На правах рукописи

Уразова Инна Владимировна

ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ СТРУКТУРА И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЕДИНИЧНЫХ ТРЕБОВАНИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ

01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Новосибирск – 2011

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского"

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Р. Ю. Симанчев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. К. Попков
	кандидат физико-математических наук, И. Д. Черных
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

Защита состоится 15 июня 2011 года в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.003.015.01 при Учреждении Российской Академии наук Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской Академии наук Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан «___» ___________ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.003.015.01,
доктор физико-математических наук Ю.В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В настоящее время задачи теории расписаний имеют большое прикладное значение. Стремительное развитие техники и связи, появление новых технологий все чаще вызывает необходимость построения расписаний, связанных с функционированием промышленных предприятий и сферы обслуживания, образованием, транспортной развязкой, распределением ресурсов, инвестиционной политикой и многими другими областями.

Свое развитие теория расписаний получила в середине прошлого века. Глебов Н.И., Михалевич В.С., Танаев В.С., Шкурба В.В., Беллман Р., Брукер П., Джонсон Д., Джонсон С. и другие превратили теорию расписаний в отдельное направлеиие в области оптимизации. В настоящее время теория расписаний активно развивается в работах Гимади Э.Х., Гордона В.С., Ковалева М.Я., Кононова А.В., Лазарева А.А., Севастьянова С.В., Серваха В.В. и многих других российских и зарубежных ученых.

Помимо прикладного значения, задачи теории расписаний представляют значительный теоретический интерес. Проблематика теории расписаний охватывает исследование вычислительной сложности задач, разработку точных, приближенных, эвристических алгоритмов их решения и др. При этом подавляющее количество работ посвящено развитию комбинаторных подходов. Однако, как показывает практика, возможности комбинаторных алгоритмов существенно ограничены размерностью решаемых задач. Это вполне согласуется с результатами теории комбинаторной сложности – большинство задач, возникающих в теории расписаний, являются NP-трудными.

Одним из направлений является сведение задач комбинаторной оптимизации и, в частности, теории расписаний, к задачам целочисленного линейного программирования (ЦЛП). В ряде известных методов решения задач ЦЛП исходная задача приводится к последовательности задач непрерывной оптимизации. На этом основаны алгоритмы отсечения, ветвей и границ, перебора L-классов и др.

В последнее время одним из перспективных подходов в комбинаторной оптимизации является анализ полиэдральной структуры задач и, как следствие, применение для их решения аппарата выпуклого анализа, выпуклого программирования, целочисленного программирования. Исследование полиэдральных свойств комбинаторных задач, а именно: описание целочисленного многогранника (выпуклой оболочки), сответствующего задаче, построение оценок числа его вершин, анализ смежности вершин, построение правильных, опорных и фасетных неравенств, разработка эффективных алгоритмов решения исследуемых задач, основанных на полиэдральных свойствах этих задач – все эти методы активно развиваются в работах Шевченко В.Н., Симанчева Р.Ю., Васильева И.Л., Pulleyblank W.R., Reinert K. и др. Количество работ, связанных с применением полиэдрального подхода к задачам теории расписаний невелико. Следует отметить работы Balas E., Mokotof E., Shulz A.S., Queyranne M. [1-4], в которых исследуются полиэдральные свойства некоторых задач теории расписаний.

Задача построения расписания для параллельных машин PMS (Parallel Machine Scheduling) является NP - трудной в сильном смысле. В 1978г. Lenstra J.K. и Rinnooy Kan [5] показали, что для этой задачи невозможно построить приближенный полиномиальный алгоритм решения, относительная погрешность которого будет меньше $\frac{4}{3}$.

В диссертации рассматривается следующий частный случай задачи PMS. Дано конечное множество требований. Все требования имеют единичные длительности обслуживания. Между требованиями заданы отношения предшествования. Требования обслуживаются на m параллельных машинах (приборах, станках, процессорах). Необходимо минимизировать момент окончания обслуживания всех требований.

В обозначениях, принятых в теории расписаний, эта задача имеет вид $Pm|prec; p_j = 1|C_{max}$. Для случая, когда число параллельных приборов m больше трех данная задача является открытой в смысле теории сложности. В работе [6] предложен точный полиномиальный алгоритм для частного случая задачи $Pm|tree; p_j = 1|C_{max}$, когда граф предшествования – дерево. В работах [7,8] аналогичная задача для двух машин решена за полиномиальное время.

