

На правах рукописи

Васильев Андрей Викторович

РАСПОЗНАВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПО СПЕКТРУ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2005

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН **Мазуров Виктор Данилович**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев Анатолий Семенович

доктор физико-математических наук, профессор
Погорелов Борис Александрович

доктор физико-математических наук, профессор
Шлепкин Анатолий Константинович

Ведущая организация:

Красноярский государственный университет

Защита диссертации состоится 18 ноября 2005 г. в 14 час. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 11 октября 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Пусть G — конечная группа. *Спектром* $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов. Иными словами,

$$\omega(G) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in G : |x| = n\}.$$

Группа G называется *распознаваемой по спектру*, если любая конечная группа H , удовлетворяющая условию $\omega(H) = \omega(G)$, изоморфна группе G .

Диссертация посвящена следующей проблеме.

Основной вопрос. *Какие конечные группы распознаются по спектру?*

Таким образом, мы имеем дело с классической математической задачей. Дан класс объектов и некоторый естественный набор параметров, присущих каждому объекту из этого класса. Спрашивается, какие объекты данного класса характеризуются в нем этим набором параметров. Безусловно, при постановке такой задачи важен выбор набора параметров, который должен быть с одной стороны достаточным для характеристики широкого семейства объектов данного класса, а с другой — достижимым, чтобы задача его отыскания была существенно проще самой задачи характеристики.

Оказывается, что спектр конечной группы является в указанном смысле "хорошим" набором параметров для характеристики конечных простых и близких к ним групп в классе всех конечных групп. С одной стороны, многие конечные простые группы характеризуются с точностью до изоморфизма в классе конечных групп (подробнее см. ниже). С другой стороны, при абстрактном представлении конечной группы

как black-box group (см. [10, 11, 19]), наиболее популярном сейчас среди специалистов по вычислениям в теории конечных групп, спектр — самый естественный и достижимый набор параметров. Мы не затрагиваем в диссертации связанные с этой темой вычислительные вопросы (подробности можно найти в уже упомянутых работах [11, 19]), а сконцентрируемся на теоретическом аспекте проблемы.

Для того, чтобы уточнить постановку задачи, обозначим через $h(G)$ число попарно неизоморфных конечных групп с тем же спектром, что и конечная группа G . Будем говорить, что для группы G *проблема распознаваемости решена*, если мы знаем точное значение $h(G)$. Кроме того, если $h(G) = 1$, то в соответствии с данным выше определением группа G называется распознаваемой по спектру (кратко, *распознаваемой*); если $1 < h(G) < \infty$, то группа G называется *почти распознаваемой*; наконец, если $h(G) = \infty$, то G называется *нераспознаваемой*.

Безусловно, вопрос о связи между спектром группы и ее строением изучался специалистами давно. Так, хорошо известно, что группы с $\omega(G) = \{1, 2\}$ являются элементарными абелевыми 2-группами. В 1932 году Леви и ван дер Варден [20] доказали, что при условии $\omega(G) = \{1, 3\}$ группа G нильпотентна и её ступень нильпотентности ограничена числом три. Нойман [24] описал группы G с $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$. Санов [9] и М. Холл [17] установили, что группы G , для которых $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, соответственно, $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 6\}$ локально нильпотентны. Нейман [25] определил строение группы G , если $\omega(G) = \{1, 2, 5\}$. Отметим, что все эти результаты получены без предположения о конечности группы G . Целый ряд результатов был получен и для конечных групп. Выделим среди них результаты Хигмана и Сузуки о конечных группах, спектр которых содержит только степени простых чисел (их называют *EPPO*-группами). В 1957 году Хигман [18] показал, что порядок конечной разрешимой *EPPO*-группы имеет не более двух простых делителей, а в 1962 году Сузуки [30] описал все конечные простые *EPPO*-группы. В середине 80-х годов, рассматривая общую проблему строения конечных *EPPO*-групп, китайский математик Ши Вуджи обнаружил (см. [26, 27]), что знакопеременная группа Alt_5 и простая линейная группа $L_2(7)$ однозначно характеризуются своим спектром в классе конечных групп. Именно Ши Вуджи принадлежит постановка вопроса о распознаваемости конечных групп по спектру в том виде, в котором он сформулирован в диссертационной работе. В 1988 году Ши удалось доказать распознаваемость уже бесконечной серии конечных

простых групп $L_2(2^k)$ (см. [28]), а затем совместно с немецким ученым Брандлом полностью решить проблему распознаваемости для простых линейных групп размерности два над произвольным конечным полем (см. [12]). Оказалось, что группы $L_2(q)$ распознаваемы при $q \neq 9$, а группа $L_2(9) \simeq Alt_6$ нераспознаваема. Отметим, что позднее Журтов и Мазуров [3] доказали, что группы $L_2(2^k)$ однозначно характеризуются своим спектром даже в классе всех групп.

