

На правах рукописи

Трофимов Александр Викторович

**Теоретико-модельные свойства обогащенных булевых
алгебр и алгебр Ершова**

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск -2011

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Новосибирский государственный университет".

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук Пальчунов Дмитрий Евгеньевич.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор Морозов Андрей Сергеевич

Доктор физико-математических наук, профессор Хисамиев Назиф Гарифуллинович

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Новосибирский государственный технический университет"

Защита диссертации состоится 26 января 2012 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад.Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан 23 декабря 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Кандидат физико-математических наук

А.Н.Ряскин

Общая характеристика работы.

Тематика диссертации.

Диссертация посвящена изучению обогащенных булевых алгебр и алгебр Ершова. Исследование теоретико-модельных свойств булевых алгебр было начато в работах Тарского [22] и Ершова [6]. Они предложили элементарную классификацию булевых алгебр. В основополагающей работе Ершова [7] предложен алгебраический метод, с помощью которого удалось описать широкий класс типов изоморфизма счетных дистрибутивных решеток с относительными дополнениями, которые после этого были названы алгебрами Ершова [3]. В частности из этой работы Ершова [7] следует характеристика Кетонена [17]. Гончаровым [2] предложена классификация типов изоморфизма счетных суператомных булевых алгебр.

Исследованию теоретико-модельных свойств булевых алгебр и их обогащений посвящено достаточно много работ. Впервые булевы алгебры с выделенными идеалами были рассмотрены Ершовым [6]. В частности, в [6] было доказано, что теория булевой алгебры с выделенным идеалом разрешима по крайней мере в следующих случаях: 1) $\mathfrak{A}/I$ конечна и 2) существует $\sup\{x \mid x \in I\}$ и $\mathfrak{A}$ – атомная. Рабин доказал, что теория класса булевых алгебр с выделенным идеалом разрешима [19], Рубин доказал, что теория класса булевых алгебр с выделенной подалгеброй неразрешима [20]. Из работ Воота [25] и Рыль-Нардзевского [21] следует, что элементарная теория булевой алгебры имеет счетно-категоричную теорию тогда и только тогда, когда она содержит не более конечного числа атомов. Морозовым [10] построены примеры булевых алгебр с одним выделенным идеалом и неразрешимой теорией для любой ненулевой первой характеристики Ершова-Тарского. В работах Пальчунова [11-15, 18] было доказано, что в булевой алгебре можно выделить идеал с неразрешимой элементарной теорией тогда и только тогда, когда она не суператомная; получены критерии элементарной эквивалентности булевых алгебр с выделенными идеалами и разрешимости их элементарных

теорий; дано описание счетно-категоричных и конечно-аксиоматизируемых элементарных теорий; описана алгебра Лиденбаума-Тарского класса булевых алгебр с выделенными идеалами; доказано, что элементарные теории достаточно широкого класса булевых алгебр с выделенными идеалами не имеют простой модели, изучены теории, имеющие простые и счетно-насыщенные модели. Тураем [23, 24] предложено обогащение языка булевых алгебр с выделенными идеалами, допускающие элиминацию кванторов, изучались различные теоретико-модельные свойства булевых алгебр с выделенными идеалами. Мартьянов [9] исследовал разрешимость теорий булевых алгебр с выделенным автоморфизмом. Винокуров и Дулатова [1] доказали, что элементарная теория решеток подалгебр булевых алгебр неразрешима. Дулатова [4, 5] исследовала булевы алгебры с выделенной группой автоморфизмов, доказала неразрешимость теорий атомных булевых алгебр с выделенной атомной подалгеброй такой, что для каждого элемента алгебры существует наименьший элемент выделенной подалгебры, лежащий над ним.

Цель работы.

Целью настоящей работы является изучение теоретико-модельных свойств булевых алгебр с выделенной подалгеброй, выделенным автоморфизмом, а также исследование изоморфных типов алгебр Ершова с выделенными идеалами.

