На правах рукописи

ВДОВИН Евгений Петрович

КАРТЕРОВЫ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 2007

Работа выполнена в Институте математики им.С.Л.Соболева СО РАН

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН,
Мазуров Виктор Данилович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев Анатолий Семенович
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент
Национальной академии наук Беларуси
Шеметков Леонид Александрович
доктор физико-математических наук, профессор
Шлепкин Анатолий Константинович

Ведущая организация:
Ярославский госуниверситет

Защита диссертации состоится «18» октября 2007 г. в «14» ч. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан «___» сентября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А.Н.Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Напомним, что подгруппа конечной группы называется *картеровой подгруппой*, если она нильпотентна и самонормализуема. Ввиду хорошо известного результата Р. Картера, любая конечная разрешимая группа содержит в точности один сопряженный класс картеровых подгрупп (см. [4]). Если не предполагать, что группа конечна, то картеровы подгруппы могут быть даже неизоморфными. Действительно, если N_1, N_2 — две неизоморфные нильпотентные группы, то они являются картеровыми подгруппами в своем свободном произведении. С другой стороны, конечная неразрешимая группа может не содержать картеровых подгрупп, минимальным примером является знакопеременная группа степени 5. Однако, до сих пор неизвестно ни одной конечной группы, содержащей несопряженные картеровы подгруппы, и известна восходящая к Р. Картеру проблема.

Проблема 1. (Проблема сопряженности) Сопряжены ли картеровы подгруппы конечных групп?

Изучению данной проблемы для различных классов конечных групп близких простым посвящено много работ различных авторов. В симметрических и знакопеременных группах картеровы подгруппы классифицировали Л.Ди Мартино и М.К.Тамбурини (см. [7]). В любой такой группе G, что $\mathrm{SL}_n(q) \leq G \leq \mathrm{GL}_n(q)$, картеровы подгруппы классифицировали Л.Ди Мартино и М.К.Тамбурини, и, в случае $G = \mathrm{GL}_n(q)$, Н.А.Вавилов (см. [8] и [1] соответственно). Для симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, полных унитарных групп $\mathrm{GU}_n(q)$ и, когда q нечетно, полных ортогональных групп $\mathrm{GO}_n^{\pm}(q)$ классификация картеровых подгрупп была получена Л.Ди Мартино, А.Е.Залесским и М.К.Тамбурини (см. [9]). Для некоторых спорадических простых групп картеровы подгруппы найдены в [5]. В перечисленных выше неразрешимых группах картеровы подгруппы совпадают с нормализаторами силовских 2-подгрупп и потому сопряжены.

Назовем конечную группу G *минимальным контрпримером к проблеме сопряженности* или просто *минимальным контрпримером*, если группа G содержит несопряженные картеровы подгруппы, и в любой группе H, удовлетворяющей неравенству $|H| < |G|$, картеровы подгруппы сопряжены. В работе [6] Ф.Далла Вольта, А.Луккини и М.К.Тамбурини доказали, что минимальный контрпример должен быть почти простым. Этот результат позволяет надеяться на решение проблемы сопряженности с помощью классификации конечных простых групп.

Заметим, что использование результата Ф.Далла Вольты, А.Луккини и М.К.Тамбурини для классификации картеровых подгрупп в почти простых группах существенно зависит от классификации конечных простых групп. Действительно, чтобы использовать индукционное утверждение о том, что картеровы подгруппы в любой собственной подгруппе минимального контрпримера сопряжены, необходимо знать, что изучены все почти простые группы порядка меньшего, чем порядок минимального контрпримера. Чтобы избежать использования классификации конечных простых групп, мы усиливаем результат Ф.Далла Вольты, А.Луккини и М.К.Тамбурини, доказывая, что если картеровы подгруппы в группах индуцированных автоморфизмов любого неабелева композиционного фактора сопряжены, то они сопряжены и во всей группе.

Для индукционного описания картеровых подгрупп в почти простых группах необходима информация о том, как ведут себя картеровы подгруппы при гомоморфизмах и при пересечении с нормальными подгруппами, т. е. ответы на следующие проблемы.

Проблема 2. Будет ли гомоморфный образ картеровой подгруппы вновь картеровой подгруппой?

Проблема 3. Будет ли пересечение картеровой подгруппы с нормальной подгруппой вновь картеровой подгруппой (нормальной подгруппы)?

Проблема 2 тесно связана с проблемой сопряженности, а именно, в случае положительного ответа на проблему сопряженности, ответ на проблему 2 также будет положительным. Поэтому, изучая картеровы подгруппы в почти простых группах, мы будем решать обе эти проблемы вместе. Легко понять, что ответ на проблему 3 отрицательный. Действительно, рассмотрим разрешимую группу Sym_3 и ее нормальную подгруппу индекса 2 — Alt_3. Тогда картерова подгруппа группы Sym_3 совпадает с ее силовской 2-подгруппой, в то время как картерова подгруппа группы Alt_3 совпадает с ее силовской 3-подгруппой. Всвязи с этим в работе мы исследуем ряд свойств, которые связывают картеровы подгруппы в группе и некоторых ее нормальных подгруппах.