Кроме того, в [29] Ши показал, что группа, обладающая нетривиальной нормальной разрешимой подгруппой, нераспознаваема (точное доказательство этого утверждения см. в работе Мазурова [7]). Таким образом, каждая распознаваемая или почти распознаваемая группа является расширением прямого произведения M неабелевых простых групп с помощью некоторой подгруппы из $Out(M)$. Поэтому основной интерес представляет вопрос о распознаваемости простых и почти простых групп (напомним, что группа G называется почти простой, если $S \leq G \leq Aut(S)$ для некоторой неабелевой простой группы S). Понятно, что проблема распознаваемости конечных простых групп тесно связана с классификацией конечных простых групп. И хотя для некоторых простых групп известно доказательство их распознаваемости (причем в классе всех групп), не использующее классификацию (см. [3]), ясно, что общее решение вопроса распознаваемости возможно лишь по модулю классификации конечных простых групп. Для удобства дальнейшего изложения напомним, что классификационная теорема утверждает, что список конечных неабелевых простых групп включает в себя:

- а) знакопеременные группы Alt_n , при $n \geq 5$;
- б) 26 спорадических групп;
- в) простые группы лиева типа.

К настоящему времени проблема распознаваемости решена для многих конечных простых и почти простых групп (см. обзор Мазурова [23] и таблицы 1–3 в приложении к диссертации). Отметим, что с каждым годом растет количество работ, посвященных этой проблеме, расширяется и география стран, в которых работают специалисты, интересующиеся вопросом распознаваемости. Тем не менее, полное решение проблемы распознаваемости, даже если ограничиться рассмотрением только конечных простых групп, представляется достаточно отдаленным. Так, лишь в 2004 году М. А. Гречкосеевой совместно с автором диссертации удалось указать первые примеры бесконечных по рангу серий распознаваемых групп лиева типа (см. [33]).

Чтобы пояснить, какие трудности возникают при решении проблемы распознаваемости, остановимся вкратце на схеме доказательства.

Пусть L — конечная неабелева простая группа, а G — произвольная конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Доказательство распознаваемости группы L , как правило, включает в себя три основных этапа.

1. Доказывается, что фактор-группа G/K , где K — максимальная разрешимая нормальная подгруппа группы G , является почти простой. Другими словами, доказывается, что существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$.

2. Доказывается, что S изоморфна L .

3. Доказывается, что $\overline{G}/S = 1$ и $K = 1$.

Естественно, в некоторых случаях на одном из этапов может произойти «сбой». Например, в случае, когда $L = L_3(5)$, не удастся доказать, что $\overline{G}/S = 1$. Оказывается, что $h(L) = 2$ и группа L имеет тот же спектр, что и ее расширение с помощью графового автоморфизма порядка 2 (см. [6]). А группа $L = L_3(3)$ имеет один и тот же спектр с разрешимой группой Фробениуса (см. [8, предложение 3]) и, следовательно, является нераспознаваемой. Однако, несмотря на исключения, в большинстве работ по распознаваемости реализуется именно указанная выше схема.

Вернемся к первому этапу. Отметим, что совпадение спектров групп L и G влечет совпадение их графов простых чисел. *Граф простых чисел* или *граф Грюнберга — Кегеля* $GK(G)$ конечной группы G определяется следующим образом. Множество вершин этого графа образует множество $\pi(G)$ простых делителей порядка группы G . Простые числа p и q , рассматриваемые как вершины графа $GK(G)$, смежны (т. е. соединены ребром) тогда и только тогда, когда в G найдется элемент порядка pq . Обозначим через $s(G)$ число связных компонент графа $GK(G)$. Грюнберг и Кегель дали структурное описание конечных групп с несвязным графом простых чисел, а Уильямс и Кондратьев описали все конечные простые группы L с $s(L) \geq 2$ (см. [5, 31] и таблицы 4–6 в приложении к диссертации). Эти глубокие результаты имели целый ряд важных следствий. Для нас существенно, что из них, а также результата Алеевой [1] следует, что конечная группа G , имеющая тот же спектр, что и конечная неабелева простая группа L , отличная от групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$ и удовлетворяющая условию $s(L) \geq 2$, содержит единственный неабелев композиционный фактор S и $s(S) \geq s(L)$. Иными словами, для всех