В связи с вышесказанным анализ структуры и разработка новых подходов к решению данной задачи являются актуальными.

Цель работы – исследование структурных свойств и решение задачи обслуживания единичных требований с предшествованиями параллельными приборами с использованием полиэдрального подхода. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи: построение полиэдральной релаксации и ЦЛП-модели задачи; построение классов неравенств, правильных относительно выпуклой оболочки расписаний; разработка и реализация алгоритмов решения задачи на основе полученных полиэдральных свойств; апробация разработанных методов.

Методы исследования. Для исследования задач применяются методы дискретной оптимизации, теории графов, целочисленного линейного программирования, а также современная методология экспериментальных исследований с применением вычислительной техники и коммерческих пакетов прикладных программ для решения задач оптимизации.

Научная новизна результатов. Построена модель целочисленного линейного программирования для задачи $Pm|prec; p_j = 1|C_{max}$. Получены достаточные условия на общее время обслуживания требований, гарантирующие существование расписаний. Построены три класса неравенств, правильных относительно выпуклой оболочки векторов инциденций расписаний, найдены достаточные условия их опорности. Проведено сравнение неравенств внутри каждого класса, приведены примеры случаев их "несравнимости". Предложены полиномиальные алгоритмы решения задачи идентификации для двух из построенных классов, для третьего – эвристическая процедура. В терминах частичного порядка получены нижние и верхние оценки на минимальное время обслуживания единичных требований, позволяющие существенно ограничить размерность задачи. На основе построенных правильных неравенств разработаны два алгоритма отсечения для решения задачи $Pm|prec; p_j = 1|C_{max}$ и анализа выпуклой оболочки расписаний.

Практическая ценность Исследование полиэдральной структуры многогранника, соответствующего задаче обслуживания единичных требований с предшествованиями позволило разработать точные алгоритмы, позволяющие находить решение данной задачи, достаточно высокой размерности. Полученные в работе результаты могут быть использованы при исследовании смежных задач теории расписаний с ограничениями предшествования.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на XIV Байкальской международной школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Северобайкальск, 2008), IV Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (Омск, 2009), Российской конференции "Дискретная оптимизация и исследование операций" (Новосибирск, 2010), на XIV Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения" (Екатеринбург, 2011), на XXXI научно-исследовательском семинаре по дискретной математике в Южном научном центре НАН Украины (Одесса, 2009), а также на семинарах в Институте математики им. С.Л. Соболева СОРАН и его Омском филиале, Омском государственном университете им. Ф.М. Достоевского, Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, три из них в рецензируемых изданиях из списка ВАК.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 131 наименования. Общий объем работы – 101 страница, включая 9 рисунков и 13 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении формулируются цель и задача исследования, обосновывается актуальность выбранной темы, приводится обзор известных результатов, посвященных рассматриваемой задаче и кратко излагается содержание диссертационной работы.

В первой главе диссертации приводится комбинаторная постановка задачи, вводятся необходимые понятия и обозначения полиэдральной теории, строится соответствующая задача целочисленного линейного программирования.

В параграфе 1.1 введены основные понятия полиэдральной теории. Многогранником будем называть выпуклую оболочку конечного множества точек в евклидовом пространстве, полиэдром – множество решений конечной системы линейных уравнений и неравенств, если оно ограничено. Полиэдр, содержащий многогранник, будем называть полиэдральной релаксацией последнего. Линейное неравенство называется правильным для многогранника, если он целиком содержится в замкнутом полупространстве, индуцированном этим неравенством.

Множество расписаний, рассматриваемых в диссертации, имеют следующую содержательную постановку. Требования множества V, $|V| = n$, обслуживаются m параллельными идентичными приборами. Все требования поступают в очередь на обслуживание одновременно (в момент времени $k = 0$) и имеют одинаковые (равные 1) длительности обслуживания. Запрещены прерывания в обслуживании требований. На множестве V задано отношение частичного порядка $\lessdot$, определяющее условия предшествования в обслуживании требований. Всякий порядок обслуживания требований на множестве V, допустимый относительно частичного порядка $\lessdot$, называется допустимым расписанием или, просто, расписанием. Мы рассматриваем расписания, в которых все работы должны быть завершены к моменту времени d. При этом очевидно, что если d будет слишком мало, то множество определенных выше расписаний может оказаться пустым.

