

**Важнейшие научные результаты ИМ СО РАН  
за 2020 год**

**1.1.1. Алгебра, теория чисел, математическая логика**

**1. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы конечно порожденная группа, действующая на дереве с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и ребер, была группой  $n$ -узла, при  $n \neq 2$**  (с.н.с., к.ф.-м.н. Дудкин Ф.А., с.н.с., к.ф.-м.н. Мамонтов А.С., оба лаборатория А1).

Конечно порожденная группа  $G$ , действующая на дереве с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и ребер, называется обобщенной группой Баумслэга-Солитера (GBS группой). В соответствии с теорией Басса - Серра, с такой группой связывается граф с метками, описывающий порождающие и определяющие соотношения этой группы. В работе доказывается, что группа 1-узла является GBS группой в том и только в том случае, когда  $G$  является группой торического узла, и описываются все GBS группы  $n$ -узлов для  $n \geq 3$ .

[1] *Dudkin F.A., Mamontov A.S.* On knot groups acting on trees. // Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **29**:09 (2020), 2050062. DOI: 10.1142/S0218216520500625

**2. Найден способ построения широкого класса простых правосимметрических (прелиевых) супералгебр, содержащих матричную подалгебру с общей единицей, при помощи введенного понятия эндоморфа (супер)алгебры** (в.н.с., д.ф.-м.н. Пожидаев А.П., лаборатория А1).

Эндоморф - это естественное расширение алгебры при помощи её алгебры эндоморфизмов. Эндоморфы возникают при описании правосимметрических алгебр, содержащих подалгебру матриц с общей единицей. Как оказалось, частным случаем эндоморфа является конструкция Ж. Хелмстеттера, предложенная в 1971 г. В настоящей работе доказано, что эндоморф (супер)алгебры является простой (супер)алгеброй, если исходная алгебра не является алгеброй скалярного умножения. Если исходная (супер)алгебра является правосимметрической (прелиевой), то её эндоморф также правосимметричен (прелиев). Тем самым строится широкий класс простых (правосимметрических, прелиевых) (супер)алгебр, содержащих матричную подалгебру с общей единицей. Находится алгебра дифференцирований эндоморфа унитарной алгебры и группа автоморфизмов простой правосимметрической алгебры, являющейся эндоморфом прямой суммы полей.)

[1] *А.П. Пожидаев.* Об эндоморфах правосимметрических алгебр., Сиб. мат. журн. **61**:5 (2020), 1077-1086.

**3. Доказано, что если  $X$  – полный класс конечных групп, то  $X$ -субмаксимальная подгруппа конечной группы  $X$ -максимальна в своем нормализаторе** (г.н.с., д.ф.-м.н. Васильев А.В., в.н.с., д.ф.-м.н. Ревин Д.О., оба лаборатория А1, инж.-иссл. Скрасанов С.В., лаборатория Т3).

Обозначим через  $X$  непустой класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений (например, класс разрешимых групп). Как известно еще из работ Э.Галуа и К.Жордана, для теории групп и ее приложений важно уметь находить подгруппы данной группы, принадлежащие классу  $X$ , причем можно ограничиться отысканием  $X$ -максимальных подгрупп. Задачи такого рода неиндуктивны, поскольку плохо сводятся к факторам субнормального ряда группы. Х.Виланд в 1963-64 году обобщил понятие  $X$ -максимальной подгруппы, определив т. н.  $X$ -субмаксимальные подгруппы. Авторами установлено, что определения  $X$ -субмаксимальной подгруппы, данные Виландом в разное время, не эквивалентны, но теорема Виланда-Хартли справедлива в смысле любого из этих определений.

[1] *Revin D., Skresanov S., Vasil'ev A.* The Wielandt-Hartley theorem for submaximal  $X$ -subgroups. Monatshefte für Mathematik, **193**:1 (2020), 143-155.

**4. Определены P-комбинации и E-комбинации моделей и их теорий, охарактеризованы и описаны их e-спектры, аппроксимации, порождения, эренфойхтовость и ранги в общем случае, а также для упорядоченных теорий и теорий абелевых групп (в.н.с., д.ф.-м.н. Судоплатов С.В., лаборатория Л1, совместно с Кулпешовым Б.Ш. (член-корр. НАН Республики Казахстан, профессор Казахстано-Британского технического университета г. Алматы), Н.Д. Мархабатовым (аспирант Новосибирского государственного технического университета), И.И. Павлюк (к.ф.-м.н., старший преподаватель Новосибирского государственного технического университета)).**

Рассматриваются P-комбинации и E-комбинации структур, т.е. результаты размещения структур на одноместных предикатах  $P_i$  и классах эквивалентности E соответственно. Для таких комбинаций структур и их теорий введено понятие e-спектра, означающее число новых теорий структур, которые образуются в дополнениях предикатов  $P_i$  и в классах эквивалентности E соответственно, при взятии элементарно эквивалентных комбинаций. Для произвольной мощности реализованы e-спектры P-комбинаций и E-комбинаций. Охарактеризовано условие существования наименьшего/минимального порождающего множества для произвольного семейства теорий, позволяющее сводить e-спектры к мощности таких множеств. Для семейств теорий счетной сигнатуры установлено существование определенных подсемейств с заданными рангом и степенью, имеющих заданный e-спектр. В терминах шмелевских инвариантов охарактеризована псевдоконечность теорий абелевых групп, согласно которой теории абелевых групп сводятся к теориям конечных абелевых групп. Охарактеризована и описана эренфойхтовость дизъюнктивных P-комбинаций упорядоченных структур чистого линейного порядка, задающая e-спектр таких комбинаций.

Таким образом, описана возможность сведения теорий из данного класса к теориям, имеющим достаточно простое устройство, в частности, к теориям конечных структур, а также описан спектр теорий, порождаемых данным семейством.

[1] *Sudoplatov S.V. Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series «Mathematics». 2018. Vol. 24. P. 82-101.*

[2] *Pavlyuk I.I., Sudoplatov S.V. Ranks for families of theories of abelian groups // The Bulletin of Irkutsk State University. Series «Mathematics». 2019. Vol. 28. P. 95-112.*

[3] *Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. P-combinations of ordered theories // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, N 2. P. 227-237.*

[4] *Sudoplatov S.V. Approximations of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 715-725.*

[5] *Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. Definable families of theories, related calculi and ranks // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 700-714.*

**5. Найдены критерий существования позитивных всюду определенных вычислимых  $P_1^1$ -нумераций семейств надмножеств заданного  $P_1^1$ -множества, а также критерий существования однозначных вычислимых  $\Sigma_1^1$ -нумераций семейств подмножеств заданного  $\Sigma_1^1$ -множества (в.н.с., д.ф.-м.н. Пузаренко В.Г., лаборатория Л1, совместно с Калимуллиним И.Ш., Файзрахмановым М.Х. (оба КФУ)).**

Теория нумераций (в классическом понимании) - это один из активно развивающихся разделов классической вычислимости, в рамках которого основными объектами служат отображения, действующие из множества натуральных чисел на заранее заданное множество  $S$  произвольной природы, которые, в свою очередь, сравниваются между собой посредством алгоритмической сводимости, определённой в терминах рекурсивных (или вычислимых, следуя современной терминологии, предложенной Р. Соаром в начале этого тысячелетия) функций. Здесь необходимо упомянуть классические результаты К. Гёделя и Р. Фридберга о существовании универсальных частично вычислимых функций и универсальных частично вычислимых функций, перечисляющих одноместные частично вычислимые функции без повторений. Вычислимые нумерации объектов без повторений принято называть фридберговыми. Отметим, что наличие универсальной функции для класса  $K$ , имеющей хорошее алгоритмическое описание, позволяет на практике задавать класс

К целиком одной единственной функцией. Современная теория нумераций сформировалась в работах А. Мальцева, Ю. Ершова, Дж. Сакса, В. Успенского, И. Лаврова, А. Лахлана и их учеников. Особую роль при этом сыграло появление книги Ю. Ершова «Теория нумераций» (М., Наука, 1977).

В статье Дж. Оуингса (J.C.Owings. The meta r.e. sets but not the  $P_1^1$  sets can be enumerated without repetition, J. Symbolic Logic, 35, 2(1970), 223-229), базирующейся на методах ординальной вычислимости, предложенных Дж. Саксом (см., например, Sacks G. Higher Recursion Theory. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1990), исследуется проблема существования фридберговских нумераций в классе  $P_1^1$ . Следует особо отметить, что здесь может быть использована техника  $\omega_1^{CK}$ -вычислимости, где  $\omega_1^{CK}$  - первый невычислимый ординал. В этом случае  $\omega$ -вычислимость, где  $\omega$  - множество натуральных чисел, соответствует классической вычислимости.

Следующим этапом в развитии обобщения понятия нумерации является подход представлений на структурах слабой теории множеств, предложенный в книге Ю. Ершова «Определимость и вычислимость» (Новосибирск, Научная книга, 1996). Дальнейшее развитие направления, связанного с представлениями на абстрактных структурах, отражено в работах коллектива авторов (например, Пузаренко В.Г. О разрешимых вычислимых  $A$ -нумерациях. Алгебра и логика, 41, 5(2002), 568-584; Пузаренко В.Г. К вычислимости на специальных моделях. Сибирский математический журнал, 46, 1(2005), 185-208; Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г., Файзрахманов М.Х. Позитивные нумерации в допустимых множествах. Сибирский математический журнал, 61, 3(2020), 607-621). Что касается ординальной вычислимости, а также структур арифметики Пеано, прогрессом в развитии служит работа Ли Вей (Wei Li. Friedberg numbering in Fragments of Peano Arithmetic and alpha-Recursion Theory, J. Symb. Log., 78, 4(2013), 1135-1163).