простых групп с несвязным графом простых чисел, кроме групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$ (для которых проблема распознаваемости уже решена — они нераспознаваемы), первый этап доказательства пройден. Более того, и на втором этапе структурная теорема Грюнберга — Кегеля оказывается важным вспомогательным инструментом, поскольку для неабелева композиционного фактора S имеет место неравенство $s(S) \geq s(L)$, а значит, он, как и L , содержится в списке простых групп с несвязным графом простых чисел, полученном Уильямсом и Кондратьевым. Эта информация помогает установить, что $S \simeq L$. Иными словами, доказать *квазираспознаваемость* группы L . Уточним: конечная неабелева простая группа L называется *квазираспознаваемой*, если конечная группа G с тем же спектром, что и L , содержит единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен L . Определение квазираспознаваемости восходит к работе [2].

Теорема Грюнберга — Кегеля используется в подавляющем большинстве работ по распознаваемости. В частности, в достаточно обширном списке групп, для которых проблема распознаваемости решена, до недавнего времени имелось всего две группы со связным графом простых чисел: группа Alt_{16} с $h(Alt_{16}) = 1$ (см. [4]) и группа Alt_{10} с $h(Alt_{10}) = \infty$ (см. [7]). С другой стороны, в наиболее "объемном" классе конечных простых групп — классических простых группах — группы с несвязным графом простых чисел скорее исключение. Например, если простая линейная группа $L_n(q)$ имеет несвязный граф простых чисел, то $n = p$ или $n = p + 1$, где p — простое число. Таким образом, для дальнейших исследований вопроса распознаваемости крайне важным является решение проблемы прохождения первого этапа в случае, когда конечная простая группа имеет связный граф Грюнберга — Кегеля. В недавно опубликованной работе [22] показано, что группа G , спектр которой совпадает со спектром конечной неабелевой простой группы L , отличной от групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$ и Alt_{10} , является неразрешимой. Однако этот результат сложно использовать непосредственно, так как структура группы G остается неопределенной.

Основная цель диссертации — построить теоретическую базу для решения проблемы распознаваемости конечных простых групп в ситуации, когда конечная простая группа имеет связный граф Грюнберга — Кегеля, и показать, как полученные результаты можно применить для доказательства распознаваемости конкретных серий простых групп со связным графом простых чисел.

Основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации доказана структурная теорема о строении неразрешимых конечных групп, в графе простых чисел которых хотя бы одно нечетное простое число несмежно с числом 2.

Во второй главе для каждой конечной простой группы указан исчерпывающий арифметический критерий смежности вершин в графе простых чисел. На основе этого критерия для каждой конечной простой группы найдены характеристики графа ее простых чисел: неплотность и 2-неплотность, в терминах которых заданы условия структурной теоремы из первой главы. Оказывается, что за исключением некоторых знакопеременных групп конечные простые группы удовлетворяют условиям этой теоремы. Результаты второй главы получены автором совместно с Е. П. Вдовиным.

В третьей главе рассматриваются приложения результатов первых двух глав к вопросу распознаваемости конечных простых групп, а именно, доказаны:

- квазираспознаваемость бесконечной серии простых ортогональных групп $O_{4n}^-(2^k)$ при $n \geq 8$;
- распознаваемость бесконечной серии простых линейных групп $L_n(2^k)$, где $n = 2^m \geq 32$ (совместно с М. А. Гречкосевой, ученицей автора диссертации).

В четвертой и пятой главе диссертации собраны результаты по проблеме распознаваемости, полученные автором до доказательства структурной теоремы из главы 1.

В четвертой главе доказана почти распознаваемость групп $L_6(3)$ и $U_4(5)$. Эти результаты позволяют утверждать, что для всех конечных простых групп, простые делители порядков которых не превосходят 13, вопрос распознаваемости полностью решен. Отметим также, что простая унитарная группа $L = U_4(5)$, для которой $h(L) = 2$, дает первый пример почти распознаваемой группы со связным графом Грюнберга — Кегеля.

В пятой главе рассматриваются две серии исключительных групп лиева типа. А именно, доказана распознаваемость

- групп $G_2(3^k)$;
- групп $F_4(2^k)$ (в составе международного коллектива авторов).