Это множество расписаний допускает следующую формализацию. Расписанием называется функция $\sigma : V \to D = \{1, 2, \dots d\}$, такая, что

- соотношение $i \lessdot j$ влечет неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$;
- для любого $k \in D$ имеется не более m требований $i \in V$, таких, что $\sigma(i) = k$.

Множество расписаний, определенных данными условиями, обозначим через Σ_d. Заметим, что если $d < d'$, то $\Sigma_d \subset \Sigma_{d'}$ (при этом полагаем, что пустое множество является подмножеством любого множества). Задача заключается в минимизации общего времени обслуживания всех требований, то есть

$$\max_{i \in V} \sigma(i) \to \min_{\sigma \in \Sigma_d}. \tag{1}$$

В параграфе 1.2 построена полиэдральная релаксация $\mathbf{M}_d \subset \mathbf{R}^{nd}$ многогранника $\mathbf{M}_Z$, соответствующего множеству Σ_d.

Пусть $G = (V; E(G))$ – ациклический орграф, задающий порядок предшествования на множестве требований V.

Расписанию $\sigma \in \Sigma_d$ сопоставим его вектор инциденций $x^\sigma = (x^\sigma_{ik},\ i \in V,\ k \in D) \in \mathbf{R}^{nd}$ по правилу:

$$x^\sigma_{ik} = \begin{cases} 1, & \sigma(i) = k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Для каждой вершины $i \in V$ определим две константы:
$p_i = \max\{|P_i| + 1, \lceil \frac{|\mathcal{U}_i|}{m} + 1 \rceil\}$, где P_i – максимальный путь из вершинной базы графа G в вершину i, $\mathcal{U}_i$ – множество всех предков вершины i;
$q_i = \max\{|Q_i| + 1, \lceil \frac{|\mathcal{W}_i|}{m} \rceil\}$, где Q_i – максимальный путь из вершины i в вершинную антибазу графа G, $\mathcal{W}_i$ – множество всех потомков вершины i.
Определим множества $D_i = \{p_i,\ p_i + 1,\ p_i + 2,\ \ldots,\ d - q_i\}$ для каждой $i \in V$ и $V_k = \{i \in V | k \in D_i\}$ для каждого $k \in D$. Зададим полиэдр $\mathbf{M}_d \subset \mathbf{R}^{nd}$ как множество решений системы линейных уравнений и неравенств:

$$\sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1,\ i \in V; \tag{3}$$

$$\sum_{i \in V_k} x_{ik} \le m,\ k \in D; \tag{4}$$

$$x_{ik} \le \sum_{l \in D_j,\, l > k} x_{jl},\ (i, j) \in E(G),\ k \in D_i; \tag{5}$$

$$0 \le x_{ik} \le 1,\ i \in V,\ k \in D_i; \tag{6}$$

$$x_{ik} = 0,\ i \in V,\ k \in D \setminus D_i. \tag{7}$$

Ограничения (3) означают, что каждое требование обслуживается ровно одним прибором. Ограничения (4) гарантируют, что одновременно могут обслуживаться не более m требований. Выполнение условий предшествования обеспечивается ограничениями (5). Ограничения (7) отбрасывают заведомо недопустимую область обслуживания требования i.

Теорема 1.1. *Целочисленные точки полиэдра (3)–(7) и только они являются расписаниями в смысле соотношения (2).*

Таким образом,

$$\mathbf{M}_Z = conv\{x^\sigma | \sigma \in \Sigma_d\} = conv(\mathbf{M}_d \cap \mathbf{Z}^{nd}).$$

Важным свойством релаксации $\mathbf{M}_d$ является то, что она не содержит "лишних" целочисленных точек, не являющихся векторами инциденций расписаний или, что то же, множество векторов инциденций расписаний является множеством целочисленных решений системы (3)–(7).

В параграфе 1.3 задача (1) рассматривается как задача целочисленного линейного программирования на полиэдре $\mathbf{M}_d$ с целевой функцией вида

$$h(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \sum_{i \in V_k} x_{ik} \to \min_{x \in M_d}, \tag{8}$$

при этом, $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll \ldots \ll \lambda_d$.
Условия на λ_k, при которых оптимальное решение задачи (8) соответствует оптимальному решению задачи (1) (возможно, не однозначно), определяются теоремами 1.2 и 1.3.