Основные результаты диссертации.

1. Получен критерий сопряженности картеровых подгрупп в терминах композиционного ряда группы. А именно, доказано, что если

картеровы подгруппы в группе индуцированных автоморфизмов любого композиционного фактора любого композиционного ряда конечной группы сопряжены, то они сопряжены и во всей группе.

2. Исследована сопряженность элементов простого порядка в конечных простых группах. В качестве следствия доказано, что широкий класс почти простых групп не является минимальным контрпримером. Эти результаты получены автором диссертации совместно с М.К.Тамбурини.

3. Изучено строение картеровых подгрупп в классических матричных группах. Группа S называется *классической матричной группой*, если существует такая полная матричная группа G над полем характеристики p (т. е. G изоморфна $\mathrm{GL}_n(p^m)$, $\mathrm{GU}_n(p^m)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(p^m)$, $\mathrm{GO}_{2n+1}(p^m)$ или $\mathrm{GO}_{2n}^{\pm}(p^m)$), что $O^{p'}(G) \leq S \leq G$. Эти результаты получены автором диссертации совместно с А.Превитали и М.К.Тамбурини.

4. Построены полулинейные конечные группы лиева типа. Для них обобщена теория Стейнберга связи конечных групп лиева типа и линейных алгебраических групп. С помощью данной теории ряд стуктурных результатов для конечных групп лиева типа доказан и для полулинейных конечных групп лиева типа.

5. Доказана сопряженность картеровых подгрупп в конечных почти простых группах. Тем самым доказана сопряженность картеровых подгрупп в произвольной конечной группе.

6. Получен критерий существования картеровой подгруппы в терминах групп индуцированных автоморфизмов произвольного нормального ряда. Построен пример, показывающий, что существенное улучшение критерия невозможно, а также показывающий, что свойство содержать картерову подгруппу не сохраняется при расширениях.

7. Получена классификация картеровых подгрупп в конечных почти простых группах и, тем самым, получена классификация картеровых подгрупп в произвольных группах.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований конечных групп и теории формаций конечных групп, а также групп автоморфизмов конечных групп лиева типа. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. Для доказательства основных результатов 1 и 6 применяется техника теории конечных групп. Для доказательства основного результата 3 используется техника матричных групп и матричных алгебр над конечными полями. При получении основного результата 2 используется теория Стейнберга связи конечных групп лиева типа и линейных алгебраических групп. Техника, разработанная при получении основного результата 4 является новой и успешно применяется для доказательства основных результатов 5 и 7.

Апробация работы. Результаты диссертации в период с 2001 по 2007 год были представлены на международных конференциях в Новосибирске, Иркутске, Екатеринбурге, Нальчике, Брешие (Италия), Иские (Италия), Падуе (Италия). В частности, на международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2003 и 2005 г.г.), «Teoria dei gruppi ed applicazioni» (Брешия 2001 г., Иския 2002 г. и Падуя 2006г.) и международной школе-конференции по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина (Нальчик 2006 г.) автором были сделаны пленарные доклады по теме диссертации. Результаты неоднократно докладывались на семинарах Института математики СО РАН и НГУ «Теория групп» и «Алгебра и логика», на семинаре МГУ «Теория групп», на семинаре кафедры алгебры университета г. Падуя (Италия) и на общеинститутском семинаре Института математики СО РАН.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в форме статей в ведущих отечественных и зарубежных журналах [10]–[15].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из семи глав, включая введение, указателя терминов, предметного указателя и литературы. Она изложена на 117 страницах текста, набранного в редакционно-издательской системе $\LaTeX\,2_\varepsilon$, библиография содержит 66 наименований.

Содержание диссертации.

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Основные результаты каждой главы (теоремы и их следствия) явным образом сформулированы в первом параграфе главы. Нумерация всех результатов (теорем, лемм, следствий), а также определений и таблиц сквозная внутри параграфа и состоит из трех цифр: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа и третья — порядковый номер внутри параграфа. Нумерация формул двойная: первая цифра — номер главы, а вторая — порядковый номер внутри главы.

Глава 1. Введение

В данной главе приведена характеристика основных результатов работы, определения и обозначения, используемые далее на протяжение всей диссертации, а также формулировки известных результатов, наиболее часто используемых в работе.

Глава 2. Критерий сопряженности картеровых подгрупп

Пусть G — группа, A, B, H — подгруппы группы G и B нормальна в A. Тогда $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ группы A/B. Таким образом, существует гомоморфизм группы $N_H(A/B)$ в $\mathrm{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначается через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$ и называется *группой индуцированных автоморфизмов* подгруппы H на секции A/B. В частности, если $S = A/B$ — композиционный фактор группы G, то для любой подгруппы $H \leq G$ определена группа $\mathrm{Aut}_H(S) = \mathrm{Aut}_H(A/B)$. Отметим, что строение группы $\mathrm{Aut}_H(S)$ зависит от того, какой выбран композиционный ряд.