Новизна и научная значимость работы. Все основные результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический харак-

тер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований как вопроса распознаваемости групп по спектру, так и других проблем теории групп. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории групп: теория конечных простых групп, теория групп Ли-ева типа, алгебраическая теория групп, теория представлений, методы линейной алгебры, а также элементы теории графов и теории чисел.

Апробация работы. Результаты диссертации в период с 2000 по 2005 год были представлены на международных конференциях в Новосибирске, Москве, Екатеринбурге, Красноярске, Иркутске (см. [39–49]). В частности, на международной конференции "Мальцевские чтения", проходившей в Новосибирске в 2004 году, автором был сделан пленарный доклад по теме диссертации. Результаты работы неоднократно докладывались на семинарах Института математики СО РАН и НГУ "Теория групп" и "Алгебра и логика". Дважды, в 2004 и 2005 годах, автор выступал на семинаре по теории групп университета г. Сучжоу, Китай (руководитель - проф. Ши Вуджи, автор первых работ по проблеме распознаваемости).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [32–49].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из 5 глав, введения, приложения и списка литературы. Она изложена на 110 страницах, включает 18 таблиц и 1 рисунок, библиография содержит 114 наименований.

Перейдем к более подробному изложению работы.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Основные результаты каждой главы (теоремы и их следствия) явным образом сформулированы в первом параграфе главы. Их нумерация двойная: первая цифра - номер главы, вторая - номер теоремы в главе. Вспомогательные утверждения (леммы, предложения и их следствия) имеют тройную нумерацию: первая цифра - номер главы, вторая - номер пара-

графа в текущей главе, третья - номер утверждения в текущем параграфе. Обозначения из общей теории групп в основном стандартны и соответствуют широко известным монографиям [14, 16]. Необходимые новые понятия определяются по ходу изложения. Обозначения из теории групп лиева типа взяты из [13]. Отметим лишь, что классические группы лиева типа обозначаются либо в соответствии с обозначениями принятыми в «Атласе конечных простых групп» [14], либо в соответствии с лиевой нотацией. Эти разночтения в обозначениях связаны со спецификой конечных простых групп — иногда удобно рассматривать соответствующие классические группы, как матричные группы, а иногда, как группы лиева типа. Во избежание путаницы мы обозначаем симметрическую и знакопеременную группы степени n через Sym_n и Alt_n соответственно (а не S_n и A_n как принято в «Атласе»), оставляя обозначение A_n для простой алгебры Ли ранга n . Все таблицы собраны в приложении к диссертации.

Глава 1. Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — ее спектр, а $GK(G)$ — граф простых чисел группы G . Напомним, что понятие графа простых чисел было введено Грюнбергом и Кегелем. Ими же была доказана структурная теорема о строении конечных групп с несвязным графом простых чисел. Доказательство этой теоремы существенно использует тот факт, что в группе G (если ее порядок четен) найдется элемент простого нечетного порядка, не связанный в $GK(G)$ с простым числом 2. Оказывается, что требование несвязности графа простых чисел в большинстве случаев может быть успешно заменено более слабым требованием несмежности числа 2 с хотя бы одним нечетным простым числом.

Обозначим через $t(G)$ наибольшее число простых делителей порядка группы G , попарно несмежных в $GK(G)$. Другими словами, если $\rho(G)$ — независимое множество с наибольшим числом вершин в $GK(G)$ (множество вершин графа называется *независимым*, если его вершины попарно несмежны), то $t(G) = |\rho(G)|$. В теории графов это число принято называть *числом вершинной независимости* или *неплотностью*. По аналогии мы обозначим через $t(2, G)$ наибольшее число вершин в независимых множествах вершин графа $GK(G)$, содержащих простое число 2. Мы назовем это число *2-неплотностью*.

Основной результат первой главы диссертации — следующее утверждение, которое можно применять для широкого класса конечных

групп, в том числе и для групп со связным графом Грюнберга — Кегеля.

Теорема 1.1. Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая двум условиям:

(а) существует три простых числа из $\pi(G)$, попарно несмежных в $GK(G)$, т. е. $t(G) \geq 3$;

(б) существует нечетное простое число из $\pi(G)$, несмежное в $GK(G)$ с числом 2, т. е. $t(2, G) \geq 2$.

Тогда существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G . Кроме того, $t(S) \geq t(G) - 1$, и выполняется одно из следующих утверждений.

(1) $S \simeq \text{Alt}_7$ или $L_2(q)$ для некоторого нечетного числа q и $t(S) = t(2, S) = 3$.