Теорема 1.2. *Пусть* $m \sum\limits_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \leq \lambda_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, d-1$, $\sigma_* \in \Sigma_d$ *– оптимальное решение задачи* (1), $\sigma \in \Sigma_d$. *Тогда, если* $h(x^\sigma) < h(x^{\sigma_*})$, *то* $\max\limits_{i \in V} \sigma(i) = \max\limits_{i \in V} \sigma_*(i)$.

Теорема 1.3. *Пусть* $m \sum\limits_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \leq \lambda_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, d-1$, $x^{\sigma_*} \in \mathbf{M}_Z$ *– оптимальное решение задачи* (8). *Тогда для любого* $x^\sigma \in \mathbf{M}_Z$ *имеем* $\max\limits_{i \in V} \sigma(i) \geq \max\limits_{i \in V} \sigma_*(i)$.

Теорема 1.3 позволяет искать решения задачи (1) методами целочисленного линейного программирования. Однако, в силу теоремы 1.2, решение рассматриваемой задачи в постановке (8) может оказаться более трудоемким, чем в постановке (1).

В параграфе 1.4 получено достаточное условие непустоты множества Σ_d.

Теорема 1.4. *Пусть* $B_1, B_2, \ldots, B_t$ *– разбиение множества вершин орграфа* G *на базы. Если* $d \geq \sum\limits_{p=1}^{t} \lceil \frac{|B_p|}{m} \rceil$, *то множество* Σ_d *не пусто.*

Кроме того, в параграфе 1.4 рассматривается следующая задача: найти такие вещественные неотрицательные функции $\varphi(G, m)$ и $\psi(G, m)$, что $\varphi(G, m) \le d_{\min} \le \psi(G, m)$. Наличие этих оценок позволяет сократить перебор при использовании метода дихотомии (см. далее параграф 3.2). Наличие верхней оценки, позволяет понизить размерность задачи в смысле постановки (8). Определим для орграфа G следующие характеристики:
$|B_{\max}|$ – мощность максимальной базы орграфа G;
$|P_{\max}|$ – длина максимального по числу дуг пути в орграфе G;
$p_m = \sum\limits_{s=1}^{t} \lceil \frac{|B_s|}{m} \rceil$ – плотность орграфа G относительно m (m-плотность орграфа G).

Утверждение 1.1.
a) Если $|B_{\max}| \le m$, *то* $d_{\min} = |P_{\max}| + 1$.
b) Если $|B_{\max}| > m$, *то* $|P_{\max}| + 1 < d_{\min} < p_m$.

В целом результаты первой главы являются теоретической базой для анализа полиэдральной структуры задачи.

Во второй главе строятся классы неравенств, правильных относительно многогранника $\mathbf{M}_Z$ и исследуются их свойства. В параграфе 2.1 дано описание трех классов неравенств и доказательство их правильности. Неравенства этих классов, вообще говоря, усиливают ограничения полиэдра $\mathbf{M}_d$ в том смысле, что в $\mathbf{M}_d$ существуют точки, "отсекаемые" этими неравенствами.

Следующая теорема описывает класс правильных относительно $\mathbf{M}_Z$ неравенств, который обозначим через I.

Теорема 2.1. *Пусть* $P \subset G$ – *путь,* $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subseteq V(P)$ *и* $k \in D$. *Тогда неравенство*

$$\sum_{s=1}^{t} x_{i_s k} \le 1 \tag{9}$$

является правильным к многограннику $\mathbf{M}_Z$.

Второй класс правильных неравенств, описанный в теореме 2.2, обозначим IZ.

Теорема 2.2. *Пусть* $P \subset G$ – *путь,* $k \in D$, $1 < k < d$, $i \in V(P)$ – *вершина, предшествующая всем остальным вершинам пути* P, $z \in V(P)$

– последняя вершина в пути P. Тогда неравенство

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j\in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1 \tag{10}$$

является правильным относительно многогранника $\mathbf{M}_Z$.