Для исследования свойств алгоритмически замкнутых классов множеств натуральных чисел необходим переход от данных классов к теоретико-множественным структурам (т.е. допустимым множествам). Такие переходы были предложены в следующих работах: Морозов А.С., Пузаренко В.Г. О  $\Sigma$ -подмножествах натуральных чисел. Алгебра и логика, 43, 3(2004), 291-320; Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г. О принципах вычислимости на допустимых множествах. Математические труды, 7, 2(2004), 35-71. Непосредственно о представлениях речь идёт в работе (Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г., Файзрахманов М.Х. Позитивные представления семейств относительно  $e$ -оракулов, Сибирский математический журнал, 59, 4(2018), 823-833), в которой доказывается существование почти однозначного представления для большинства используемых семейств (включая и семейства, отвечающие за универсальные семейства множеств).

Существенным обстоятельством здесь является использование именно частичных представлений на натуральных числах, а не всюду определенных. В работах (J.C. Owings. The meta r.e. sets but not the  $P_1^1$  sets can be enumerated without repetition, J. Symbolic Logic, 35, 2(1970), 223-229; Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г., Файзрахманов М.Х. Частичные разрешимые представления в гиперарифметике, Сиб. матем. журн., 60, 3(2019), 599-609) отмечается, что данное обстоятельство может оказаться серьёзным препятствием как в дальнейшем исследовании классов аналитической иерархии  $P_1^1$  и  $\Sigma_1^1$ , так и в появлении в данных классах объектов с желаемыми свойствами.

Прежде, чем перейти к изложению значения основных результатов и используемых для их достижения методов, отметим, что предложенные трансформации могут рассматриваться как связующее звено между различными подходами к нумерациям, предложенными в последнее время учеными С. Гончаровым, А. Сорби, С. Бадаевым и др. Однако пока невозможно проследить тесных взаимосвязей с нумерациями на классах разностной иерархии (или, по-другому, иерархии Ершова).

В настоящей работе для существования фридберговских представлений в классе  $\Sigma_1^1$  используются две основные идеи: двойственность с классом  $P_1^1$  (во-первых, ранее авторами показано, что любая разрешимая нумерация в  $\Sigma_1^1$  эквивалентна некоторой однозначной, т.е. частичной биекции; во-вторых, любая однозначная вычислимая нумерация в классе  $\Sigma_1^1$  преобразуется в позитивную (необязательно однозначную, о которых уже известно всё, это связано с рассмотрением частичных представлений) всюду определенную (обязательно, про частичные к этому моменту также было известно всё) нумерацию двойственного класса в  $P_1^1$ ), а также использование ординальной

вычислимости, которая в рассматриваемом случае имеет определенные отличия от классической. Авторы в предложенной работе завершают исследования свойств существования фридберговских представлений основных классов множеств в  $\Sigma_1^1$ . Для исследователей, изучающих всюду определенные представления, статья может оказаться полезной наличием примеров позитивных всюду определенных представлений в  $P_1^1$  (здесь можно найти исчерпывающее представление для верхних и нижних конусов множеств относительно отношения включения).

[1] *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г., Файзрахманов М.Х.* О позитивных и однозначных нумерациях в гиперарифметике, *Алгебра и логика*, 59:1 (2020), 66-83.  
DOI: 10.33048/alglog.2020.59.104

**6. Доказано, что поле комплексных алгебраических чисел и упорядоченное поле вещественных алгебраических чисел имеют изоморфные представления, вычислимые за полиномиальное время** (в.н.с., д.ф.-м.н. Алаев П.Е., лаборатория Л2, совместно с Селивановым В.Л. (ИСИ СО РАН, КФУ)).

Доказано, что поле комплексных алгебраических чисел и упорядоченное поле вещественных алгебраических чисел имеют изоморфные представления в виде структур, вычислимых за полиномиальное время. В построенных полях найдены достаточно хорошие алгоритмы для решения двух задач:

- 1) вычисление значения полинома с коэффициентами из данного поля; алгоритм полиномиален при фиксированном числе переменных полинома;
- 2) поиск корней полинома с коэффициентами из данного поля; алгоритм полиномиален при фиксированной степени полинома, а также немного более слабых предположениях.

Найдены примеры, показывающие, что оценки для данных алгоритмов в некотором естественном смысле неулучшаемы.

[1] *Алаев П.Е., Селиванов В.Л.*, Поля алгебраических чисел, вычислимые за полиномиальное время. I, *Алгебра и логика*, **58**:6 (2019), 673-705.

**7. Разработаны общие подходы к системам с явными опровержениями** (н.с., к.ф.-м.н. Дробышев С.А., лаборатория Л2).

Традиционно, в логических системах негативные утверждения выражаются при помощи связки отрицания, тогда как позитивные выражаются при помощи предиката истинности — эта традиция восходит к Г. Фреге. Есть ряд логик, в которых опровержимость выражается наравне с истинностью, отрицание в таких системах часто называют сильным. Разработан общий подход к аксиоматизации модальных систем с сильным отрицанием при помощи систем Гильбертовского типа, роль формул в которых играют секвенции с одной посылкой и одним заключением. На примере 2-интуиционистской логики Х. Вансинга изучены системы с явными опровержениями, но без связки отрицания. Для этой системы, в частности, был получен аналог Гильбертовского исчисления на отмеченных формулах. Разработано понятие дефинициальной эквивалентности для систем с явными опровержениями, которое подходит для логик без связки отрицания.

[1] *Drobyshevich S.* A bilateral Hilbert-style investigation of 2-intuitionistic logic // *Journal of Logic and Computation*, 2019, v.29, No.5, p.665–692. DOI: 10.1093/logcom/exz010

[2] *Drobyshevich S.* A general framework for FDE-based modal logics // *Studia Logica*, 2020, V. 108, No. 6, 1281-1306. DOI: 10.1007/s11225-020-09897-z

**8. Доказана финитная аппроксимируемость фундаментальных квандлов ручных зацеплений, свободных квандлов и ряда других квандлов** (в.н.с., д.ф.-м.н. Бардаков В.Г., лаборатория У3, совместно с Singh M., Singh M. (оба IISER, India)).

Квандлов были введены независимо С. В. Матвеевым и Д. Джойсом в 1982 году для классификации узлов и зацеплений в трехмерном пространстве. Оказалось, что квандл узла является почти полным его инвариантом. Вместе с тем проблема изоморфизма квандлов далека от

своего решения. Поэтому для классификации квандлов изучают гомоморфизмы на конечные квандлы.

Основной результат: доказано, что фундаментальный квандл всякого ручного зацепления финитно аппроксимируем. Это значит, что если два элемента квандла различны, то найдется некоторый конечный квандл и гомоморфизм на него, такой, что образы этих элементов будут различны. Как следствие отсюда получается разрешимость проблемы равенства слов для фундаментальных квандлов зацеплений.

[1] Bardakov V., Singh M., Singh M. Free quandles and knot quandles are residually finite, Proceedings of the American Mathematical Society, **147**:8 (2019), 3621-3633.

[2] Bardakov V., Singh M., Singh M. Link quandles are residually finite, Monatshefte für Mathematik, **191** (2020), 679-690.

### 1.1.2. Геометрия и топология

**9. Получено перечисление накрытий трехмерных евклидовых многообразий** (г.н.с., д.ф.-м.н. Медных А.Д., лаборатория У6, совместно с Челноковым Г.Р. (ВШЭ, Москва)).

Замкнутые трехмерные многообразия с плоской метрикой, или, так называемые евклидовы формы, были классифицированы в начале прошлого века. С точностью до гомеоморфизма их ровно 10, шесть из них ориентируемы, а четыре неориентируемы. Фундаментальными группами таких многообразий являются кристаллографические группы без элементов конечного порядка. В серии работ, написанных авторами, дается полная классификация подгрупп конечного индекса в указанных кристаллографических группах. Даются явные формулы для числа подгрупп заданного индекса и заданного комбинаторного типа в каждой из 10 фундаментальных групп. Полученные формулы выражаются через классические теоретико-числовые функции. Далее, аналогичные результаты устанавливаются для классов сопряженных подгрупп в кристаллографических группах. С точки зрения топологии, это эквивалентно перечислению накрытий трехмерных евклидовых многообразий заданной кратности и заданного топологического типа. Для найденного числа подгрупп и числа накрытий построены производящие функции Дирихле. Полученные производящие функции выражаются через классическую дзета функцию Римана и ее простейшие аналоги.

[1] G. Chelnokov, M. Deryagina, A. Mednykh, On the coverings of Euclidean manifolds  $B_1$  and  $B_2$ , Comm. Algebra, **45**:4 (2017), 1558-1576.

[2] G. Chelnokov, A. Mednykh, On the coverings of Euclidean manifolds  $G_2$  and  $G_4$ , Comm. Algebra, **48**:7 (2020), 2725-2739.

[3] G. Chelnokov, A. Mednykh, On the coverings of Euclidean manifolds  $G_3$  and  $G_5$ , J. Algebra, **560** (2020), 48-66.

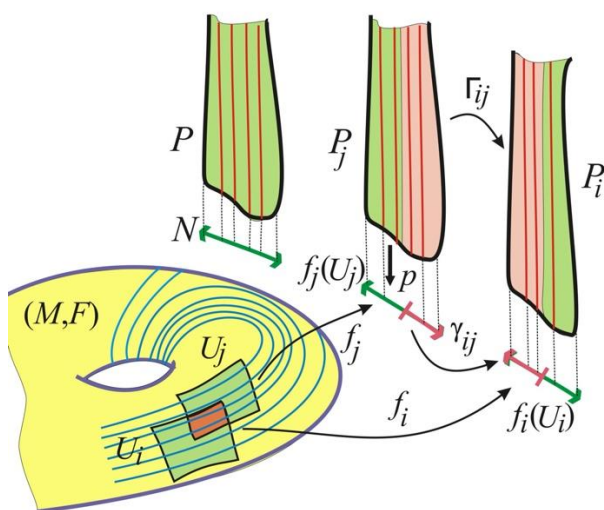
**10. Обобщены дифференциальные уравнения Йона, характеризующие образ лучевого преобразования на пространстве Шварца, на подходящим образом выбранные соболевские пространства. Получена характеристика образа лучевого преобразования на соболевских пространствах** (г.н.с., д.ф.-м.н. Шарафутдинов В.А., лаборатория ГЗ, совместно с Venkateswaran P. Krishnan, Ramesh Manna, Suman Kumar Sahoo (TIFR Centre for Applicable Mathematics, Sharada Nagar, Chikkabommasandra, Yelahanka New Town, Bangalore, India)).