(2) Для каждого простого числа $p \in \pi(G)$, несмежного с 2 в $GK(G)$, силовская p -подгруппа группы G изоморфна силовской p -подгруппе группы S . В частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.

Отметим, что условие (а) влечет неразрешимость группы G , а следовательно, в силу теоремы Фейта — Томпсона [15] в условии теоремы нет необходимости предполагать, что порядок G четен. Более того, оказывается, что условие (а) можно без ущерба для итогового заключения заменить более слабым условием неразрешимости группы G . А именно, теорема 1.1 есть следствие следующего утверждения.

Теорема 1.2. Пусть G — конечная неразрешимая группа и существует нечетное простое число из $\pi(G)$, несмежное в $GK(G)$ с числом 2, т. е. $t(2, G) \geq 2$. Тогда существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G . Кроме того, $t(S) \geq t(G) - 1$, и выполняется одно из следующих утверждений.

(1) $S \simeq \text{Alt}_7$ или $L_2(q)$ для некоторого нечетного числа q и $t(S) = t(2, S) = 3$.

(2) Для каждого простого числа $p \in \pi(G)$, несмежного с 2 в $GK(G)$, силовская p -подгруппа группы G изоморфна силовской p -подгруппе группы S . В частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.

Результаты первой главы опубликованы в [36].

Глава 2. В этой самой объемной главе диссертации для каждой конечной неабелевой простой группы G найден исчерпывающий арифметический критерий смежности вершин в графе простых чисел $GK(G)$

группы G . С использованием полученного критерия для каждой конечной неабелевой простой группы G найдены независимое множество с наибольшим числом вершин в графе $GK(G)$ и независимое множество с наибольшим числом вершин, одна из которых — число 2, а следовательно, определены неплотность $t(G)$ и 2-неплотность $t(2, G)$ графа $GK(G)$. Результаты этой работы представлены в таблицах 8–15 в приложении к диссертации. Перечисленные результаты слишком многочисленны и объемны, чтобы привести их здесь. Поэтому мы приведем лишь основные следствия из них. А именно те, что имеют прямое отношение к вопросу распознаваемости.

Введем для удобства дальнейшего изложения следующее обозначение:

$$\tau(2, n) = \{s \mid s \text{ — простое число, } n - 3 \leq s \leq n\}.$$

Теорема 2.1. *Пусть G — конечная неабелева простая группа, удовлетворяющая условию $t(2, G) = 1$. Тогда G является знакопеременной группой Alt_n , причем среди чисел $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$, n нет ни одного простого, т. е. $\tau(2, n) = \emptyset$.*

Таким образом, основное условие $t(2, G) \geq 2$ теоремы 1.1 реализуется для очень широкого класса конечных простых групп. В частности, для всех простых групп лиева типа и всех спорадических групп.

Для вопроса о распознаваемости конечных простых групп по спектру ключевое значение имеет следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Пусть L — конечная неабелева простая группа, отличная от групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$, Alt_{10} и групп Alt_n с условием $\tau(2, n) = \emptyset$. Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда для группы G имеет место заключение теоремы 1.1. В частности, G имеет единственный неабелев композиционный фактор.*

Отметим, что для групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$, Alt_{10} вопрос распознаваемости уже решен — все эти группы нераспознаваемы. Таким образом, из результатов первой и второй главы диссертации следует, что проблема прохождения первого этапа при доказательстве распознаваемости конечных простых групп остается открытой лишь для знакопеременных групп Alt_n с условием $\tau(2, n) = \emptyset$.

Конечно, подробное описание графа простых чисел, выполненное в

этой главе, имеет и другие полезные следствия, не имеющие прямого отношения к проблеме распознаваемости.

Результаты главы были получены автором диссертации совместно с Е. П. Вдовиным. Они опубликованы в [38, 48].

Глава 3. Здесь рассматриваются приложения результатов первых двух глав к вопросу распознаваемости конечных групп по спектру. Отметим, что теорема 1.1 и следствие из теоремы 2.1 не только позволяют успешно пройти первый этап (см. выше схему доказательства распознаваемости), но и играют существенную роль на втором этапе, при доказательстве квазираспознаваемости. Дело в том, что неравенство $t(S) \geq t(G) - 1$ и утверждение (2) из заключения теоремы 1.1 существенно сокращают количество вариантов, которые требуется рассмотреть, чтобы доказать изоморфизм исходной конечной простой группы L и неабелева композиционного фактора S группы G , для которой имеет место $\omega(G) = \omega(L)$.