Основные результаты

1. С точностью до изоморфизма описаны счетные суператомные алгебры Ершова с выделенными идеалами, имеющие конечный ранг Фреше.
2. Получена элементарная классификация локальных суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины.
3. Показано, что автоморфизмы булевых алгебр, определяемые неподвижными элементами, – это в точности инволюции. Получено описание подалгебр булевых алгебр, которые являются множеством неподвижных элементов автоморфизма.

Новизна и научная значимость работы.

Все результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований теоретико-модельных свойств алгебр Ершова, булевых алгебр и их обогашений.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на Международной конференции «Мальцевские чтения» в 2000 году, международной конференции «Мальцевские чтения» в 2001 году, Международной конференции «Мальцевские чтения» в 2010 году. Результаты докладывались на семинарах «Конструктивные модели», «Теория вычислимости», «Алгебра и логика» и «Прикладная логика» Новосибирского государственного университета.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК, ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, где должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук [27–30].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, который содержит 30 наименований. Объем диссертации составляет 92 страницы.

Содержание диссертации.

Введение.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, изложены основные результаты диссертационной работы.

Первая глава.

Первая глава диссертации посвящена описанию типов изоморфизма счетных суператомных алгебр Ершова с выделенными идеалами. Первый параграф первой главы содержит основные определения, обозначения и предварительные результаты по алгебрам Ершова и их обогашением конечным числом идеалов.

В этой главе обогащенные идеалами алгебры Ершова рассматриваются в сигнатуре $\sigma^* = (\cup, \cap, \setminus, 0, I_1, \dots, I_\lambda)$, где $I_1, \dots, I_\lambda$ – символы унарных предикатов, выделяющие идеалы. Число λ считаем фиксированным. Алгебру Ершова с выделенными идеалами, имеющую наибольший элемент, принято называть *I-алгеброй*.

Определение 1.1.1. Пусть дано семейство *I*-алгебр $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in N}$. Тогда следующая *I*-алгебра называется ω -смешиванием *I*-алгебр $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in N}$:

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i = \left\langle \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i \mid \begin{array}{l} (\forall i \in I (f(i) \in \mathfrak{A}_i)) \& (\exists \text{конечное } K \subseteq I (\\ (\forall i \in I \setminus K (f(i) = 0^{\mathfrak{A}_i}) \vee (\forall i \in I \setminus K (f(i) = 1^{\mathfrak{A}_i}))) \end{array} \right\}, \cup, \cap, \setminus, 0, I_1, \dots, I_\lambda \right\rangle,$$

где операции $\cup, \cap, \setminus$ и предикаты $I_1, I_2, \dots, I_\lambda$ определяются покомпонентно:

$$(f \cap g)(i) = f(i) \cap g(i), (f \cup g)(i) = f(i) \cup g(i), (f \setminus g)(i) = f(i) \setminus g(i),$$

$$f \in I_s \Leftrightarrow \exists k (((\forall i \leq k) f(i) \in I_s^{\mathfrak{A}_i}) \& ((\forall j > k) (f(j) = 0))).$$

ω -степенью алгебры $\mathfrak{A}$ называется ω -смешивание счетного числа *I*-алгебр, изоморфных $\mathfrak{A}$.

Определение 1.1.2. Алгебру Ершова с выделенными идеалами $\mathfrak{A}$ назовем *неразложимой*, если из $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}$.

Для целей настоящей главы обозначим, $\mathfrak{A} < \mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{A} \times \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{M}$.

Во втором параграфе первой главы изучаются суператомные алгебры Ершова с выделенными идеалами, имеющими конечный ранг Фреше. Получены следующие результаты.

Теорема 1.2.1. Справедливы следующие утверждения:

- (1) Алгебра Ершова с выделенными идеалами, имеющая конечный ранг Фреше, однозначно (с точностью до изоморфизма) представима в виде прямого произведения конечного числа неразложимых алгебр Ершова, несравнимых по отношению $<$.
- (2) Для любого натурального числа n существует конечное число счетных неразложимых алгебр Ершова с выделенными идеалами, имеющих ординальный тип n .

(3) Любая неразложимая алгебра Еришова с выделенными идеалами, имеющая конечный ранг Фреше, является ω -степенью некоторой I-алгебры или является прямой суммой изоморфных копий некоторой неразложимой алгебры.