Лучевое преобразование  $\Gamma^k$  интегрирует симметрическое тензорное поле  $f$  ранга  $m$  вдоль прямых  $\mathbb{R}^n$  с весом  $t^k$ . В работе характеризуется образ оператора  $f \rightarrow (I^0f, I^1f, \dots, I^mf)$  на пространстве Шварца быстро убывающих тензорных полей  $m$ . В размерности  $n > 2$  область значений лучевого преобразования на тензорных полях валентности  $m$  характеризуется некоторыми дифференциальными уравнениями порядка  $2(m+1)$ , обобщающими уравнения Йона. В двумерном случае область значений лучевого преобразования на тензорных полях характеризуется некоторыми интегральными условиями, которые обобщают классические условия совместности Гельфанда-Хелгасона-Людвига.

[1] V.P. Krishnan, R. Manna, S.K. Sahoo and V.A. Sharafutdinov. Momentum ray transforms, II: range characterization in the Schwartz space // Inverse Problems Vol. 36 (2020), N. 045009 (33 pp). DOI: 10.1088/1361-6420/ab6a65

**11. Сформулировано понятие хаотических слоений, обобщающее понятие хаотического поведения динамических систем. Исследованы трансверсальные свойства хаотических слоений Картана, приведены примеры (зав. лаб., д.ф.-м.н. Базайкин Я.В., лаборатория ГЗ, совместно с Галаевым А.С. (Университет Градца Кралове, Градец Кралове, Чехия), Жуковой Н.И. (НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия)).**

Слоения естественным образом возникают при глобальном описании систем уравнений в частных производных и могут быть рассмотрены как динамические системы в отсутствии времени. Понятие хаотических слоений, определяемое в работе, обобщает концепцию хаоса по Девани для динамических систем. Свойство слоения быть хаотическим является трансверсальным, то есть зависит от структуры пространства листов слоения. В работе найдено несколько типов картановских слоений, которые не могут быть хаотическими и построены примеры хаотических картановских слоений.



[1] Yaroslav V. Bazaikin, Anton S. Galaev, and Nina I. Zhukova. Chaos in Cartan foliations // Chaos Vol. 30 (2020), N. 103116, DOI: 10.1063/5.0021596.

**12. Доказано, что рациональный по импульсам первый интеграл с линейными числителем и знаменателем натуральной механической системы на двумерном торе всегда сводится к линейному интегралу (н.с., к.ф.-м.н. Агапов С.В., лаборатория Д6).**

Исследован вопрос о глобальном существовании рациональных по импульсам первых интегралов натуральной механической системы на двумерном торе, независимых от интеграла энергии. Доказано, что рациональный интеграл с линейными числителем и знаменателем (с аналитическими периодическими коэффициентами) всегда сводится к линейному интегралу. Аналогичный результат получен в случае квадратичного числителя и линейного знаменателя при некоторых дополнительных ограничениях на коэффициенты интеграла.

[1] С.В. Агапов, Рациональные интегралы натуральной механической системы на двумерном торе, Сиб. матем. журн., 61:2 (2020), 255–265.

### 1.1.3. Математический анализ

**13. Выведены уравнения максимальных поверхностей для отображений-графиков, построенных по классам контактных отображений групп Карно (в.н.с., д.ф.-м.н. Карманова М.Б., лаборатория Г1).**

Исследованы классы отображений-графиков, построенных по контактными отображениям произвольных групп Карно с минимальными ограничениями на структуры образа и прообраза. Для них установлены условия корректности постановки задачи о максимальных поверхностях, специфичные именно для неголономного случая, введено адекватное понятие приращения функционала (сублоренцевой) площади и доказана дифференцируемость этого функционала. Описаны необходимые условия максимальности поверхностей-графиков в терминах функционала площади и в терминах сублоренцевой средней кривизны, выведены соответствующие уравнения.

[1] Карманова М.Б. Классы максимальных поверхностей на группах Карно // Сибирский математический журнал, 2020, т.61, №5, с.1009-1026.

**14. Найдены простые эффективные рекуррентные формулы для вычисления констант Фавара. Вычислены явно константы экстремальной функциональной интерполяции в задаче Ю.Н. Субботина (г.н.с., д.ф.-м.н. Волков Ю.С., лаборатория Ч1).**

В теории приближения при решении экстремальных задач, получении оценок погрешности приближения и ряда других задач часто приходится иметь дело с функциями сравнения вида

$$\varphi_n(x) = \frac{4}{\pi^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \left[ (2k+1)\pi x - \frac{\pi n}{2} \right]}{(2k+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

называемыми идеальными сплайнами Эйлера или функциями (суммами) Ахиезера-Крейна-Фавара или просто Фавара. Итоговые результаты и оценки как правило записываются через величины  $\mathcal{K}_n = \pi^n \|\varphi_n\|_{\infty}$ , называемые константами Фавара.

Для вычисления констант Фавара установлена очень простая рекуррентная формула

$$\mathcal{K}_0 = 1, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{K}_n = \frac{\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{K}_k \mathcal{K}_{n-1-k}, \quad n = 2, 3, \dots$$

В задаче экстремальной функциональной интерполяции об определении оптимальной константы

$$A_{n,p} = \sup_{y \in Y_{n,p}} \inf_{f \in F_{n,p}} \|f^{(n)}\|_{L_p},$$

где  $Y_{n,p} = \{y: y = \{y_k\}_{k \in Z}, \|\Delta^n y\|_{l_p} \leq 1\}$  класс интерполируемых последовательностей,  $\Delta^n y$  последовательность, членами которой являются значения оператора обычной конечной разности порядка  $n$  на последовательности  $y$ ,  $F_{n,p} = \{f: f \in W_p^n(R), f(k) = y_k, k \in Z\}$  класс функций, интерполирующих последовательность  $y$ . Эта задача была решена в 1965-1967 годах Ю.Н. Субботиным, однако явный вид константы  $A_{n,p}$  им был получен только для  $p = \infty$ . Автору удалось найти явный вид констант  $A_{n,p}$  при любых целых  $q$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , через константы Фавара и числа Эйлера. В частности

$$A_{n,1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \mathcal{K}_{n-1}^{-1}, \quad A_{n,2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1/2} \mathcal{K}_{2n-1}^{-1/2}, \quad A_{n,\infty} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \mathcal{K}_n^{-1}.$$

Были установлены аналогичные результаты по нахождению в явном виде констант для задачи экстремальной функциональной интерполяции в среднем. Эта задача также была решена Ю.Н. Субботиным в 1975-1997 годах, где требуемые константы были представлены в терминах норм некоторых функций. Удалось найти значения констант экстремальной интерполяции в среднем в терминах значений многочленов Эйлера в определённых точках, а в некоторых случаях в терминах чисел Эйлера и констант Фавара.

[1] Волков Ю.С. Об одной задаче экстремальной функциональной интерполяции и константах Фавара. ДАН. 2020, т. 495, С.29-32.

[2] Volkov Yu.S. Efficient computation of Favard constants and their connection to Euler polynomials and numbers. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. V.17. P. 1921-1942.

[3] Волков Ю.С. Многочлены Эйлера в задаче экстремальной функциональной интерполяции в среднем. Труды ИММ. 2020. Т.26, № 4, С. 83-97.

**1.1.4. Дифференциальные уравнения и математическая физика**

**15. Получены оценки решений классов неавтономных нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием** (с.н.с., к.ф.-м.н. Матвеева И.И., лаборатория Д5).

Рассмотрены некоторые классы нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Введены новые функционалы Ляпунова – Красовского, которые позволили получить оценки решений на полупрямой  $\{t>0\}$  для систем с постоянным и переменным запаздыванием. Из доказанных теорем вытекают результаты об экспоненциальной и робастной устойчивости. Оценки дают возможность указать скорость стабилизации решений на бесконечности.

[1] *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.

[2] *Matveeva I.I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. V. 2020, No. 20. P. 1-12.

**16. Получены условия существования цикла у 6-мерной динамической системы, моделирующей кольцевую генную сеть. Для подобной 4-мерной системы построена инвариантная поверхность, имеющая нетривиальное зацепление (зацепление Хопфа) с её устойчивым циклом. Для аналогичной 5-мерной системы получены условия существования по крайней мере двух различных циклов** (г.н.с., д.ф.-м.н. Голубятников В.П., н.с., к.ф.-м.н. Аюпова Н.Б., оба лаборатория УЗ, совместно с Кирилловой Н.Е. (аспирант ИМ), Градовым В.С. (ММФ НГУ), Минушкиной Л.С. (ММФ НГУ)).

Получены достаточные условия существования периодической траектории у шестимерной кусочно-линейной динамической системы, моделирующей простейшую несимметричную кольцевую генную сеть. Для отображения Пуанкаре установлено свойство монотонности. Построена гомеоморфная тору инвариантная окрестность такого цикла.