Для описания третьего класса неравенств, правильных относительно многогранника $\mathbf{M}_Z$, введем необходимые определения и обозначения. Орграф H называется t-дольным, если существует такое разбиение множества его вершин на t вершинно-непересекающихся подмножеств V_1, V_2,..., V_t, что для любого $j \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$ множество $V_j \cup V_{j+1}$ индуцирует в H двудольный орграф с началами дуг в V_j и концами в V_{j+1}. Если в данном определении для любого $j \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$ множество $V_j \cup V_{j+1}$ индуцирует полный двудольный орграф, то граф H называется полным t-дольным. Через $H(V_1, V_2, \ldots, V_t; E(H))$ будем обозначать полный t-дольный орграф. Следующая теорема описывает третий класс правильных относительно $\mathbf{M}_Z$ неравенств.

Теорема 2.3. *Пусть $H(V_1, V_2, \ldots, V_t; E(H))$ – полный t-дольный ациклический орграф в G, $k \in D$. Тогда неравенство*

$$\sum_{i\in V_1}\sum_{l=k}^{d} x_{il} + \sum_{j=2}^{t-1}\sum_{i\in V_j} x_{ik} + \sum_{i\in V_t}\sum_{l=1}^{k} x_{il} \leq \max_{j=\overline{1,t}}(|V_j|) \tag{11}$$

является правильным относительно $\mathbf{M}_Z$.

В работе показано, что построенные неравенства могут служить отсечениями в соответствующих алгоритмах.

В параграфе 2.2 получены достаточные условия, при которых построенные неравенства являются опорными к многограннику $\mathbf{M}_Z$, то есть существуют вершины в $\mathbf{M}_Z$, на которых неравенства выполняются как равенства.

В параграфе 2.3 в каждом из построенных классов выделен подкласс наиболее "сильных" неравенств.

Будем говорить, что неравенство $ax \leq a_0$ не сильнее неравенства $bx \leq b_0$ относительно $\mathbf{M}_d$, если $\{x \in \mathbf{M}_d \mid ax > a_0\} \subseteq \{x \in \mathbf{M}_d \mid bx > b_0\}$.

Утверждение 2.1. *Пусть $P_1, P_2 \subset G$ – пути и $V(P_1) \subset V(P_2)$. Тогда для любого $k \in D$ неравенство $\sum\limits_{j\in V(P_1)} x_{jk} \leq 1$ не сильнее неравенства*

$\sum\limits_{j \in V(P_2)} x_{jk} \leq 1.$

Утверждение 2.2. *Пусть* $P \subset G$ *– путь,* $k \in D$*. Неравенство* $\sum\limits_{j \in V(P)} x_{jk} \leq 1$ *не сильнее неравенств*

a) $\sum\limits_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum\limits_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1$*, где* $i \in V(P)$ *– начальная вершина пути* P*;*

b) $\sum\limits_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum\limits_{l=1}^{d} x_{zl} \leq 1$*, где* $z \in V(P)$ *– последняя вершина пути* P*.*

Утверждение 2.3. *Пусть* $P \subset G$ *– путь,* $k \in D$*. Неравенство* $\sum\limits_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum\limits_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1$ *и неравенство* $\sum\limits_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum\limits_{l=1}^{d} x_{zl} \leq 1$ *не сильнее неравенства* $\sum\limits_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum\limits_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum\limits_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1$*, где* $i \in V(P)$ *– начальная вершина пути* P*,* $z \in V(P)$ *– последняя вершина пути* P*.*

В параграфе 2.4 описаны полиэдральные свойства построенных неравенств, а именно: условия их эквивалентности и условия, при которых полиэдр $\mathbf{M}_d$ целиком принадлежит соответствующей гиперплоскости.

Утверждение 2.4. *Пусть* $P \subset G$ *– путь с начальной вершиной* i *и конечной вершиной* z*,* $k \in D$*.*

Если $k < p_i$*, то полиэдр* $\mathbf{M}_d$ *целиком лежит в пересечении гиперплоскостей*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 0, \ \sum_{j \in V(P)} x_{jk} = 0, \ \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} = 1.$$

Если $k > d - q_z$*, то полиэдр* $\mathbf{M}_d$ *целиком лежит в пересечении гиперплоскостей*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 1, \ \sum_{j \in V(P)} x_{jk} = 0, \ \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} = 0.$$

Утверждение 2.5. *Пусть* $P \subset G$ *– путь с начальной вершиной* i *и конечной вершиной* z*,* $d - q_i \leq k \leq p_z$*. Тогда неравенства*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1$$

и
$$\sum_{j \in V(P)} x_{jk} \leq 1$$
эквивалентны относительно $\mathbf{M}_d$.