В третьем параграфе первой главы изучаются суператомные алгебры Еришова с выделенными идеалами, имеющие счетный ранг Фреше.

Теорема 1.3.8. Для алгебры Еришова с выделенными идеалами $\mathfrak{A}$ и α – счетного ординала следующие условия эквивалентны:

- (1) Любая алгебра Еришова с выделенными идеалами, элементарно эквивалентная $\mathfrak{A}$, ординального типа α представима в виде прямого произведения конечного числа неразложимых алгебр.
- (2) Найдется не более счетного числа попарно неизоморфных алгебр Еришова с выделенными идеалами, элементарно эквивалентных $\mathfrak{A}$, имеющих ординальный тип α .

В работе также получено описание всех элементарных теорий, для которых выполнено одно из условий выше сформулированной теоремы.

В четвертом параграфе дано определение характеристической функции ψ , при помощи которой получено описание типов изоморфизма счетных Алгебр Еришова с выделенными идеалами, которые в факторе по идеалу Фреше F_ω содержат не более одного атома.

Теорема 1.3.10. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – произвольные счетные суператомные алгебры Еришова с выделенными идеалами, ординальный тип которых равен ω . Предположим, что $\mathfrak{A}/F_\omega(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}/F_\omega(\mathfrak{B})$ содержат не более одного атома. Тогда если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются одновременно булевыми алгебрами или специальными алгебрами Еришова, то $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда совпадают характеристические функции $\psi_{\mathfrak{A}} = \psi_{\mathfrak{B}}$.

Вторая глава.

Глава вторая посвящена изучению элементарных теорий суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй. Первый параграф второй главы содержит предварительные результаты.

Булевы алгебры будем рассматривать в сигнатуре $\sigma = \langle \wedge, \cup, C, 0, 1 \rangle$. Пусть $\sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \cup \{P\}$, где P символ унарного предиката. Алгебраическую систему $\mathcal{A}$ сигнатуры σ^* будем называть *булевой алгеброй с выделенной подалгеброй*, если множество $P^{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models P(a)\}$ определяет подалгебру в булевой алгебре $\mathcal{A}|_{\sigma}$.

Определение 2.1.4. Подалгебру $\mathcal{B}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ назовем *плотной*, если $\mathcal{A} = \text{sub}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, F(\mathcal{A}))$ – наименьшая подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, содержащая в себе подалгебру $\mathcal{B}$ и идеал Фреше $F(\mathcal{A})$.

Определение 2.1.5. Подалгебру $\mathcal{B}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ назовем *подалгеброй ширины n* , если под любым атомом подалгебры $\mathcal{B}$ найдется не более n атомов алгебры $\mathcal{A}$, лежащих под ним, и любой атом алгебры $\mathcal{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathcal{B}$.

Определение 2.1.8. Алгебраическую систему $\mathcal{A}$ назовем *неисчезающей*, если из $\mathcal{A} \equiv \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ следует $\mathcal{A} \equiv \mathcal{M}$ или $\mathcal{A} \equiv \mathcal{N}$. Обозначим $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, если найдется $\mathcal{C}$ такая, что $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \times \mathcal{C}$.

Определение 2.1.9. Алгебраическую систему $\mathcal{A}$ назовем *локальной*, если существует не более конечного числа элементарно неэквивалентных неисчезающих алгебраических систем $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, т.е. найдутся $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ такие, что если $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – неисчезающая, то $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_i$ для некоторого $i \leq k$.

Для каждого $n \in N$ определим следующий класс:

$$K_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ – суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй ширины } n\}$$

Далее зафиксируем число $n \in N$ и будем рассматривать булевы алгебры с выделенной подалгеброй только из K_n .

Во втором параграфе второй главы построена последовательность формул $T_k(x)$ $k \in N$, языка σ^* с одной свободной переменной и при ее помощи для каждой алгебры $\mathfrak{A} \in K_n$ определена характеристическая функция $w_{\mathfrak{A}} : N \rightarrow N \cup \{\infty\}$. Значение функции $w_{\mathfrak{A}}(k)$ есть количество непересекающихся элементов алгебры $\mathfrak{A}$, на которых истина формула $T_k(x)$. Сформулирован и доказан ряд свойств построенной последовательности формул и характеристической функции. В четвертом параграфе дано синтаксическое описание всех реализуемых характеристических функций.