## Hopf link in $S^3 \subset R^4$ of $\mathcal{C}$ and $\mathcal{M}_3$

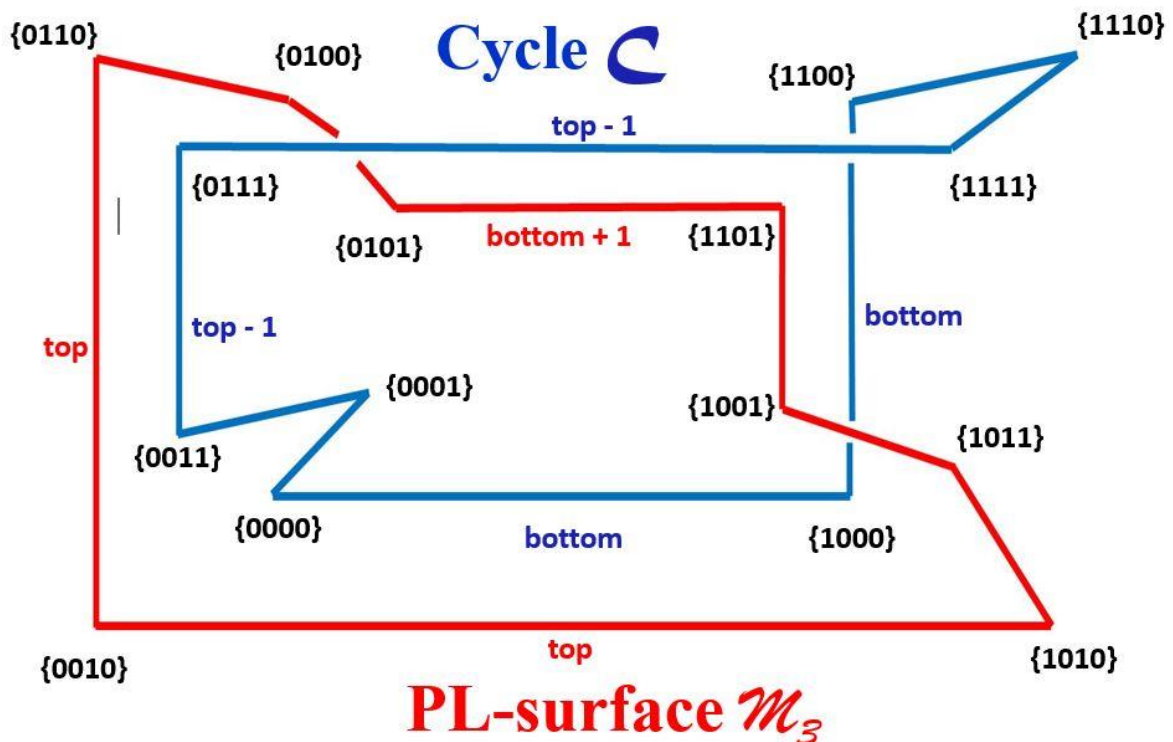


Рисунок 1: Зацепление Хопфа



В фазовом портрете подобной четырёхмерной кусочно-линейной динамической системы, моделирующая генную сеть с одной отрицательной и тремя положительными обратными связями вне области притяжения устойчивого цикла  $C$ , обнаруженного ранее Глассом и Пастернаком (J. Math. Biol. 1978, v. 6, p. 207-223), мы построили кусочно-линейную инвариантную поверхность  $M_3$ , имеющую нетривиальное зацепление с циклом  $C$ .

Для подобной пятимерной динамической системы получены достаточные условия существования по крайней мере двух различных циклов.

Полученные результаты послужили основой построения адекватных моделей генной сети, регулирующей раннюю стадию развития мушки дрозофилы, и провести серии численных экспериментов, в том числе и с учётом возможных мутаций. Результаты моделирования согласуются с имеющимся экспериментальными биологическими данным.

[1] Аюпова Н.Б., Голубятников В.П. Структура фазового портрета одной кусочно-линейной динамической системы // СЖИМ. 2019, т. 22, N 4, с. 19-25.

[2] Голубятников В.П., Минушкина Л.С. Монотонность отображения Пуанкаре в некоторых моделях кольцевых генных сетей // СЖИМ. 2019, т. 22, N 3, с. 39-47.

[3] Кириллова Н.Е., Минушкина Л.С. О дискретизации фазовых портретов динамических систем // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2019, № 4 (108), С. 82-85.

[4] Голубятников В.П., Градов В.С. О неединственности циклов в некоторых кусочно-линейных моделях кольцевых генных сетей // Математические Труды. 2020, т. 23, N 1. С. 107-122.

[5] Бухарина Т.А., Акинъшин А.А., Голубятников В.П., Фурман Д.П. Математическая и численная модели центрального регуляторного контура системы морфогенеза механорецепторов Дрозофилы // СЖИМ, 2020, т. 23, N 2, с. 41-50.

**17. Доказано, что состояние покоя магнитогидродинамической модели, описывающей течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в бесконечном плоском канале, находящемся под влиянием внешнего магнитного поля и температуры, линейно неустойчиво по Ляпунову** (зав. лаб., д.ф.-м.н. Блохин А.М., г.н.с., д.ф.-м.н. Ткачев Д.Л., н.с., к.ф.-м.н. Рудометова А.С., все лаборатория Д3).

Исследуется линейная устойчивость состояния покоя для обобщения базовой реологической модели Покровского-Виноградова, которая описывает течения растворов и расплавов несжимаемых вязкоупругих полимерных сред, на неизотермический случай в присутствии магнитного поля, см. рис.1).

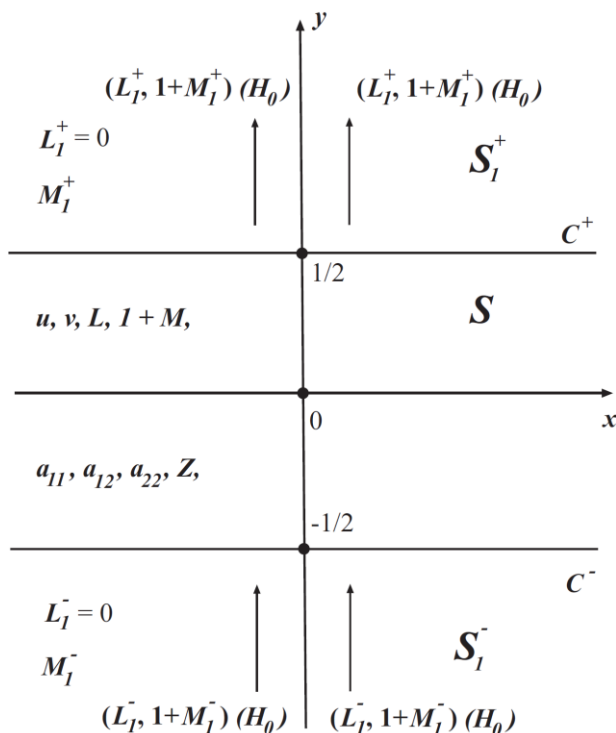


Рис.1

Течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости определяется компонентами вектора скорости  $u, v$ , вектора напряженности магнитного поля  $L, 1 + M$ , компонентами тензора анизотропии  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  и температурой  $Z$ , при этом стороны канала, электроды  $C^+, C^-$ , являются границами раздела двух однородных изотропных магнетиков.

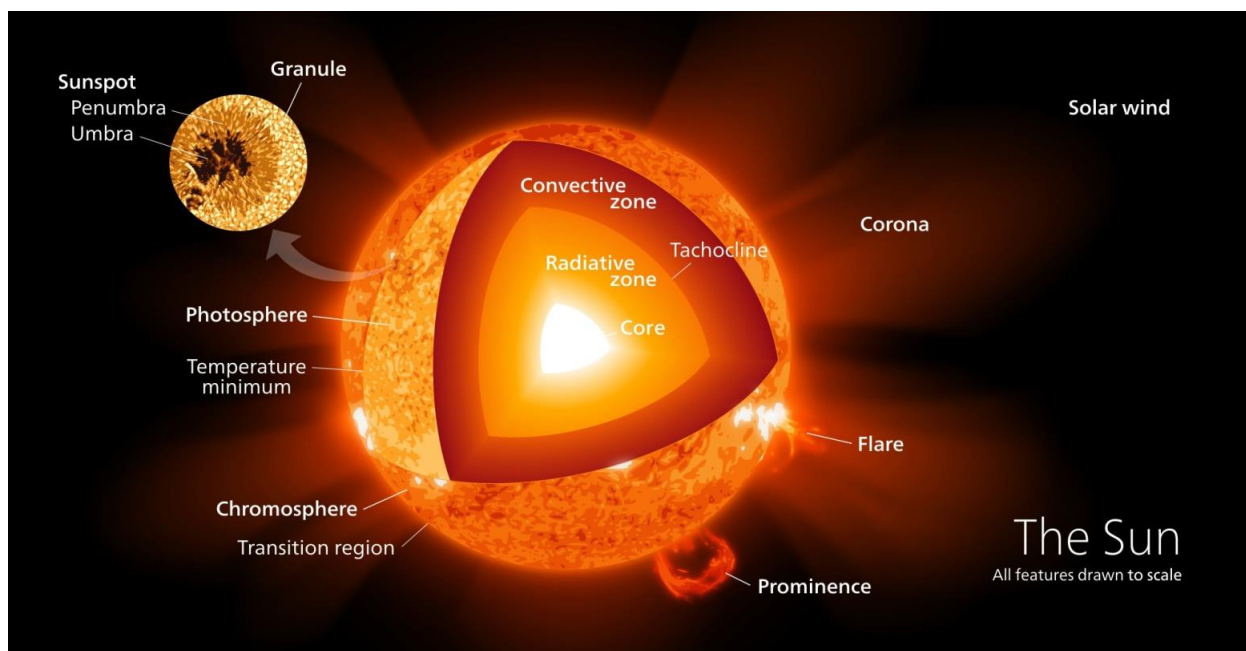
Доказано, что линейризованная относительно состояния задача, обладает следующим свойством: при определенных значениях силы тока проводимости, который подается на электроды, и в случае абсолютной проводимости, у проблемы существуют решения, амплитуда которых растет экспоненциальным образом (в качестве класса решений выбран класс функций, периодических по переменной, меняющейся вдоль стороны канала).

Этот факт подтвержден в результате проведенных численных экспериментов, если стенки канала сделаны из достаточно большого набора материалов, к которым относятся, например, эбонит, вольфрам, медь.

[1] *А.М. Блохин, А.С. Рудометова, Д.Л. Ткачёв.* МГД модель несжимаемой полимерной жидкости: линейная неустойчивость состояния покоя // Сиб. журн. индустр. матем., 2020, т. 23, № 3, с. 16–30.

