v}^{+\infty} \frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial A}\frac{d\nu}{\nu}.$$

По лемме 2

$$F(v, A, B, C) = \operatorname{arsh}\frac{a}{\sqrt{v^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{b}{\sqrt{v^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{c}{\sqrt{v^2-1}} - \operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{v^2-1}} = 0.$$

Следовательно $F(v, A, B, C)\dfrac{\partial v}{\partial A} = 0$.

Далее

$$\frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - (1-a^2)}}$$

и

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{d(\cos A)}{dA} = \sin A = \sqrt{1-a^2}.$$

Откуда

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = -\int\limits_{v}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-a^2}d\nu}{\nu\sqrt{\nu^2-(1-a^2)}} = -\arcsin\frac{\sqrt{1-a^2}}{\nu}\Bigg|_{v}^{+\infty} = \arcsin\frac{\sqrt{1-a^2}}{v} = l_A,$$

так как из условия теоремы 2 (Теорема синусов) $l_A = \arcsin\dfrac{\sin A}{v} =$
$= \arcsin\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{v}$.

Аналогично проверяются равенства $\dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial B} = l_B, \dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial C} = l_C$.

Проверяем свойство (ii). Если $A, B, C \to \arccos \frac{1}{3}$, то $v \to +\infty$. В силу сходимости интеграла имеем $\widetilde{V} \to 0$. $\square$

Следствие 1. *Пусть T — симметричный сферический тетраэдр, грани которого являются прямоугольными треугольниками со сторонами равными $\pi - A, \pi - B$ и $\pi - C$. То есть справедливо одно из соотношений $\cos A + \cos B \cos C = 0, \cos B + \cos A \cos C = 0$ или $\cos C + \cos A \cos B = 0$. Тогда объем тетраэдра T равен*

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}.$$

Доказательство. Так как сферическое пространство $\mathbb{S}^3$ замощается 16 экземплярами тетраэдра $T = T\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то объем

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16} Vol(\mathbb{S}^3) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Когда A, B, C удовлетворяют условию теоремы 8, тогда

$$v^2 + 1 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ba)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)} = 0.$$

Следовательно, $v = 1$. Тогда из теоремы 8 имеем:

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \int_1^{+\infty} \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \frac{d\nu}{\nu} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Рассмотрим функцию

$$I(A) = -\int_1^{+\infty} \operatorname{arsh} \frac{\cos A}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \frac{d\nu}{\nu}.$$

Лемма 3.

$$I(A) = -\int_1^{+\infty} \operatorname{arsh} \frac{\cos A}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \frac{d\nu}{\nu} = \frac{A^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}, 0 \le A \le \frac{\pi^2}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$I^{'}(A) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin A}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 A}{\nu^2 - 1}}} \frac{d\nu}{\nu\sqrt{\nu^2 - 1}} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin A}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 A}} \frac{d\nu}{\nu} = A.$$

Учитывая что $V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$, получаем $I(0) = -\frac{\pi^2}{8}$. Следовательно,

$$I(A) = \frac{A^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}.$$

$\square$

По теореме 8 получаем

$$V(A,B,C) = I(A) + I(B) + I(C) - I(0) = \frac{A^2+B^2+C^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}.$$

Следствие 1 доказано. $\square$

Подставляя $\nu = \operatorname{cth} t$ в условие теоремы 8, получаем:

Теорема 9. *Объем сферического симметричного тетраэдра T вычисляется по формуле:*

$$-2\int\limits_0^\tau (\operatorname{arsh}(\cos A \operatorname{sh} t) + \operatorname{arsh}(\cos B \operatorname{sh} t) + \operatorname{arsh}(\cos C \operatorname{sh} t) - t)\frac{dt}{\operatorname{sh} 2t},$$

где τ — положительное число, которое находится из уравнения

$$\operatorname{cth}^2\tau = \frac{1-a^2-b^2-c^2-2abc}{\sqrt{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(1-a-b-c)}},$$

где $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$.

Список литературы

[1] I. H. Sabitov, The volume of polyhedron as a function of the lengths of its edges. (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I (Mat. Mekh.), 6, 1996, 89–91,113: English translation in: Moskow Univ. Math. Bull. 51(6), 1996, 58–59.

[2] N. I. Lobatschefskij, Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale, Deutsche Übersetzung von H.Liebmann, Leipzig: Teubner, 1904.

[3] L. Schläfli, Theorie der vielfachen Kontinuität, In: Gesammelte mathematishe Abhandlungen, Basel: Birkhäuser, 1950.

[4] R. Kellerhals, On the volume of hyperbolic polyhedra, Math.Ann., 285, 1989, 541–569.

[5] D. A. Derevnin, A. D. Mednykh, On the volume of spherical Lambert cube, arXiv: math.MG/0212301, 22pp.

[6] A. D. Mednykh, J. Parker, A. Yu. Vesnin, On Hyperbolic Polyhedra Arising as Convex Cores of Quasi-Fuchsian Punctured Torus Groups, Seoul National University, 2002, RIM-GARC Preprint Series 02-01, 33 pp.

[7] G J. Martin, The volume of regular tetrahedra and sphere packings in hyperbolic 3−space, Math. Chronicle, 20, 1991, 127–147.

[8] E. B. Vinberg, Geometry II, New York: Springer-Verlag, 1993.

[9] Wu–Yi Hsiang, On infinitesimal symmetrization and volume formula for spherical or hyperbolic tetrahedrons, Quart.J.Math, Oxford, Second Series 39, 1988, 463–468.

[10] Yu. Cho, H. Kim, On the volume formula for hyperbolic tetrahedra, Discrete and Computational Geometry, 22, 1999, 347–366.

[11] J. Murakami and M. Yano, On the volume of hyperbolic tetrahedron, Preprint, 2001, available at http://faculty.web.waseda.ac.jp/murakami/papers/tetrahedronrev3.pdf.

[12] A. Ushijima, A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra, Preprint, 2002, available at http://www.math.titech.ac.jp/Users/ushijima/welcome-e.html.

[13] C. D. Hodgson, Schläfli revisited: Variation of volume in constant curvature spaces, Preprint.

[14] F. Luo, On a problem of Fenchel, Geometriae Dedicata, 64, 1997, 227–282.

[15] V. V. Prasolov, Problems and theorems in linear algebra, Translations of mathematical monographs, 134, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 225 pp.

Александр Дмитриевич Медных
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН ,
Новосибирский Государственный Университет,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ
mednykh@math.nsc.ru

Дмитрий Александрович Деревнин
Новосибирский Государственный Университет,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ
derevnin@math.nsc.ru

Марина Геннадьевна Пашкевич
Новосибирский Государственный Университет,

Новосибирск, 630090, РОССИЯ

marinap@math.nsc.ru