Теорема 3.1. *Пусть $L = O_{2n}^-(q)$, $q = 2^k$, k, n — натуральные числа, причем n четно и $n \geq 16$. Тогда L квазираспознаваема.*

Квазираспознаваемость групп $L = O_{2n}^-(q)$, $n = 2^m$ (случай, когда $m \geq 4$, — это частный случай теоремы 3.1), была доказана ранее в [33] с использованием теоремы Грюнберга — Кегеля (в этом случае граф простых чисел группы несвязен). Если же n не является степенью двойки, то группа L , удовлетворяющая условиям теоремы 3.1, имеет уже связный граф простых чисел. Тем самым мы впервые получаем бесконечную серию квазираспознаваемых групп со связным графом простых чисел.

Наиболее важным результатом главы является следующая теорема, в которой впервые доказана распознаваемость бесконечной серии простых групп со связным графом простых чисел.

Теорема 3.2. *Пусть $L = L_n(q)$, где $n = 2^m \geq 32$, $q = 2^k \geq 2$. Тогда L распознаваема по спектру.*

Отметим также, что серия групп, указанная в теореме 3.2, бесконечна по двум параметрам: порядку поля и размерности. Во всех ранее полученных примерах серий распознаваемых групп лиева типа удавалось добиться бесконечного возрастания лишь одного из двух этих параметров.

Результат теоремы 3.1 получен автором лично и опубликован в [36]. Результат теоремы 3.2 получен автором в соавторстве с его ученицей М. А. Гречкосевой и опубликован в [37, 49].

Глава 4. В этой главе рассматриваются конечные неабелевы простые группы, простые делители порядков которых не превосходят числа 13. С точностью до изоморфизма имеется 55 таких групп (см. таблицы 17–18 в приложении к диссертации). Мы обозначим множество всех этих групп через $\mathcal{S}_{13}$. Для 53 групп из $\mathcal{S}_{13}$ проблема распознаваемости была решена ранее разными авторами (см. [23] и таблицы 1–3 в приложении к диссертации). Оставшиеся группы, $L_6(3)$ и $U_4(5)$, исследуются в диссертации.

Теорема 4.1. Пусть G — конечная простая группа $L_6(3)$ и H — конечная группа со свойством $\omega(H) = \omega(G)$. Тогда $H \simeq G$ или $H \simeq G < \gamma >$, где γ — графовый автоморфизм группы G порядка 2. В частности, $h(G) = 2$.

Теорема 4.2. Пусть G — конечная простая группа $U_4(5)$ и H — конечная группа со свойством $\omega(H) = \omega(G)$. Тогда $H \simeq G$ или $H \simeq G < \gamma >$, где γ — полевой автоморфизм группы G порядка 2. В частности, $h(G) = 2$.

Таким образом, имеет место

Следствие 4.3. Для каждой группы G из $\mathcal{S}_{13}$ проблема распознаваемости решена.

Отметим, что группа $U_4(5)$ имеет связный граф простых чисел. Таким образом, она является первым и пока единственным известным примером почти распознаваемой простой группы со связным графом простых чисел.

Результаты этой главы опубликованы в [35].

Глава 5. Здесь рассматриваются исключительные группы лиева типа. Основные результаты главы составляют две теоремы:

Теорема 5.1. Для каждого натурального числа m группа $G = G_2(3^m)$ распознаваема по спектру.

Теорема 5.2. Для каждого натурального числа m группа $G = F_4(2^m)$ распознаваема по спектру.

Заметим, что ни для одной простой исключительной группы Шевалле (исключительной группы нормального типа) кроме групп $G_2(3)$ (см. [21]), $G_2(4)$ и $F_4(2)$ (см. [8]) ранее не было известно, является она распознаваемой или нет. Таким образом, теоремы 5.1 и 5.2 дают первые бесконечные серии конечных простых исключительных групп Шевалле, распознаваемых по спектру.

Результат теоремы 5.1 получен автором лично и опубликован в [32, 40]. Результат теоремы 5.2 получен автором в составе международного коллектива (Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д., Чао Х. П., Чен Г. Ю., Ши В. Дж.) и опубликован в [34].

Приложение. В приложении к диссертации собраны вместе все таблицы. Часть из них носит справочный характер (таблицы 1–7, 16). С другой стороны, таблицы 8–15 представляют в удобном и сжатом виде результаты главы 2, а таблицы 17–18 — результаты главы 4.