**18. Доказано, что ударные волны в магнитной гидродинамике (МГД) мелкой воды структурно устойчивы тогда и только тогда, когда высота тонкого слоя возрастает после прохождения фронта ударной волны. Для тангенциальных разрывов в МГД мелкой воды найдено достаточное условие структурной устойчивости этих разрывов (г.н.с., д.ф.-м.н. Трахинин Ю.Л., лаборатория ДЗ).**

Уравнения магнитной гидродинамики (МГД) мелкой воды были предложены в 2000 году астрофизиком Питером Джилманом для изучения глобальной динамики солнечного тахоклина — тонкого переходного слоя в Солнце (около 4 % радиуса) между зоной лучистого переноса и внешней конвективной зоной. В работе [1] исследована структурная устойчивость ударных волн и тангенциальных разрывов в МГД мелкой воды в смысле локального по времени существования и единственности гладких решений соответствующей задачи со свободной границей. Доказано, что ударные волны структурно устойчивы тогда и только тогда, когда высота тонкого слоя возрастает после прохождения фронта ударной волны. Для тангенциальных разрывов найдено достаточное условие их структурной устойчивости.



[1] *Trakhinin Y.* Structural stability of shock waves and current-vortex sheets in shallow water magnetohydrodynamics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2020, vol. 71, no. 4, article number 118, 13 pp.

### 1.1.5. Теория вероятностей и математическая статистика

**19. Построена общая асимптотическая теория обобщенных процессов восстановления** (г.н.с., академик Боровков А.А., г.н.с., д.ф.-м.н. Могульский А.А., оба лаборатория В1).

Обобщенные процессы восстановления (ОПВ) являются одной из самых распространенных математических моделей во многих приложениях теории вероятностей. В то же время они представляют собой естественное обобщение случайных блужданий и широкого класса процессов с независимыми приращениями – наиболее полно изученных классических объектов теории вероятностей. Поэтому общая асимптотическая теория ОПВ представляет как прикладной, так и теоретический интерес: она обобщает многие хорошо известные результаты теории вероятностей, относящиеся к случайным блужданиям и процессам с независимыми приращениями.

Главными элементами построенной теории являются:

- Основные предельные законы для ОПВ (в том числе функциональные предельные теоремы), включая случай бесконечной дисперсии скачков процесса; закон повторного логарифма, его аналоги.
- Интегро-локальные предельные теоремы для ОПВ в областях нормальных, умеренно-больших и больших уклонений.
- Принципы больших и умеренно больших уклонений для ОПВ в фазовом пространстве и в пространстве траекторий, включая принципы больших уклонений в граничных задачах с явным видом функционалов уклонений.
- Предельные теоремы, описывающие точную асимптотику в граничных задачах для ОПВ.
- Распространение принципа инвариантности для ОПВ на область умеренно больших и малых уклонений.
- В качестве приложений к другим разделам теории вероятностей получены основные предельные законы в области нормальных и больших уклонений для марковских аддитивных процессов.

В основе построенной теории лежит цикл работ [2]-[15], названных ниже, среди них работы [11] - [15] в соавторстве. Результаты работ [2] – [15] систематизированы, дополнены и изложены как единое целое в монографии [1].

- [1] *Боровков А.А.* Обобщенные процессы восстановления. 2020. М.: Издательство РАН. 455 с.
- [2] *Боровков А.А.* Интегральные теоремы для времени первого прохождения произвольной границы обобщенным процессом восстановления // Сибирский матем. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 961-981.
- [3] *Боровков А.А.* Принципы больших уклонений в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 3. С. 562-595.
- [4] *Боровков А.А.* О распределении времени первого прохождения случайным блужданием произвольной удаленной границы // Теория вероятностей и ее применения. 2016. Т. 61, вып. 2. С. 1-24.
- [5] *Боровков А.А.* Функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 1. С. 37-54.
- [6] *Боровков А.А.* Принципы умеренно больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления // Теория вероятностей и ее применения. 2019. Т. 64, вып. 2. С. 399-411.
- [7] *Боровков А.А.* Распространение принципа инвариантности для обобщенных процессов восстановления на область умеренно больших и малых уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 2020. Т. 65, вып. 4. С. 651-670.
- [8] *Боровков А.А.* О принципах больших уклонений для обобщенных процессов восстановления // Математические заметки. 2019. Т. 106, вып. 6. С. 811-820.
- [9] *Боровков А.А.* Интегро-локальные теоремы в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 64, вып. 6. С. 1229-1246.
- [10] *Боровков А.А.* Граничные задачи для обобщенных процессов восстановления // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 65, вып. 1. С. 29-59.
- [11] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сиб. матем. журнал. 1996. Т. 37, № 4. С. 745-782.

[12] Боровков А.А., Могульский А.А. Принципы больших уклонений для конечномерных распределений обобщенных процессов восстановления // Сибирский матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 36-64.

[13] Боровков А.А., Могульский А.А. Принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления. I, II // Теория вероятностей и ее применения. 2015. Т. 60, вып. 2. С. 227-247; вып. 3. С. 417-438.

[14] Боровков А.А., Могульский А.А. Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I, II // Сиб. мат. журнал. 2018. Т. 59, № 3. С. 491-513; 2018. Т. 59, № 4. С. 736-758.

[15] Боровков А.А., Могульский А.А., Прокопенко Е.И. Свойства функции уклонений обобщенного процесса восстановления и асимптотика преобразования Лапласа над его распределением // Теория вероятностей и ее применения. 2019. Т. 64, вып. 4. С. 625-641.

### 1.1.6. Вычислительная математика

### 1.1.7. Математическое моделирование

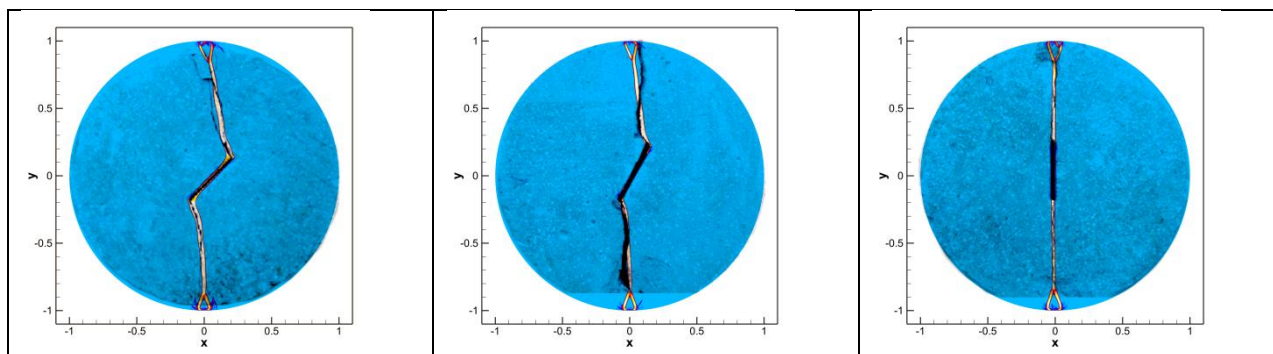
**20. Разработана гиперболическая термодинамически согласованная модель упругопластической сплошной среды с учетом континуального разрушения** (г.н.с., д.ф.-м.н. Роменский Е.И., лаборатория Д4, совместно с М. Dumbser, М. Tavelli, S. Chiochetti (University of Trento, Italy), А.-А. Gabriel (Ludwig Maximilian University of Munich, Germany)).

Разработана новая математическая модель сплошной среды для процессов повреждаемости и разрушения (как хрупкого, так и вязкого), определяющие дифференциальные уравнения которой образуют термодинамически согласованную гиперболическую систему. Повреждаемость учтена посредством введения параметра порядка и уравнения для него, нелинейная кинетика которого задает переход из неповрежденного состояния в «полностью поврежденное» состояние.

Для решения уравнений модели разработан высокоточный численный алгоритм, основанный на дискретном методе Галеркина и адаптивном измельчении сеток, с применением метода диффузных границ для расчета движения области, позволяющий проводить вычисления с использованием прямоугольных (параллелепипедных) сеток.

Проведены многочисленные расчеты, продемонстрировавшие применимость модели к изучению задач механики повреждаемости в широком диапазоне поведения материала. В частности, модель применялась к описанию разрушения земной коры в зонах ее разлома при сейсмическом воздействии.

На рисунке изображено сравнение результатов расчетов, показывающее хорошее соответствие с экспериментальными данными, для так называемого «бразильского теста» сжатия вертикальной нагрузкой цилиндрического образца горной породы с предварительно заданной трещиной (результаты расчетов образования зон разрушения наложены на экспериментальные данные).



[1] Tavelli M., Chiochetti S., Romenski E, Gabriel A., Dumbser M. Space-time adaptive ADER discontinuous Galerkin schemes for nonlinear hyperelasticity with material failure, Journal of Computational Physics, Vol. 422, P. 109758, 2020. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109758

**21. Представлена концептуально завершённая версия оригинального подхода к поиску равновесных состояний в линейных экономических моделях обмена** (в.н.с., д.ф.-м.н. Шмырев В.И., лаборатория Э1).

Исследована математическая первооснова оригинального подхода полиэдральной комплементарности, предложенного для отыскания экономического равновесия в моделях обмена и различных их вариаций. Проблема равновесия сводится к отысканию неподвижной точки точечно-множественных отображений симплекса цен в себя. Дана точная формулировка двойственного варианта предложенного сведения как для модели Фишера, так и для ее обобщений. Получено сведение и для общей модели с переменными бюджетами.