Первый результат настоящей главы определяет необходимое и достаточное условие локальности алгебры в классе K_n .

Теорема 2.3.14. *Для того чтобы булева алгебра с выделенной подалгеброй $\mathfrak{A} \in K_n$ была локальной необходимо и достаточно, чтобы множество $M(\mathfrak{A}) = \{n | w_{\mathfrak{A}}(n) \neq 0\}$ было конечным.*

Следующий результат дает описание элементарной эквивалентности локальных алгебр.

Теорема 2.3.15. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ произвольные локальные булевы алгебры с выделенными подалгебрами, принадлежащими классу K_n . Тогда, для того чтобы $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ необходимо и достаточно, чтобы $w_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{B}}$.*

Булеву алгебру с выделенной подалгеброй $\mathfrak{A}$ назовем k -простой, если $\mathfrak{A} \models \exists x T_k(x)$ и для любого натурального числа l из $\mathfrak{A} \models \exists x T_l(x)$ следует, что на классе K_n истинно предложение $T_k(x) \rightarrow (\exists y \leq x) T_l(y)$.

Завершает параграф следующая теорема.

Теорема 2.3.17. *Пусть $\mathfrak{A}$ – локальная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу K_n . Тогда $\mathfrak{A}$ – неисчезающая тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ – k -простая и либо $\mathfrak{A} \models T_k(1)$, либо $w_{\mathfrak{A}}(k) = \infty$.*

Четвертый параграф третьей главы дает описание всех характеристических функций. Для этой цели синтаксически определяется естественная функция и доказывается следующая

Теорема 2.4.1. *Функция $w: N \rightarrow N \cup \{\infty\}$ – естественна тогда и только тогда, когда найдется алгебраическая система $\mathfrak{M} \in K_n$ такая, что $w = w_{\mathfrak{M}}$.*

Третья глава.

Третья глава диссертации посвящена изучению автоморфизмов, определяемых неподвижными элементами, и подалгебр, которые являются множеством неподвижных элементов некоторого автоморфизма.

Первый параграф третьей главы содержит постановку задачи.

Определение 3.1.1. Пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра и $f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ – ее автоморфизм. Обозначим: $X_f = \{a \in \mathfrak{A} \mid f(a) = a\}$ – множество неподвижных элементов автоморфизма f . Подалгебру булевой алгебры $\mathfrak{A}$, основным множеством которой является множество неподвижных элементов X_f , будем называть неподвижной подалгеброй автоморфизма f ; для простоты эту подалгебру также будем обозначать через X_f . Будем говорить, что автоморфизм f *определяется неподвижными элементами*, если для любого автоморфизма $g: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ из $X_f = X_g$ следует $f = g$.

Очевидно, что автоморфизм однозначно определяет подалгебру своих неподвижных элементов. Естественным образом возникает обратный вопрос:

Вопрос 1. *В каком случае по подалгебре однозначно восстанавливается автоморфизм, множеством неподвижных элементов которого она является. Иными словами, какие подалгебры булевых алгебр являются неподвижными подалгебрами автоморфизмов, определяемых неподвижными элементами.*

Этот вопрос был поставлен С.С.Гончаровым.

Вопрос 2. *Какие автоморфизмы булевых алгебр определяются своими неподвижными элементами.*

Следующая теорема дает полный ответ на первый вопрос.

Теорема 3.1.2. *Подалгебра B булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является неподвижной подалгеброй некоторого автоморфизма, определяемого неподвижными элементами, тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{для любого } a \in \mathfrak{A} \text{ найдутся } b, c, d \in \mathfrak{A} \text{ такие, что:} \\ P1. (a = b \cup c) \& (b \cap c = 0) \& (a \cap d = 0) \& (c, b \cup d \in B) \\ P2. (\forall e \leq b)(e \neq 0 \rightarrow e \notin B) \\ P3. (\forall p \leq d)(p \neq 0 \rightarrow p \notin B) \\ P4. (\forall e \leq b)(\exists p \leq d)(e \cup p \in B) \\ P5. (\forall p \leq d)(\exists e \leq b)(e \cup p \in B) \end{array} \right.$$

Следствие 3.1.3. $K = \{(\mathfrak{A}, X_f) \mid f \text{ определяется неподвижными элементами}\}$ – конечно-аксиоматизируемый класс.