Определение 2.1.1. Конечная группа G удовлетворяет условию **(C)**, если для любого неабелева композиционного фактора S любого композиционного ряда группы G и любой нильпотентной подгруппы N группы G картеровы подгруппы группы индуцированных автоморфизмов $\langle \mathrm{Aut}_N(S), S \rangle$ сопряжены (в частности, они могут не существовать).

Легко проверить, что если конечная группа G удовлетворяет условию **(C)**, то для любой ее нормальной подгруппы N и разрешимой подгруппы R группы G/N и RN удовлетворяют условию **(C)**.

Основным результатом главы 2 является следующая теорема (критерий сопряженности).

Теорема 2.1.4. *Если конечная группа G удовлетворяет условию* **(C)**, *то картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

При доказательстве этой теоремы доказана следующая лемма о спуске, имеющая самостоятельное значение, и неоднократно используемая далее в диссертации.

Лемма 2.2.3. *Пусть K — картерова подгруппа конечной группы G. Предположим, что существует нормальная подгруппа $B = T_1 \times \ldots \times T_k$ группы G такая, что $G = KB$, $Z(T_i) = \{e\}$ и T_i не разложима в прямое произведение собственных подгрупп для всех i. Тогда* $\mathrm{Aut}_K(T_i)$ *является картеровой подгруппой группы* $\langle \mathrm{Aut}_K(T_i), T_i \rangle$.

Отметим, что теорема 2.1.4 усиливает результат Ф.Далла Вольты, А.Луккини и М.К.Тамбурини [6] и позволяет исследовать картеровы подгруппы конечных почти простых групп без использования классификации конечных простых групп.

В главе 2 также доказывается следующие леммы, которые неоднократно применяются далее.

Лемма 2.4.2. *Предположим, что G — конечная группа. Пусть K — картерова подгруппа группы G с центром $Z(K)$. Предположим также, что $e \neq z \in Z(K)$ и $C_G(z)$ удовлетворяет условию* **(C)**.

1. *Любая подгруппа Y, содержащая K и удовлетворяющая условию* **(C)**, *самонормализуема в G.*
2. *Никакой элемент, сопряженный с z в G, кроме z, не лежит в $Z(G)$.*
3. *Если H — картерова подгруппа группы G, несопряженная с K, то z не сопряжен ни с каким элементом из центра группы H.*

В частности, централизатор $C_G(z)$ самонормализуем в G, и z не сопряжен ни с какой степенью $z^k \neq z$.

Лемма 2.4.3. *Пусть G — конечная группа и Q — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда G содержит картерову подгруппу K, удовлетворяющую неравенству $Q \leq K$, в том и только в том случае, если $N_G(Q) = QC_G(Q)$.*

Определение 2.4.4. Будем говорить, что конечная группа G удовлетворяет условию **(ESyl2)**, если для ее силовской 2-подгруппы Q выполнено равенство $N_G(Q) = QC_G(Q)$. Иными словами, группа G удовлетворяет **(ESyl2)**, если любой элемент нечетного порядка, нормализующий силовскую 2-подгруппу Q группы G, централизует Q.

Следующие леммы позволяют «поднимать» свойство **(ESyl2)** с подгрупп и факторгрупп на всю группу.

Лемма 2.4.5. *Пусть G — конечная группа, Q — силовская 2-подгруппа группы G и x — элемент нечетного порядка из $N_G(Q)$. Предположим,* *что существуют такие нормальные подгруппы $G_1, \ldots, G_k$ группы G, что $G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap Q \leq Z(N_G(Q))$ и x централизует Q по модулю G_i для всех i.*

Тогда x централизует Q. В частности, если G/G_i удовлетворяет условию **(ESyl2)** *для всех i, то G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Лемма 2.4.6. *Пусть H — такая подгруппа конечной группы G, что $|G : H| = 2^t$, H удовлетворяет условию* **(ESyl2)**, *и любой элемент нечетного порядка группы G лежит в H (это условие, очевидно, эквивалентно субнормальности подгруппы H). Тогда G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Для того, чтобы сделать все доказательства независящими от классификации конечных простых групп, в главе 2 уточняется определение минимального контрпримера.

Определение 2.4.7. Конечная почти простая группа A называется *минимальным контрпримером*, если она содержит несопряженные картеровы подгруппы, но в любой почти простой группе порядка меньшего, чем $|A|$, простой цоколь которой является *известной* простой группой, картеровы подгруппы сопряжены.

Результаты данной главы получены автором лично; опубликованы в работах [12] и [15]; докладывались на международных конференциях в Екатеринбурге (Международная конференция, посвященная 100-летию П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, 29 августа–3 сентября, 2005), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе (Италия) («Teoria dei gruppi ed applicazioni» 27–29 сентября, 2006), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске и семинаре «Теория групп» МГУ.