[1] *Шмырев В.И.* Двойственность в линейных экономических моделях обмена // Труды ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26, №3. С. 258-274. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-258-274

[2] *Шмырев В.И.* Полиэдральная комплементарность на симплексе. Метод встречных путей для убывающих квазирегулярных отображений // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, №2. С. 273-286. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-273-286

[3] *Shmyrev V.I.* Polyhedral Complementarity on a Simplex: Search for Fixed Points of Decreasing Regular Mappings // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2019. Vol. 13, Issue. 1. P. 145-156. DOI: 10.1134/S1990478919010150

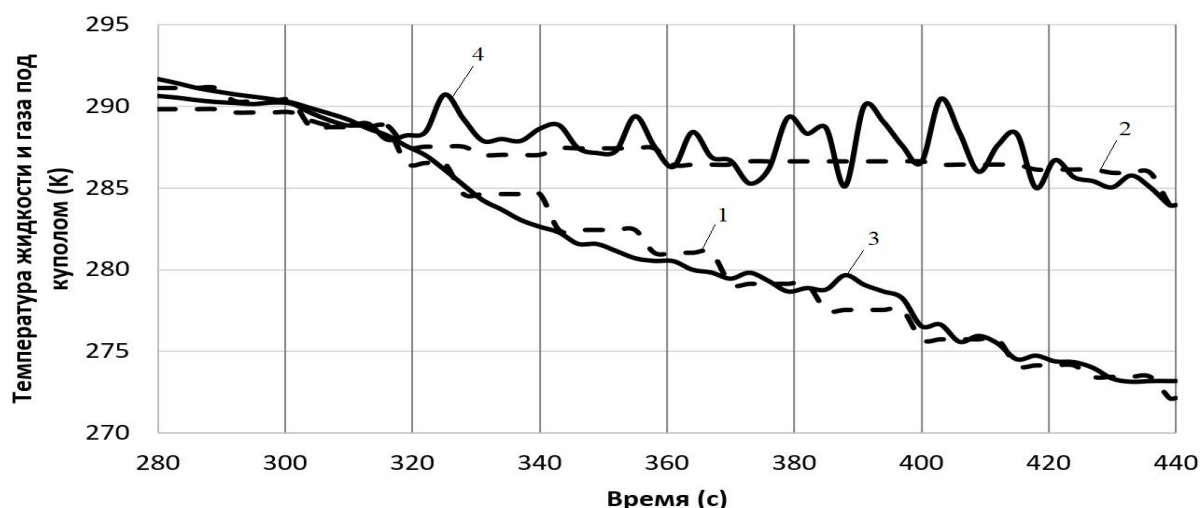
**22. Найдены общие условия совпадения нечётких ядер кооперативных игр и супердифференциалов соответствующих характеристических функций** (г.н.с., д.ф.-м.н. Васильев В.А., лаборатория Э1).

Найдены общие условия совпадения нечётких ядер кооперативных игр и супердифференциалов соответствующих характеристических функций. Как следствие, установлено, что вектор Шепли является единственным неблокируемым дележом в расширении Обэна любой почти положительной игры с побочными платежами. Полученная общая теорема представления ядра в виде супердифференциала позволяет использовать аппарат субдифференциального исчисления для описания структуры ядер как для классических нечетких расширений обычных кооперативных игр, так и для некоторых новых продолжений типа обобщенной игры «Аэропорт».

[1] *Васильев В.А.* Ядро и супердифференциал нечеткой TU-кооперативной игры // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12, вып. 2. С. 20-35.

**23. Проведено исследование эффекта резонанса для слоя жидкости, возникающего при определённых параметрах акустико-вакуумного воздействия. Результаты моделирования по основным характеристикам согласуются с полученными данными в проведенных натуральных экспериментах** (с.н.с, к.ф.-м.н. Паничкин А.В., лаборатория математического моделирования в механике ОФ ИМ, совместно с профессором, д.т.н. Трушляковым В.И., д.т.н. Новиковым А.А., к.т.н. Лесняком И.Ю. (ОмГТУ)).

Представлена физико-математическая модель образования пузырьков в ёмкости с жидкостью при акустико-вакуумном воздействии с исследованием процесса испарения модельной жидкости со свободной поверхности. Слой жидкости с пузырьками в системе «вакуумная камера – купол – слой жидкости с пузырьками – дно ванночки с акустическим воздействием» представлен в виде твёрдого тела с модулем упругости, зависящим от присутствия и изменения объёмов пузырьков. На основе исследования частотных характеристик слоя жидкости и акустического воздействия изучен и обоснован математической моделью с детальными расчетами эффект резонанса при акустико-вакуумного воздействии на ванночку с жидкостью, что приводит к увеличению скорости испарения.



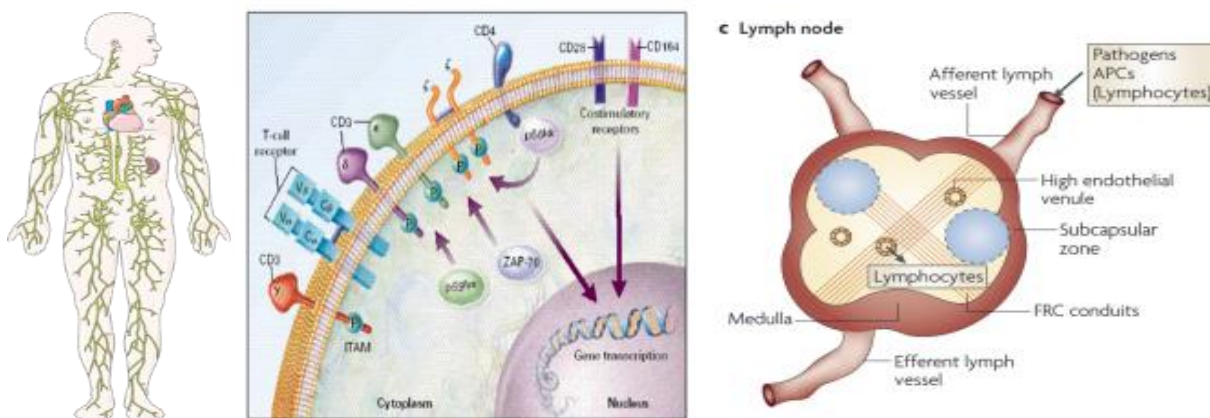
Изменение температуры жидкости и газа под куполом: 1 и 2 при эксперименте; 3 и 4 при математическом моделировании.

[1] *Trushlyakov V. I., Panichkin A. V., Lesnyak I. Y., Novikov A. A.* Theoretical and experimental investigations on dynamics of liquid evaporation process in closed volume under acoustic-vacuum exposure // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2020. V. 162. –P. 120288-1 – 120288-12. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120288

**24. Разработан новый подход к построению и исследованию математических моделей в иммунологии и эпидемиологии в рамках детерминированного и стохастического описания динамики популяций с учетом предыстории их развития** (в.н.с., д.ф.-м.н. Перцев, н.с., к.ф.-м.н. Логинов К.К., в.н.с., д.ф.-м.н. Топчий В.А., все лаборатория комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики ОФ ИМ, совместно с в.н.с., д.ф.-м.н. Бочаровым Г.А. (Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН)).

Разработана новая технология построения, аналитического и численного исследования математических моделей динамики популяций, основанная на совместном использовании дифференциальных уравнений с запаздыванием, немарковских случайных процессов и метода Монте-Карло. Существенной особенностью моделей является применение запаздывающих переменных и семейств уникальных типов индивидуумов, учитывающих промежуточные стадии развития индивидуумов и их переходы между компартментами, представленными в форме ориентированного графа без петель. Продолжительности стадий развития и переходов индивидуумов задаются в достаточно произвольной форме: константы, функции времени, случайные величины с неэкспоненциальными законами распределения. Применение указанного математического аппарата существенно повышает структурную адекватность разрабатываемых моделей и расширяет свойства их решений по сравнению со стандартными моделями в форме дифференциальных уравнений без запаздываний и марковских случайных процессов. Разработанные стохастические немарковские модели сочетают популяционный и агентный подходы, что позволяет достаточно быстро проводить вычислительные эксперименты по изучению характерных режимов динамики популяций. Для планирования вычислительных экспериментов со стохастическими моделями используются свойства решений их детерминированных аналогов в форме дифференциальных уравнений с запаздыванием.

На основе разработанного подхода построено и исследовано новое семейство моделей динамики ВИЧ-1 инфекции в организме человека.



Найдены соотношения между параметрами инфекционного процесса и иммунного ответа, обеспечивающие искоренение ВИЧ-1 инфекции в течение короткого периода времени после инфицирования. На рис. 1 представлены результаты моделирования динамики численности инфекционных компонент в рамках стохастической модели. Полученные результаты воспроизводят известные эмпирические данные по динамике ВИЧ-1 инфекции в организме человека в локальной фазе инфекции (искоренение ВИЧ-1 инфекции при инфицировании человека небольшим количеством вирусных частиц).

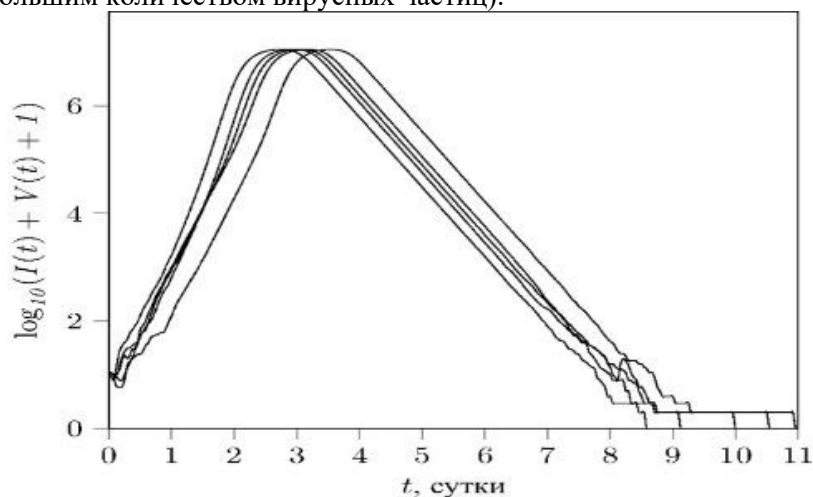


Рис. 1. Типичные реализации «инфекционной» переменной в случае искоренения ВИЧ-1 инфекции;  $I(t)$ ,  $V(t)$  – численность продуктивно-инфицированных клеток и вирусных частиц.

На основе разработанного подхода построено и исследовано новое семейство моделей распространения эпидемии в изолированном регионе с учетом возможности повторного заболевания у переболевшего человека. Получена оценка времени до полного прекращения эпидемического процесса при  $R_0 < 1$ . Найдена оценка вероятности прекращения эпидемического процесса в течение фиксированного периода времени при  $R_0 > 1$ , где  $R_0$  – коэффициент распространения инфекции. Результаты после подбора параметров могут применяться для анализа развития эпидемий в изолированном регионе.