В параграфе 2.5 второй главы предложены алгоритмы решения задачи идентификации (Separation problem), которая заключается в следующем: в данном классе неравенств найти такое, которое отделяет заданную точку $x \in \mathbf{M}_d \setminus \mathbf{M}_Z$ от $\mathbf{M}_Z$, либо доказать, что такого неравенства нет. Для первых двух классов неравенств разработаны полиномиальные алгоритмы решения задачи идентификации трудоемкости $O(n^3)$ (теоремы 2.6 и 2.7), для третьего – предложена эвристическая процедура.

В третьей главе разработаны алгоритмы решения задачи обслуживания единичных требований с предшествованиями параллельными приборами.

В параграфе 3.1 описаны точные алгоритмы IPI и SHP решения исследуемой задачи, основанные на процедуре отсечения. В качестве отсечений используются правильные неравенства, построенные в главе 2. Каждый из алгоритмов включает в себя процедуру идентификации неравенств.

В параграфе 3.2 предложен алгоритм DMN поиска минимального d из множества таких, что Σ_d непусто. В основе этого алгоритма лежат метод дихотомии и включение $\Sigma_{d'} \subset \Sigma_d$ при $d' < d$. Алгоритм представляет собой гибрид метода дихотомии и метода отсечений.

Параграф 3.3 посвящен анализу целевой функции для задачи $Pm|prec; p_j = 1|C_{max}$, построенной в параграфе 1.3. Дело в том, что коэффициенты целевой функции имеют экспоненциальный рост, что делает затруднительным ее использование при решении задач достаточно высокой размерности. Был проведен эксперимент, в результате которого выработаны рекомендации по уменьшению характера возрастания коэффициентов с сохранением оптимальности полученного решения исходной задачи.

Кроме того, в соответствующих параграфах третьей главы проведена апробация предложенных алгоритмов. При апробации рассматривались следующие вопросы.

1) Сравнение алгоритмов отсечения, использующих построенные классы неравенств, с пакетом CPLEX по количеству отсечений и времени работы. Оказалось, что пакет CPLEX уступает алгоритму SHP по количеству отсечений и времени работы на всех рассмотренных задачах. Таким образом, разработанный в диссертации алгоритм SHP учитывает специфику и полиэдральную структуру множества расписаний обслуживания единичных требований с предшествованиями параллельными приборами и предпочти-

телен для использования при решении соответствующих оптимизационных задач.

2) Сравнение разработанных алгоритмов между собой; выделение характеристик задач, влияющих на время работы и количество построенных алгоритмами отсечений. Самыми легкими для обоих алгоритмов оказались серии задач, в которых граф предшествования между требованиями представляет собой несвязные пути или несвязные орграфы. На этих задачах алгоритму IPI понадобилось меньше времени для решения задачи. Дольше всех решались задачи, орграфы которых содержали полный двудольный подграф. На таких задачах алгоритм IPI значительно уступает алгоритму SHP по количеству отсечений и времени решения. На сериях задач с орграфами вида "входящее дерево", "выходящее дерево" и "дерево" также быстрее оказался алгоритм SHP.

3) Разработка рекомендаций по выбору коэффициентов целевой функции для задачи $Pm|prec;p_j=1|C_{max}$, предложенной в параграфе 1.3.

Наряду с целевой функцией $h(x)$, удовлетворяющей условиям

$$m\sum_{l=1}^{k}\lambda_k \le \lambda_{k+1}, k=1,2,\dots,d-1, \tag{12}$$

были рассмотрены функции вида (8) с коэффициентами построенными по законам

$$\lambda_k = f_{lin}(k) = nk,$$
$$\lambda_k = f_{sq}(k) = nk^2.$$

Введем следующие обозначения:
d_h, d_{sq}, d_{lin} – оптимальные значения целевых функций с коэффициентами λ_k вида (12), $f_{sq}(k)$ и $f_{lin}(k)$ соответственно;
d_{min} – значение, найденное алгоритмом DMN.