Глава 3. Сопряженность в конечных простых группах

В этой главе получено несколько результатов о сопряженности элементов нечетного простого порядка в конечных простых группах. С помощью этих результатов и леммы 2.4.2, доказывается, что широкий класс почти простых групп не является минимальным контрпримером. Эти результаты собраны в таблице 3.1.1.

Таблица 3.1.1. Конечные простые группы, не являющиеся минимальным контрпримером.

Soc(A)$= G$	Условия для A
знакопеременные, спорадические; $A_1(p^t)$, $B_\ell(p^t)$, $C_\ell(p^t)$, t четно если $p=3$; ${}^2B_2(2^{2n+1})$,$G_2(p^t)$, $F_4(p^t)$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$; $E_7(p^t)$, $p \neq 3$; $E_8(p^t)$, $p \neq 3, 5$ ${}^3D_4(p^{3t})$, $D_{2\ell}(p^t)$, ${}^2D_{2\ell}(p^{2t})$, t четно если $p=3$ в последних 2 случаях и, если $G = D_4(p^t)$, $\lvert(\mathrm{Field}(G) \cap A) : (\widehat{G} \cap A)\rvert_{2'} > 1$	никаких
$B_\ell(3^t)$, $C_\ell(3^t)$, $D_{2\ell}(3^t)$, ${}^3D_4(3^{3t})$, ${}^2D_{2\ell}(3^{2t})$, $D_{2\ell+1}(r^t)$, ${}^2D_{2\ell+1}(r^{2t})$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $E_6(p^t)$, ${}^2E_6(p^{2t})$, $E_7(3^t)$, $E_8(3^t)$, $E_8(5^t)$	$A = G$

Результаты данной главы получены в неразрывном соавторстве с итальянским математиком М.К.Тамбурини и опубликованы в работе [10]. Они докладывались на международных конференциях в Брешии (Италия) («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 24–26 октября, 2001) и в Новосибирске («Мальцевские чтения», 17–19 ноября, 2003), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске и на семинаре кафедры алгебры в университете г. Падуя (Италия).

Глава 4. Картеровы подгруппы классических групп

Обозначим через G одну из полных матричных групп $\mathrm{GU}_n(p^m)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(p^m)$, $\mathrm{GO}_{2n+1}(p^m)$ или $\mathrm{GO}^{\pm}_{2n}(p^m)$. В четвертой главе, используя технику матричных алгебр, классифицируются картеровы подгруппы в произвольной группе S, удовлетворяющей неравенствам $O^{p'}(G) \leq S \leq G$. Данные результаты сформулированы в теореме 4.1.1.

Теорема 4.1.1. *Пусть $q = p^\alpha$, где p простое, и предположим, что $S = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, или $\mathrm{SO}^\varepsilon_n(q) \leq S \leq \mathrm{GO}^\varepsilon_n(q)$, где q нечетно или $\mathrm{SU}_n(q) \leq S \leq \mathrm{GU}_n(q)$. Если в S существует картерова подгруппа K, то либо K является нормализатором силовской 2-подгруппы группы S, либо выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) $S \in \{\mathrm{Sp}_2(3),\ \mathrm{SL}_2(3),\ 2.\mathrm{SU}_2(3)\}$ *и K является нормализатором силовской 3-подгруппы группы S;*

(б) $S = \mathrm{GU}_3(2)$ *имеет порядок $2^3 \cdot 3^4$, и K имеет порядок $2 \cdot 3^2$.*

Более того, когда S — ортогональная группа, K является 2-группой, за исключением, возможно, случая, когда $S = \mathrm{SO}_2^{\varepsilon}(q)$.

Результаты данной главы получены в неразрывном соавторстве с итальянскими математиками А.Превитали и М.К.Тамбурини и опубликованы в [11]. Они докладывались на международных конференциях в Санкт-Петербурге (Международная алгебраическая конференция памяти З.И.Боревича, 17–23 сентября, 2002), на Иские (Италия) («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 22–25 октября, 2002), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 17–19 ноября, 2003) и в Иркутске (Международная алгебраическая конференция, посвященная 75-летию А.И.Кокорина, 25–28 августа, 2004), и на семинаре кафедры алгебры в университете г. Падуя (Италия).

Глава 5. Полулинейные группы лиева типа

В данной главе дается определение полулинейных конечных групп лиева типа и переносятся на них результаты о строении конечных групп лиева типа. Данная теория понадобится при изучении картеровых подгрупп в группах лиева типа, расширенных с помощью полевых, графовых или графово-полевых автоморфизмов в главе 6. В последнем параграфе главы изучаются вопросы существования картеровых подгрупп в полулинейных группах в том случае, когда картеровы подгруппы либо содержат силовскую 2-подгруппу, либо содержатся в нормализаторе подгруппы Бореля. Результаты о существовании картеровых подгрупп специального вида собраны в леммах 5.3.1, 5.3.3 и 5.3.4.

Лемма 5.3.1. *Пусть G — конечная группа лиева типа над полем нечетной характеристики и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \le G \le \overline{G}_\sigma$. Тогда если G удовлетворяет условию* **(ESyl2)***, то любая группа L, для которой справедливо $G \le L \le \overline{G}_\sigma$ удовлетворяет* **(ESyl2)**.