[1] Pertsev N.V. Stability of Linear Delay Differential Equations Arising in Models of Living Systems // Siberian Advances in Mathematics, 2020, V. 30, № 1, p. 43–54. doi: 10.3103/S1055134420010046.  
 [2] Pertsev N.V. Exponential decay estimates for some components of solutions to the nonlinear delay differential equations of the living system models // Siberian Mathematical Journal, 2020, V. 61, № 4, p. 715–724. doi: 10.1134/S0037446620040126.  
 [3] Перцев Н.В. Об экспоненциально убывающих оценках решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых в моделях динамики популяций // Динамические системы, 2020, Т. 10 (38), № 1, с. 70–83.  
 [4] Pertsev N., Loginov K., Bocharov G. Nonlinear effects in the dynamics of HIV-1 infection predicted by mathematical model with multiple delays // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S, V. 13, № 9, September 2020, p.2365–2384. doi: 10.3934/dcdss.2020141.

[5] *Loginov K., Pertsev N.* Stochastic compartmental model of HIV-1 infection // ITM Web of Conferences 31, 02003 (2020), doi: 10.1051/itmconf/20203102003 (Mathematical Modelling in Biomedicine 2019).

[6] *Pertsev N.V., Loginov K.K., Topchii V.A.* Analysis of an Epidemic Mathematical Model Based on Delay Differential Equations // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2020, V. 14, № 2, p. 396–406. doi: 10.1134/S1990478920020167.

[7] *Pertsev N.V., Loginov K.K., Topchii V.A.* Analysis of a Stage-Dependent Epidemic Model Based on a Non-Markov Random Process // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2020, V. 14, № 3, p. 566–580. doi: 10.1134/S1990478920030151.

#### 1.1.10. Дискретная математика, информатика и математическая кибернетика

**25. Доказано, что задача о подмножестве векторов с суммой максимальной длины в пространствах произвольной размерности может быть решена за полиномиальное время с константной точностью; найден точный порог ее аппроксимации в классе полиномиальных алгоритмов** (с.н.с., к.ф.-м.н. Шенмайер В.В., лаборатория К4).

Рассматривается следующая NP-трудная оптимизационная задача. Для заданного конечного множества векторов в многомерном евклидовом пространстве найти подмножество этого множества с максимальной по длине суммой элементов. Данная задача имеет актуальные приложения в области обработки сигналов и политологии. Существуют эффективные алгоритмы, позволяющие находить ее точные либо приближенные решения в случае относительно небольшой фиксированной размерности пространства. Однако в общем случае вопрос о ее полиномиальной аппроксимируемости с какой-либо гарантированной константной точностью до сих пор оставался открытым. Доказано, что рассматриваемая задача полиномиально сводится с сохранением точности приближенных решений к так называемой «малой задаче Гротендика», связанной с вычислением значений операторной нормы специального вида. Построенное сведение позволяет за полиномиальное время находить приближенные решения исследуемой задачи о подмножестве векторов в пространстве произвольной размерности с точностью  $\sqrt{(2/\pi)} \approx 0.798$ . В дополнение к этому результату показано, что при условии  $P \neq NP$  задача не может быть решена с лучшей константной точностью. Также изучена более общая задача, в которой длина суммарного вектора определяется значением стандартной нормы  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Доказано, что при условии  $P \neq NP$  эта задача полиномиально аппроксимируема с константной точностью тогда и только тогда, когда  $p \leq 2$ ; найдены нижние и верхние пороги ее аппроксимации для каждого значения  $p$ . В частности, показано, что в случае «манхэттенской» нормы  $\ell_1$  задача может быть решена за полиномиальное время с точностью 0.561, но не может быть аппроксимирована с точностью 0.637, если  $P \neq NP$ .

[1] *Shenmaier V.V.*, Complexity and Algorithms for Finding a Subset of Vectors with the Longest Sum // Theoretical Computer Science, **818** (2020), 60-73. DOI: 10.1016/j.tcs.2018.04.018.

[2] *Шенмайер В.В.*, Аппроксимируемость задачи о подмножестве векторов с суммой максимальной длины // Дискретный анализ и исследование операций, **25:4** (2018), 131-148. DOI: 10.17377/daio.2018.25.618. Перевод: *Shenmaier V.V.*, Approximability of the problem of finding a vector subset with the longest sum // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 12 (2018) N4, 749-758. DOI: 10.1134/S1990478918040154.

**26. Разработаны эффективные параметризованные алгоритмы решения и алгоритмы редукции данных с гарантированными оценками результативности для одной задачи маршрутизации, и получены соответствующие нижние оценки на параметрическую сложность задачи** (с.н.с., к.ф.-м.н. Цицулко О.Ю., лаборатория К4, совместно с ван Беверном Р.А. (зав. лабораторией алгоритмики НГУ), Флюшник Т. (с.н.с. лаборатории алгоритмики и вычислительной сложности в Берлинском техническом университете)).

Рассматривалась модификация классической задачи о кратчайшем пути: выяснить, существует ли в заданном  $n$ -вершинном графе путь между выделенными вершинами  $s$  и  $t$ , содержащий не более  $k$  вершин, и смежный не более  $\ell$  вершинам графа вне этого пути. Задачу можно интерпретировать как поиск короткого и, ввиду ограниченности числа внешних точек доступа, безопасного



маршрута для передвижения/передачи информации. Поскольку задача NP-полна даже в планарных графах, в работе исследовалась возможность ее решения эффективными параметризованными (FPT) алгоритмами.

Нами полностью изучен вопрос о существовании для данной задачи полиномиальных ядер относительно структурных параметров графа: размера минимального вершинного покрытия ( $vc$ ), древовидной ширины ( $tw$ ), размеров минимальных разбивающих циклы множеств ребер ( $fes$ ) и вершин ( $fvs$ ) – а также их комбинаций с параметрами  $k$  и  $\ell$ . В каждом случае был либо разработан алгоритм редукции данных, приводящий к ядру полиномиального размера, либо показано, что существование такого алгоритма влечет нарушение существующих гипотез теории сложности. В силу ряда соотношений между известными структурными параметрами графов, на многие из них соответствующим образом переносятся полученные нами результаты о (не)существовании полиномиальных ядер этой задачи.

Отдельно для данной задачи был построен FPT-алгоритм со временем работы  $2^{O(tw)}nl^2$ , и показано, что существование для этой задачи алгоритма со временем работы  $2^{o(nv)}nl^2$  противоречит гипотезе экспоненциального времени (ETH).

[1] *van Bevern, R., Fluschnik, T., Tsidulko, O.Y.* Parameterized algorithms and data reduction for the short secluded s-t-path problem // *Networks*. 2020. Vol 75, No. 1, P. 34-63. doi:10.1002/net.21904

[2] *van Bevern R., Fluschnik T., Tsidulko O.Yu.* Parameterized Algorithms and Data Reduction for Safe Convoy Routing // In: *Borndorfer R., Storandt S. (eds) 18th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS 2018)*. OpenAccess Series in Informatics (OASICS). 2018. Vol 65. P. 10:1-10:19. doi: 10.4230/OASICS.ATMOS.2018.10

**27. С применением дуального переключения Зейделя построены новые бесконечные семейства целочисленных графов** (с.н.с., к.ф.-м.н. Константинова Е.В., лаборатория К6, совместно с S. Goryainov (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург), H. Li (Jiangxi Normal University, China), D. Zhao (Shanghai Jiao Tong University, China)).

Дуальное переключение Зейделя переставляет в регулярном графе только несмежные вершины при помощи инволютивного автоморфизма. Операция введена в 1984 году В. Хэммерсом для построения новых сильно регулярных графов. В [1] впервые показано, что данная операция позволяет получать новые целочисленные графы, т.е. графы, спектр которых содержит только целые собственные значения. Дуальное переключение Зейделя применено для построения двух бесконечных семейств целочисленных графов на основе Star графов и нечётных графов. В частности, найдены три новых связанных 4-регулярных недвудольных целочисленных графа, не являющиеся вершинно-транзитивными.

[1] *S. Goryainov, E. V. Konstantinova, H. Li, D. Zhao*, Integral graphs obtained by dual Seidel switching, *Linear Algebra and its Applications*, **604** (2020), 476-489. DOI: 10.1016/j.laa.2020.07.010

**28. Доказано, что разностные множества, двоичные бент-функции и некоторые комбинаторные дизайны являются частным случаем совершенных раскрасок вершин графов Джонсона и Грассмана.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Потапов В.Н., лаборатория К3, зав. лаб., к.ф.-м.н. Августинович С.В., лаборатория К7).

Граница Дельсарта-Хоффмана мощности независимого множества в графе обобщена на множества с ограниченной внутренней степенью вершин и показано, что характеристическая функция множества, достигающего этой границы, является совершенной раскраской. Доказано, что кратная трансверсаль в равномерном регулярном гиперграфе порождает в мультиграфе смежности вершин этого гиперграфа множество вершин, достигающее обобщённой границы Дельсарта-Хоффмана для исходного мультиграфа.

Основываясь на этих утверждениях, доказано, что многие известные комбинаторные конфигурации можно описать как совершенные раскраски с некоторыми фиксированными матрицами параметров известных регулярных графов. А именно, комбинаторные дизайны с параметрами  $t$ - $(v, k, \lambda)$ , их  $q$ -ичные аналоги, разностные множества, матрицы Адамара и бент-

функции оказались эквивалентны совершенным раскраскам. В частности, комбинаторные  $(k-1)$ - $(v,k)$  дизайны эквивалентны совершенным раскраскам в 2 цвета графов Джонсона  $J(n,k)$  с минимальным собственным числом, а двоичные бент-функции эквивалентны совершенным раскраскам графа Грассмана  $J2(n,2)$  в 4 цвета.

[1] *Потапов В.Н., Августиневич С.В.* Комбинаторные дизайны, разностные множества и бент-функции как совершенные раскраски графов и мультиграфов // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61, № 5. С. 1087-1100. DOI 10.1134/S0037446620050109

**29. Доказано, что перманент всех полистохастических матриц порядка 3 и 4-мерных полистохастических матриц порядка 4 больше нуля** (н.с., к.ф.-м.н. Тараненко А.А., лаборатория К7).