В заключение я хотел бы выразить свою глубокую признательность своему научному консультанту чл.-корр. РАН В. Д. Мазурову. Его влияние на мое становление как математика, его роль в постановке задачи и, наконец, его деятельная поддержка в ходе работы над диссертацией неоценимы. Хотел бы особо поблагодарить к.ф.-м.н. Е. П. Вдовина, к.ф.-м.н. А. В. Заварницина и аспиранта НГУ М. А. Гречкосееву, с которыми я обсуждал отдельные аспекты проблемы распознаваемости в ходе работы. Я признателен всем сотрудникам лаборатории теории групп ИМ СО РАН и кафедры алгебры и математической логики НГУ. Присущая этим коллективам творческая и благожелательная атмосфера располагает к плодотворной научной деятельности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00797), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2069.2003.1), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» по проекту 8294, программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.202), а также гранта Президиума СО РАН (№86-197). Я благодарен всем этим организациям за финансовую помощь.

Литература

- [1] *Алеева М. Р.* О конечных простых группах с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса, Мат. заметки, Т. 73, № 1 (2003), 323–339.
- [2] *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов, Укр. матем. ж., Т. 54, № 7 (2002), 998–1003.
- [3] *Журтов А. Х. Мазуров В. Д.* О распознавании конечных простых групп $L_2(2^m)$ в классе всех групп, Сиб. матем. журн., Т. 40, № 1 (1999), 75–78.
- [4] *Заварницин А. В.* Распознавание знакопеременных групп степени $r + 1$ и $r + 2$ для простого r и группы степени 16 по их множествам порядков элементов, Алгебра и логика, Т. 39, № 6 (2000), 648–662.
- [5] *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп, Матем. сб., Т. 180, № 6 (1989), 787–797.
- [6] *Мазуров В. Д.* О множестве порядков элементов конечной группы, Алгебра и логика, Т. 33, № 1 (1994), 81–89.
- [7] *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов, Алгебра и логика, Т. 37, № 6 (1998), 651–666.
- [8] *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов, Алгебра и логика, Т. 41, № 2 (2002), 166–198.
- [9] *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для экспоненты 4, Учёные зап. Ленингр. гос. ун-та, мат. сер., Т. 10 (1940), 166–170.
- [10] *Babai L., Szemerédi E.* On the complexity of matrix group problem I, Proc. 25th IEEE Symp. Found. Comp. Sci (FOCS'84), 1984, 229–240.
- [11] *Babai L., Beals R.* A polynomial-time theory of black-box group I, Groups St. Andrews 1997 in Bath, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 260, Cambridge University Press, 1999, 30–64.

- [12] *Brandl R., Shi W.* The characterization of $PSL(2, q)$ by its element orders, *J. Algebra*, V. 163, N 1 (1994), 109–114.
- [13] *Carter R. W.* Simple groups of Lie type, London: John Wiley & Sons, 1972.
- [14] *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [15] *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.*, V. 13 (1963), 775–1029.
- [16] *Gorenstein D.* Finite groups, New York: Harper & Row, 1968.
- [17] *Hall M.* Solution of the Burnside problem for exponent six, *Illinois J. Math.*, V. 2 (1958), 764–786.
- [18] *Higman G.* Finite groups in which every element has prime power order, *J. London Math. Soc.*, V. 32 (1957), 335–342.
- [19] *Kantor W. M., Seress A.* Black box classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* 149, Nr. 708, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [20] *Levi F., van der Waerden B. L.* Über eine besondere Klasse von Gruppen, *Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.*, V. 9 (1932), 154–158.
- [21] *Lipschutz S., Shi W.* Finite groups whose element orders do not exceed twenty, *Progress in Natural Sci.*, V. 10, N 1 (2000), 11–21.
- [22] *Lucido M. S., Moghaddamfar A. R.* Groups with complete prime graph connected components, *J. Group Theory*, V. 7, N 3 (2004), 373–384.
- [23] *Mazurov V. D.* Characterization of groups by arithmetic properties, *Algebra Colloc.*, V. 11, N 1 (2004), 129–140.
- [24] *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders, *J. London Math. Soc.*, V. 12 (1937), 195–198.
- [25] *Newman M. F.* Groups of exponent dividing seventy, *Math. Scientist.*, V. 4 (1979), 149–157.
- [26] *Shi W.* A characteristic property of A_5 (in Chinese), *J. Southwest-China Teach. Univ.*, V. 11, N 3 (1986), 11–14.