Лемма 5.3.3. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем нечетной характеристики, $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$ и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \le G \le \overline{G}_\sigma$. Пусть A — такая подгруппа группы $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$, что $A \cap \overline{G}_\sigma = G$. Если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$, предположим также, что A содержится в группе, порожденной внутреннедиагональными и полевыми автоморфизмами и графовым автоморфизмом порядка 2. Тогда A удовлетворяет условию* **(ESyl2)** *в том и только в том случае, если G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Отметим, что леммы 5.3.1 и 5.3.3 вместе с результатами из [2] и [3] дают исчерпывающую классификацию групп автоморфизмов конечных групп лиева типа, удовлетворяющих условию **(ESyl2)**, т. е. содержащих картерову подгруппу, которая в свою очередь содержит силовскую подгруппу всей группы.

Лемма 5.3.4. *Пусть $\langle G, \zeta g\rangle$ — конечная полулинейная группа лиева типа над полем характеристики p (мы не исключаем случая $\langle G, \zeta g\rangle = G$), и группа G является группой присоединенного типа (напомним, что $g \in \overline{G}_\sigma$, но необязательно $g \in G$). Предположим, что $B = U \leftthreetimes H$, где H — подгруппа Картана группы G, есть ζg-инвариантная подгруппа Бореля группы G, и $\langle B, \zeta g\rangle$ содержит картерову подгруппу K группы $\langle G, \zeta g\rangle$. Предположим, что $K \cap U \neq \{e\}$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) *либо $\langle G, \zeta g\rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}), \zeta g\rangle$, либо $\langle G, \zeta g\rangle = {}^2\widehat{A_2(2^{2t})} \leftthreetimes \langle \zeta\rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен и не делится на 3, $C_G(\zeta) \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2 \cdot 3$;*

(б) *$\langle G, \zeta g\rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}), \zeta g\rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен, $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы G_ζ;*

(в) *либо $\langle G, \zeta g\rangle = \langle A_2(2^{2t}), \zeta g\rangle$, либо $\langle G, \zeta g\rangle = \widehat{A_2(2^{2t})} \leftthreetimes \langle \zeta\rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм порядка $2t$, t не делится на 3, и $C_G(\zeta) \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2^{|\zeta_{2'}|} \cdot 3$;*

(г) *$\langle G, \zeta g\rangle = \langle A_2(2^{2t}), \zeta g\rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм и $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}}$;*

(д) *группа G расщепленная и определена над $GF(2^t)$, $\langle G, \zeta g\rangle = G \leftthreetimes \langle \zeta g\rangle$, ζ — полевой автоморфизм порядка t группы $O^{2'}(G)$, если группа $O^{2'}(G)$ расщепленная или графовый автоморфизм порядка t, если группа $O^{2'}(G)$ скрученная, и, с точностью до сопряжения в G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta g\rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;*

(е) *группа G определена над $GF(2^t)$, $\langle G, \zeta g\rangle = G \leftthreetimes \langle \zeta g\rangle$, ζ — произведение полевого автоморфизма нечетного порядка t группы $O^{2'}(G)$ и графового автоморфизма порядка 2, ζ и ζg сопряжены относительно $\overline{G}_\sigma$, и, с точностью до сопряжения в G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta g\rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;*

(ж) *$G/Z(G) \simeq \mathbf{P}SL_2(3^t)$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен (значит, $\zeta \in \langle G, \zeta g\rangle$), и K содержит силовскую 3-подгруппу группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(з) $\langle G, \zeta g\rangle = {}^2G_2(3^{2n+1}) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, $|\zeta| = 2n+1$, $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, *где* Q *имеет порядок* 2 *и* $|P| = 3^{|\zeta|_3}$.

Данные результаты получены автором лично; опубликованы в работах [13] и [15]; докладывались на международных конференциях в Екатеринбурге (Международная конференция, посвященная 100-летию П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, 29 августа–3 сентября, 2005), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 27–29 сентября, 2006), в Иркутске (Объединенный российско-китайский семинар по алгебре и логике, 6–11 августа, 2007), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске, и на семинаре «Теория групп» МГУ.

Глава 6. Картеровы подгруппы в полулинейных группах

В данной главе мы, используя понятия и результаты, полученные в главе 5, классифицируем картеровы подгруппы в группах автоморфизмов конечных групп лиева типа. Отдельная формулировка требуется для случая, когда группа автоморфизмов содержит автоморфизм тройственности, поскольку в этом случае существует два несопряженных дополнения порядка 3. В последнем параграфе главы доказывается, что в любой конечной группе с известными композиционными факторами картеровы подгруппы сопряжены.