Многомерная матрица с неотрицательными элементами называется полистохастической, если сумма элементов в любой ее линии равна единице. В [1] выдвинута гипотеза о том, что перманент любой полистохастической матрицы четной размерности или нечетного порядка больше нуля. Данная гипотеза обобщает теорему Биркгофа о положительности перманента двумерных дважды стохастических матриц, а также широко известную гипотезу Райзера о существовании трансверсалей в латинских квадратах нечетного порядка. Доказано [1], что гипотеза верна для полистохастических матриц порядка 3, а в работе [2] установлена положительность перманента всех 4-мерных полистохастических матриц порядка 4.

[1] *Тараненко А. А.* Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 4. С. 35-101. DOI: 10.17377/dai.2016.23.517. Перевод: Taranenko A. A. Permanents of multidimensional matrices: properties and applications // J. Appl. Ind. Math. 2016. Vol. 10, № 4. P. 567-604. DOI: 10.1134/S1990478916040141.

[2] *Taranenko A. A.* Positiveness of the permanent of 4-dimensional polystochastic matrices of order 4 // Discrete Appl. Math. 2020. Vol. 276. P. 161-165. DOI: 10.1016/j.dam. 2019.02.001.

**30. Разработан гибридный алгоритм построения расписаний многопродуктового производства для задач большой размерности. Экспериментально показано преимущество предложенного алгоритма в сравнении с известным ранее алгоритмом по качеству решений и времени счета** (с.н.с., к.ф.-м.н. Борисовский П.А., г.н.с., д.ф.-м.н. Еремеев А.В, лаборатория ДО ОФИМ, совместно с профессором И. Кальратом (J. Kallrath, BASF SE, Германия)).

Рассматривается задача составления расписаний для производств, включающих пять стадий: подача сырья, хранение сырья, основная операция, хранение продукта, отгрузка. Для решения задачи используется декомпозиция горизонта планирования по времени. Подзадачи решаются методами частично целочисленного линейного программирования. Предложен генетический алгоритм составления расписания для основных операций, в котором для локального улучшения решений используется параллельный алгоритм динамического программирования, исполняемый на графическом процессоре. Экспериментально показано преимущество предложенного алгоритма в сравнении с известным ранее аналогом по качеству решений и времени вычислений при решении реальных задач из химической промышленности.

[1] *Borisovsky P.A., Eremeev A.V., Kallrath J.* Multi-product continuous plant scheduling: combination of decomposition, genetic algorithm, and constructive heuristic // International Journal of Production Research. 2020. V. 58. N.9. P. 2677-2695. DOI: 10.1080/00207543.2019.1630764

**31. Установлены свойства разложений ошибки прогноза на смещение и разброс (bias-variance decomposition), характеризующие их зависимость от сложности модели. Доказана возможность немонотонности данной зависимости, что является ограничивающим фактором при использовании этих разложений для анализа моделей машинного обучения.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Неделько В.М., лаборатория И1).

При выборе оптимальной сложности метода построения решающих функций важным инструментом является разложение критерия качества на компоненты: смещение и разброс (bias-variance decomposition).

Принято считать, что с ростом сложности метода компонента смещения монотонно убывает, а компонента разброса — растёт. Можно встретить лишь единичные публикации, в которых приводятся эмпирические результаты, свидетельствующие о «нетипичном» поведении компонент разложений.

В работе построены вероятностные модели, на основе которых проведено аналитическое доказательство возможности немонотонного поведения обеих компонент разложения: как смещения, так и разброса. Проведённые экспериментальные исследования показывают, что немонотонность компонент разложения действительно имеет место на практике.

Данные факты свидетельствуют о том, что разложение на смещение и разброс, по-видимому, не может считаться вполне достаточным и универсальным инструментом для анализа качества методов построения решающих функций, и актуально использование также других подходов, например, разложения на меру адекватности и меру устойчивости (Г.С. Лбов, Н.Г. Старцева).

[1] *Nedel'ko V. M.* On Decompositions of Decision Function Quality Measure // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, Иркутск: ИМИТ ИГУ, 2020. Т. 33. С. 64-79. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.33.64

### **32. Исследованы метрические свойства самодуальных бент-функций, выявлена их связь со свойствами отображения дуальности, определяемом на множестве бент-функций (м.н.с Куценко А.В., лаборатория В4).**

Бент-функцией называется булева функция от чётного числа переменных, которая находится на максимально возможном расстоянии Хэмминга от множества всех аффинных функций от того же числа переменных. Для каждой бент-функции от  $n$  переменных однозначным образом определяется дуальная к ней бент-функция от  $n$  переменных. Бент-функция называется самодуальной, если она совпадает со своей дуальной, и анти-самодуальной — если она совпадает с отрицанием своей дуальной. Отображением дуальности называется отображение, которое каждой бент-функции от  $n$  переменных ставит в соответствие дуальную к ней. На данный момент оно является единственным известным отображением, которое переводит множество бент-функций от  $n$  переменных в себя, сохраняет расстояние Хэмминга и при этом не является автоморфизмом множества всех булевых функций от  $n$  переменных.

В работе доказано, что характеристические векторы самодуальных и анти-самодуальных бент-функций от  $n \geq 4$  переменных линейно порождают собственные подпространства матрицы Сильвестра — Адамара, определяющей отображение дуальности в терминах характеристических векторов бент-функций. Полностью описана группа автоморфизмов множества самодуальных бент-функций от  $n \geq 4$  переменных. Доказано, что изометричное отображение всех булевых функций от  $n \geq 4$  переменных в себя переводит множество бент-функций от  $n$  переменных в себя и сохраняет расстояние Хэмминга между каждой бент-функцией и дуальной к ней, если и только если оно является элементом группы автоморфизмов множества самодуальных бент-функций от  $n$  переменных. Исследованы метрические свойства самодуальных бент-функций. Доказано, что множество булевых функций, максимально удалённых от множества самодуальных (анти-самодуальных) бент-функций от  $n \geq 4$  переменных, совпадает с множеством анти-самодуальных (самодуальных) бент-функций от  $n$  переменных. Доказано, что множество самодуальных бент-функций от  $n$  переменных является метрически регулярным. Описан спектр расстояний Хэмминга между самодуальными бент-функциями из класса Мэйорана — МакФарланда. Найдено минимальное расстояние Хэмминга между самодуальными бент-функциями от  $n$  переменных.

[1] *Куценко А.В.* Спектр расстояний Хэмминга между самодуальными бент-функциями из класса Мэйорана-МакФарланда // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25. No 1. С. 98–119. DOI: 10.17377/daio.2018.25.557

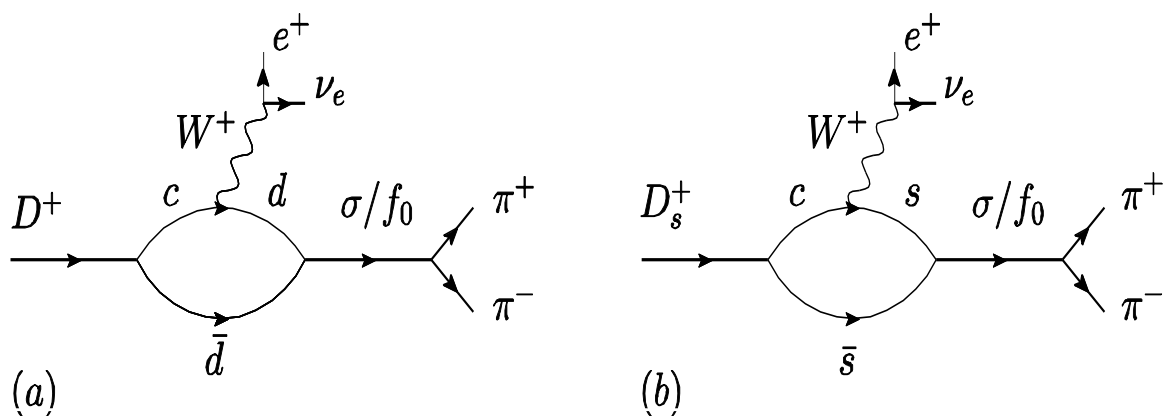
[2] *Kutsenko A.*, Metrical properties of self-dual bent functions // Designs, Codes and Cryptography. **88**:1 (2020), 201-222. DOI: 10.1007/s10623-019-00678-x

[3] *Kutsenko A.*, The group of automorphisms of the set of self-dual bent functions // Cryptography and Communications, **12**:5 (2020), 881-898. DOI: 10.1007/s12095-020-00438-y

### 1.7.1. Физика элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий

**33. Получены новые свидетельства в пользу четырёхкварковой природы лёгких скалярных мезонов** (г.н.с., д.ф.-м.н. Ачасов Н.Н., с.н.с., к.ф.-м.н. Киселев А.В., в.н.с., д.ф.-м.н. Шестаков Г.Н., все лаборатория ВЗ).

Показано, что полулептонные распады очарованных псевдоскалярных мезонов  $D_s^+$  и  $D^+$  в лёгкие скалярные мезоны  $f_0(500)/\sigma(500)$  и  $f_0(980)$  естественно объясняются их четырёхкварковой структурой.



Кроме того, показано, что радиационные распады кваркония  $J/\psi(1S)$  в мезоны  $f_0(500)/\sigma(500)$  и  $f_0(980)$  решительно поддерживают этот вывод.

[1] *Achasov N.N., A.V. Kiselev and G.N. Shestakov*, Semileptonic decays  $D \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu_e$  and  $D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu_e$  as the probe of constituent quark-antiquark pairs in the light scalar mesons, PHYSICAL REVIEW D, **102**:1 (2020), 016022.

**Важнейшие научные результаты ИМ СО РАН за 2020 год утверждены Ученым советом Института 27 ноября 2020г., протокол № 5.**

Председатель Ученого совета  
академик

С.С. Гончаров

Ученый секретарь Совета  
к.ф.-м.н.

И.Е. Светов