Точные решения задач, необходимые для анализа зависимостей f_{lin} и f_{sq}, были найдены с помощью дихотомии (алгоритм DMN, параграф 3.2). При этом в силу утверждения 1.1 в качестве начальных границ отрезка разбиения были взяты $A=|P_{max}|+1$ и $B=p_m$. Оптимальные значения целевых функций с зависимостями (3.3), f_{lin} и f_{sq} были найдены алгоритмом SHP. Во всех рассмотренных примерах d_{min} и d_{sq} совпадают. Значение d_{lin} совпало с d_{min} лишь до $n<20$. Более того, при $n\ge 90$ значение d_h не было найдено, в то время как $d_{sq}=d_{min}$. Таким образом, на задачах большой размерности для коэффициентов λ_k функции $h(x)$ целесообразно использовать $\lambda_k=nk^t$, при $t\ge 2$.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Построена модель целочисленного линейного программирования для задачи $Pm|prec; p_j = 1|C_{max}$. Получены достаточные условия на общее время обслуживания требований, гарантирующие существование расписаний. В терминах частичного порядка получены нижние и верхние оценки на минимальное время обслуживания единичных требований, позволяющие существенно ограничить размерность задачи.

2. Построены три класса неравенств, правильных относительно выпуклой оболочки векторов инциденций расписаний, найдены достаточные условия их опорности. Проведено сравнение неравенств по внутри каждого класса, приведены примеры случаев их "несравнимости". Предложены полиномиальные алгоритмы решения задачи идентификации для двух из построенных классов, для третьего – эвристическая процедура.

3. На основе построенных правильных неравенств разработаны два алгоритма отсечения для анализа полиэдральной структуры и решения задачи $Pm|prec; p_j = 1|C_{max}$. Проведена апробация, подтвердившая эффективность разработанных алгоритмов. В процессе апробации сформирован список тестовых задач высокой размерности с точными решениями.

Литература

[1] Balas E. *On the facial structure of sheduling polyhedra* // Mathematical Programming Study, 1985. N 24. – P. 179-218.

[2] Mokotoff E. *An exact algorithm for the identical parallel machine scheduling problem* // Europ. J. of Oper. Res., 2004. – V. 152. – P. 758-769.

[3] Queyranne M., Wang Y. *A cutting plane procedure for precedence-constraned single machine scheduling.* Working paper. Faculty of Commerce. University of British Columbia. Vancouver. Canada, 1991.

[4] Schulz A.S., Queyranne M. *Polyhedral Approaches to Machine Scheduling.* Berlin, 1994.

[5] Lenstra J.K., Rinnooy Kan. *Complexity of scheduling under precedence constraints* // Oper. Res., 1978. N 26. – P. 22-35.

[6] Hu T.C. *Parallel sequencing and assembly line problems* // Operation Research, 1961. N 9. – P. 841-848.

[7] Coffman E.G., Jr, Graham R.L. *Optimal scheduling of two processor systems.* Acfa Informat., 1972. N 1. – P. 200-213.

[8] Fujn M., T. Kasami, K. Ninimiya. *Optimal sequencing of two equivalent processors* // SIAM J. Appl. Math., 1969. N 17. – P. 784-789.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. *Целочисленная модель задачи минимизации общего времени обслуживания параллельными приборами единичных требований с предшествованиями* // Автоматика и телемеханика, 2010. N 10. – С. 100-106.

[2] Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. *Многогранник расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами* // Дискретный анализ и исследование операций, 2011. N 1. – С. 87-92.

[3] Уразова И.В. *Класс правильных неравенств для задачи упаковки вершин ациклического орграфа в полосу заданной ширины* // Вестник Омского университета, 2011. N2(60). – С. 48 52.

[4] Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. *Класс опорных неравенств для многогранника расписаний обслуживания единичных требований параллельными процессорами* // Математическое программирование. Труды XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения 2008. – Т. 1. – С. 530-536.

[5] Уразова И.В. *Результаты вычислительного эксперимента для одной задачи теории расписаний* // IV Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск, 2009. – С. 169.

[6] Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. *О задаче упаковки вершин ациклического орграфа в полосу фиксированной ширины* // ДОСДМ, 2010. N 9. – С. 56-59.

[7] Уразова И.В. *Варьирование директивного срока в одной задаче теории расписаний* // Материалы Российской конференции "Дискретная оптимизация и исследование операций". Новосибирск, 2010. – С. 149.

[8] Уразова И.В. *Новый класс правильных неравенств для задачи* $P_m|prec; p_j = 1|C_{max}$ // Информационный бюллетень АМП, N 12 (Тез. докл. Всеросс. конф. МпиП). Екатеринбург, Уро РАН, 2011. – С. 211-213.