Для того, чтобы сделать доказательства независящими от классификации конечных простых групп дадим следующее определение. Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ таких почти простых групп A, что единственный неабелев композиционный фактор $S = F^*(A)$ является простой группой лиева типа и A содержит несопряженные картеровы подгруппы. Если множество $\mathcal{A}$ непусто, обозначим через $\mathbf{Cmin}$ наименьший возможный порядок подгруппы $F^*(A)$, при $A \in \mathcal{A}$. Если множество $\mathcal{A}$ пусто, то положим, что $\mathbf{Cmin} = \infty$. Мы докажем, что $\mathbf{Cmin} = \infty$, т. е. что $\mathcal{A} = \varnothing$. Отметим, что если $A \in \mathcal{A}$ и $G = F^*(A)$, то существует такая подгруппа A_1 группы A, что $A_1 \in \mathcal{A}$ и $A_1 = KG$ для некоторой картеровой подгруппы K группы A. Действительно, если для любой нильпотентной подгруппы N группы A картеровы подгруппы группы NG сопряжены, то A удовлетворяет условию **(C)**, следовательно, картеровы подгруппы группы A сопряжены, что противоречит выбору A. Значит, существует такая нильпотентная подгруппа N группы A, что картеровы подгруппы группы NG несопряжены. Пусть K — некоторая картерова подгруппа группы NG. Тогда очевидно, что KG/G является картеровой подгруппой группы NG/G, т. е. совпадает с NG/G. Следовательно, картеровы подгруппы группы KG несопряжены и $KG = A_1 \in \mathcal{A}$. Поэтому условие $A = KG$ в теоремах 6.3.1 и 6.4.1 не является ограничением и используется лишь для упрощения рассуждений.

Теорема 6.3.1. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем характеристики p; $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ и $O^{p'}(G)$ изоморфна $D_4(q)$ или ${}^3D_4(q^3)$. Предположим, что τ — графовый автоморфизм порядка 3 группы $O^{p'}(G)$ (напомним, что для группы $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ автоморфизм τ — это такой автоморфизм, множество неподвижных точек которого изоморфно $G_2(q)$). Обозначим через A_1 подгруппу группы $\mathrm{Aut}(D_4(q))$, порожденную внутреннедиагональными и полевыми автоморфизмами, а также графовым автоморфизмом порядка 2. Пусть подгруппа $A \leq \mathrm{Aut}(O^{p'}(G))$ такова, что $A \not\leq A_1$ (если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$), и K — картерова подгруппа группы A. Предположим также, что $G = A \cap \overline{G}_\sigma$, $A = KG$ и $|O^{p'}(G)| \leqslant$ **Cmin**. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(а) *$G \simeq {}^3D_4(q^3)$, $(|A : G|, 3) = 1$, q нечетно и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A;*

(б) *$(|A : G|, 3) = 3$, q нечетно, $\tau \in A$, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_A(\tau) \in \Gamma G_2(q)$ и $\tau \in K$;*

(в) *$(|A : G|, 3) = 3$, $q = 2^t$, $|A : G| = 3t$, $A = G \leftthreetimes \langle \tau, \varphi \rangle$ ($A = G \leftthreetimes \langle \varphi \rangle$, если $G \simeq {}^3D_4(q^3)$), где φ — полевой автоморфизм порядка t ($|\varphi| = 3t$, если $G \simeq {}^3D_4(q^3)$), перестановочный с τ, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_G(\langle \tau, \varphi \rangle_{2'}) \simeq G_2(2^{t_{2'}})$ и $\tau \in K$;*

(г) *$O^{p'}(G) \simeq D_4(p^{3t})$, p нечетно, факторгруппа A/G циклическая, $\tau \notin A$, $A = G \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, где, для некоторого натурального m, $\zeta = \tau\varphi^m$ является графово-полевым автоморфизмом, и, с точностью до сопряжения элементом из G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, где Q является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}} \simeq {}^3D_4(p^{3t/|\zeta_{2'}|})$.*

*В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены, т. е. если $A_2 \in \mathcal{A}$ и $|F^*(A_2)| =$ **Cmin**, то группа A_2 не удовлетворяет условиям теоремы, значит, $F^*(A_2) \not\simeq {}^3D_4(q^3)$.*

Теорема 6.4.1. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа (G не обязательно простая) над полем характеристики p и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Предположим также, что $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$. Выберем подгруппу A группы $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$, для которой выполнено равенство $A \cap \overline{G}_\sigma = G$, и, если $O^{p'}(G) = D_4(q)$, предположим, что A содержится в подгруппе A_1, определенной в формулировке теоремы 6.3.1. Пусть K — картерова подгруппа группы A и $A = KG$.*

Тогда выполнено в точности одно из следующих утверждений:

(а) *G определена над полем характеристики 2, $A = \langle G, \zeta g, t\rangle$, где t — 2-элемент, K содержится в нормализаторе некоторой t-инвариантной подгруппы Бореля группы G и $K \cap \langle G, \zeta g\rangle$ удовлетворяет одному из утверждений* (a)–(e) *леммы 5.3.4;*

(б) *$G \simeq \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, $|\zeta| = t$ нечетно, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено равенство $K = Q \rtimes \langle\zeta\rangle$, где Q является силовской 3-подгруппой группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(в) *$A = {}^2G_2(3^{2n+1}) \rtimes \langle\zeta\rangle$, $|\zeta| = 2n+1$ и с точностью до сопряжения в G выполнено равенство $K = (K \cap G) \rtimes \langle\zeta\rangle$ и $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q порядка 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$;*

(г) *p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A, ввиду леммы* 5.3.3. *группа A удовлетворяет* **(ESyl2)** *тогда и только тогда, когда G удовлетворяет* **(ESyl2)**.