- [27] *Shi W.* A characteristic property of $PSL_2(7)$, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A), V. 36, N 3(1984), 354–356.
- [28] *Shi W.* A characteristic property of J_1 and $PSL_2(2^n)$, Adv. in Math., V. 16 (1987), 397–401.
- [29] *Shi W.* The characterization of the sporadic simple groups by their element orders, Algebra Colloq., V. 1, N 2 (1994), 159–166.
- [30] *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups, Ann. Math., V. 75 (1962), 105–145.
- [31] *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups, J. Algebra, V. 69, N 2 (1981), 487–513.

Работы автора по теме диссертации

- [32] *Васильев А. В.* Распознаваемость групп $G_2(3^n)$ по порядкам их элементов, Алгебра и логика, Т. 41, № 2 (2002), 130–142.
- [33] *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m , $2^m + 1$ и $2^m + 2$ над полем характеристики 2, Сиб. мат. журн., Т. 45, № 3 (2004), 510–526.
- [34] *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д., Чао Х. П., Чен Г. Ю., Ши В. Дж.* Распознавание конечных простых групп $F_4(2^m)$ по спектру. Сибирский матем. журн., Т. 45, № 6 (2004), 1256–1262.
- [35] *Васильев А. В.* О распознавании всех конечных неабелевых простых групп, простые делители порядков которых не превосходят 13, Сиб. мат. журн., Т. 46, № 2 (2005), 315–324.
- [36] *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел, Сиб. мат. журн., Т. 46, № 3 (2005), 511–522.
- [37] *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознавании по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2, Сиб. мат. журн., Т. 46, № 4 (2005), 749–758.

- [38] *Vasil'ev A. V., Vdovin E. P.* An adjacency criterion for two vertices of the prime graph of a finite simple group. Sobolev Institute of Mathematics. Preprint № 152 (2005).
- [39] *Васильев А. В., Вдовин В. П., Заварницин А. В., Макаренко Н. Ю., Пожидает А. П.* Конечные группы и алгебры Ли, Материалы конференции молодых ученых, посвященной 100-летию М.А. Лаврентьева, Математика, Новосибирск, 2000, 8–11.
- [40] *Васильев А. В.* Распознавание конечных простых исключительных групп типа G_2 по порядкам их элементов, Тезисы докладов международной конференции "Алгебра и ее приложения", Красноярск, 2002, 25–26.
- [41] *Васильев А. В., Вдовин В. П., Заварницин А. В., Макаренко Н. Ю.* Теория конечных групп и алгебры Ли, Материалы конференции молодых ученых СО РАН, посвященной М.А. Лаврентьеву, Ч. I, Новосибирск, 2002, 16–19.
- [42] *Vasil'ev A. V.* Recognition of finite simple groups by their spectrums, Fifth International Summer School "Intermediate problems of Universal Algebra and Model Theory", Novosibirsk, 2003.
- [43] *Васильев А. В., Вдовин Е. П., Макаренко Н. Ю., Маслакова О. С., Ревин Д. О.* Характеризации групп: арифметические свойства, автоморфизмы, комбинаторные методы, Материалы конференции молодых ученых СО РАН, посвященной М.А. Лаврентьеву, Ч. I, Новосибирск, 2003, 13–18.
- [44] *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп, Труды XXXV Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики", Екатеринбург, 2004, 17–19.
- [45] *Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V.* On recognition of finite simple orthogonal groups over fields of even order by their spectrums, Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию Московского университета, М.: Изд. механико-математического факультета МГУ, 2004, 297–298.

- [46] *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознавании конечных простых групп по их спектрам, Материалы международной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения профессора А.И. Кокорина, Иркутск, 2004, 13–14.
- [47] *Vasil'ev A. V.* On connection between the structure of a finite group and the properties of its prime graph, Sixth International Summer School "Intermediate problems of Universal Algebra and Model Theory", Novosibirsk, 2005.
- [48] *Vasil'ev A. V., Vdovin E. P.* On the prime graph of a finite group, Тезисы международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, Екатеринбург, 2005, 98–100.
- [49] *Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V.* On recognition of finite simple linear groups by spectrum, Тезисы международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, Екатеринбург, 2005, 97–98.

Васильев Андрей Викторович

Распознавание конечных групп по спектру

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 27.09.05. Формат 60х84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,3. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 150 экз. Заказ № 123.

Отпечатано в ООО “Омега Принт”
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6