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены.

Из теорем 6.3.1 и 6.4.1 немедленно вытекает

Следствие 6.7.1. $\mathbf{Cmin} = \infty$, *т. е.* $\mathcal{A} = \varnothing$.

Для того, чтобы сформулировать следующую теорему без использования классификации конечных простых групп, мы дадим следующее определение. Говорят, что конечная группа является *K-группой*, если все ее композиционные факторы являются известными простыми группами.

Теорема 6.7.2. *Пусть G — конечная K-группа. Тогда картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Теорема 6.7.2 является основным результатом диссертации. Если считать классификацию конечных простых групп завершенной, то теорема

6.7.2 утверждает, что картеровы подгруппы любой конечной группы сопряжены. Немедленным следствием из теоремы 6.7.2 является положительный ответ на проблему 2.

Теорема 6.7.3. *Пусть G — конечная K-группа, H — картерова подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа группы G. Тогда HN/N является картеровой подгруппой группы G/N.*

Данные результаты получены автором лично; опубликованы в работах [13] и [15]; докладывались на международных конференциях в Екатеринбурге (Международная конференция, посвященная 100-летию П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, 29 августа–3 сентября, 2005), Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Новосибирске Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 27–29 сентября, 2006), в Иркутске (Объединенный российско-китайский семинар по алгебре и логике, 6–11 августа, 2007), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске, и на семинаре «Теория групп» МГУ.

Глава 7. Критерий существования

В данной главе получен критерий существования картеровых подгрупп в конечной группе в терминах ее нормального ряда. Заметим, что существуют конечные группы без картеровых подгрупп, минимальным примером является группа Alt_5. В третьем параграфе главы построен пример, показывающий, что существенное улучшение критерия невозможно. В конце главы для удобства читателя приводится классификацию картеровых подгрупп в конечных почти простых группах, полученная в настоящей диссертации.

Напомним, что ввиду теоремы 6.7.2 в любой почти простой группе с известным простым цоколем картеровы подгруппы сопряжены. Таким образом, по модулю классификации конечных простых групп, в любой конечной группе картеровы подгруппы сопряжены. В настоящей главе под конечной группой мы всегда имеем ввиду конечную группу, удовлетворяющую **(C)**, таким образом, результаты главы не зависят от классификации конечных простых групп.

Определение 7.1.1. Пусть $G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n = \{e\}$ — главный ряд группы G (напомним, что предполагается, что G удовлетворяет **(C)**). Тогда $G_i/G_{i+1} = T_{i,1} \times \ldots \times T_{i,k_i}$, где $T_{i,1} \simeq \ldots \simeq T_{i,k_i} \simeq T_i$ и T_i — простая группа. Если $i \geqslant 1$, то обозначим через $\overline{K_i}$ картерову подгруппу группы G/G_i (если она существует) и через K_i ее полный прообраз в G/G_{i+1}. Если $i = 0$, то $\overline{K}_0 = \{e\}$ и $K_0 = G/G_1$ (отметим, что $\overline{K}_0$ всегда существует). Мы говорим, что конечная группа G удовлетворяет условию **(E)**, если для любых i, j, либо $\overline{K}_i$ не существует, либо $\mathrm{Aut}_{K_i}(T_{i,j})$ содержит картерову подгруппу.

Из теоремы 7.2.2 и из теоремы 6.7.3 следует, что если конечная группа удовлетворяет условию **(E)**, то для любого i подгруппа $\overline{K}_i$ существует, так что, на самом деле, первая часть условия **(E)** никогда не выполняется.

Теорема 7.2.2. (Критерий существования) *Пусть G — конечная группа. Тогда G содержит картерову подгруппу если и только если G удовлетворяет условию* **(E)**.

Следующий пример показывает, что существенное улучшение критерия существования невозможно. Кроме того, данный пример показывает, что расширение группы, содержащей картерову подгруппу, с помощью группы, содержащей картерову подгруппу, может не содержать картеровых подгрупп.

Рассмотрим $L = \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3) \leftthreetimes \langle \varphi \rangle$, где φ — полевой автоморфизм группы $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)$. Пусть $X = (L_1 \times L_2) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_2$, где $L_1 \simeq L_2 \simeq L$ и если $\sigma = (1, 2) \in \mathrm{Sym}_2 \setminus \{e\}$, $(x, y) \in L_1 \times L_2$, то $\sigma(x, y)\sigma = (y, x)$ (подстановочное сплетение группы L и Sym_2). Обозначим через $H = \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3) \times \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)$ минимальную нормальную подгруппу группы X и через $M = L_1 \times L_2$. Пусть $G = (H \leftthreetimes \langle (\varphi, \varphi^{-1}) \rangle) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_2$ — подгруппа группы X. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для любого композиционного фактора S группы G, $\mathrm{Aut}_G(S)$ содержит картерову подгруппу.

2. $G \cap M \trianglelefteq G$ содержит картерову подгруппу.

3. $G/(G \cap L)$ нильпотентна.

4. G не содержит картерову подгруппу.

Данные результаты получены автором лично; опубликованы в работе [14]; докладывались на международной конференции в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе («Teoria dei gruppi ed applicazioni» 27–29 сентября, 2006), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 14–16 ноября, 2006), в Иркутске (Объединенный российско-китайский семинар по алгебре и логике, 6–11 августа, 2007), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске, и на семинаре «Теория групп» МГУ.

Я благодарен своему научному консультанту чл.-корр. РАН В.Д.Мазурову. Его вклад в мое развитие как математика, а также постоянная поддержка неоценимы. Я также искренне благодарю профессора М.К.Тамбурини, инициировавшую мою работу над данной проблематикой и оказавшую помощь в работе. Я особо признателен д.ф.-м.н. А.В.Васильеву, к.ф.-м.н. М.А.Гречкосеевой, к.ф.-м.н. А.В.Заварницину и к.ф.-м.н. Д.О.Ревину за полезное обсуждение работы, позволившее упростить ряд доказательств и исправить неточности и ошибки. Я также благодарен профессору А.С.Кондратьеву за ряд ценных замечаний, улучшивших окончательный текст работы. Я признателен и хотел бы почтить светлую память профессора Ю.И.Мерзлякова, пробудившего во мне интерес к алгебре и теории групп. Я также признателен всем сотрудникам лаборатории теории групп Института математики СО РАН и кафедры алгебры и математической логики Новосибирского госуниверситета. Присущая этим коллективам творческая и благожелательная атмосфера располагает к плодотворной научной деятельности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00550, 01–01–06184, 02–01–00495, 02–01–06226 и 05–01–00797), грантов Президента РФ для молодых ученых кандидатов наук (МК–1455.2005.1 и МК–3036.2007.1), СО РАН (грант № 29 для молодых ученых и Интеграционный проект 2006.1.2) и программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.202). Часть работы была выполнена во время моей стажировки в университете г. Падуя (Италия) и я благодарен этому университету, всем сотрудникам кафедры алгебры этого университета, и, особенно, профессору Ф.Менегаццо за поддержку.

Литература

[1] Н.А.Вавилов, Нильпотентные самонормализуемые подгруппы общих линейных групп над конечным полем, *ЛОМИ*, **86**, (1979), 34–39.

[2] А.С.Кондратьев, Нормализаторы силовских 2-подгрупп конечных простых групп, *Мат. заметки*, **78**, № 3 (2005), 368–376.

[3] А.С.Кондратьев, В.Д.Мазуров, 2-сигнализаторы конечных простых групп, *Алгебра и логика*, **42**, № 5 (2003), 594–623.

[4] R.W.Carter, Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, *Math. Z.*, **75**, (1961), 136–139.

[5] A.D'aniello, Sull' esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici, II, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **74**, (1983), 1–6.

[6] F.Dalla Volta, A.Lucchini, and M.C.Tamburini, On the conjugacy problem for Carter subgroups, *Comm. Algebra*, **26**, № 2 (1998), 395–401.

[7] L.Di Martino and M.C.Tamburini, I sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti di S_n e di A_n, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **110**, (1976), 235–241.

[8] L.Di Martino and M.C.Tamburini, Carter subgroups of projective linear groups, *Boll. Un. Mat. Ital. B*, **7**, (1987), 905–915.

[9] L.Di Martino, M.C.Tamburini and A.E.Zalesskii, Carter subgroups in classical groups, *J. London Math. Soc.* (2), **55**, (1997), 264–276.

Работы автора по теме диссертации.

[10] M.C.Tamburini, E.P.Vdovin, Carter subgroups of finite groups, *J. Algebra*, **255**, № 1 (2002), 148–163.

[11] A.Previtali, M.C.Tamburini, E. P. Vdovin, The Carter subgroups of some classical groups, *Bull. London Math. Soc.*, **36**, № 1 (2004), 145–155.

[12] Е.П.Вдовин, О проблеме сопряженности картеровых подгрупп, *СМЖ*, **47**, № 4 (2006), 725–730.

[13] Е.П.Вдовин, Картеровы подгруппы почти простых групп, *Алгебра и логика*, **46**, № 2 (2007) , 157–216.

[14] Е.П.Вдовин, О существовании картеровых подгрупп, *Труды ИММ УрО РАН*, **13**, № 1 (2007), 50–65.

[15] Е.П.Вдовин, Картеровы подгруппы конечных групп, *Доклады РАН*, **414**, № 4 (2007), 439–442.