Следующая теорема дает описание всех автоморфизмов булевых алгебр, определяемых своими неподвижными элементами, тем самым дает ответ на второй вопрос.

Теорема 3.1.4. *Аutomорфизм f алгебры определяется неподвижными элементами тогда и только тогда, когда $f = f^{-1}$ (или, что то же самое, когда $f^2 = id$).*

Второй параграф третьей главы содержит доказательство результатов, сформулированных в первом параграфе третьей главы. Третий параграф содержит следствия результатов, сформулированных в первом параграфе настоящей главы.

Следствие 3.3.1. *Каждая булева алгебра изоморфна неподвижной подалгебре некоторого автоморфизма, определяемого неподвижными элементами.*

Теорема 3.3.2. Для атомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ и автоморфизма f следующие условия эквивалентны:

- 1) f определяется неподвижными элементами;
- 2) $f = f^{-1}$;
- 3) X_f является подалгеброй ширины 2.

Предложение 3.3.3. Существует счётная суператомная булева алгебра $\mathfrak{A}$ с выделенной подалгеброй B ширины 2 такая, что $B \neq X_f$ для любого автоморфизма f булевой алгебры $\mathfrak{A}$.

Предложение 3.3.4. Каждая плотная подалгебра конечной ширины атомной булевой алгебры является неподвижной подалгеброй некоторого автоморфизма. В частности, выделенная подалгебра любой алгебры из K_n является неподвижной подалгеброй некоторого автоморфизма.

Следствие 3.3.5. Выделенная подалгебра алгебры $\mathfrak{A} \in K_n$ является неподвижной подалгеброй некоторого автоморфизма, определяемого неподвижными элементами, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \in K_2$.

Список литературы:

1. Винокуров С.Ф., Дулатова З.А. О решетках подалгебр булевых алгебр. 17 Всесоюз. алгебраическая конф., Минск, 39-40, 1983.
2. Гончаров С.С. Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр. Алгебра и логика, 12, No 6, 853-858, 1976.
3. Гончаров С.С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск. Научная книга, 356 с., 1996.
4. Дулатова З.А. Расширенные теории булевых алгебр. Сиб. мат. журн., 25, No 1, 201-204, 1984.
5. Дулатова З.А. Булевы алгебры с выделенной локально-конечной группой автоморфизмов. 8 всесоюз. конф. по мат. Логике, Москва, 62, 1986.
6. Ершов Ю.Л. Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров. Алгебра и логика, 3, No 3, 17-38, 1964.
7. Ершов Ю.Л. Дистрибутивные решетки с относительными дополнениями. Алгебра и логика, 18, No 6, 680-722, 1979.
8. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. Москва. Наука, 1987.
9. Мартьянов В.И. Неразрешимость теории булевых алгебр с автоморфизмом. Сиб.мат.журн., 23, No 3, 147-154, 1982.
10. Морозов А.С. О разрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом. Сиб. мат. журн., 23, No 1, 199-201, 1982.
11. Пальчунов Д.Е. О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенными идеалами. Алгебра и логика, 25, No 4, 326-346, 1986.
12. Пальчунов Д.Е. Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами. Алгебра и логика, 26, No 4, 121-135, 1987.
13. Пальчунов Д.Е. Простые и счетно насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами. Труды института математики СО РАН, 25, 82-103, 1993.

14. Пальчунов Д.Е. Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели. Труды института математики СО РАН, 25, 104-132, 1993.
15. Пальчунов Д.Е. Алгебра Лиденбаума-Тарского класса булевых алгебр с выделенными идеалами. Алгебра и логика, 33, No 2, 179-210, 1994.
16. Jurie P.-F. Touraille A. Ideaux elementairement equivalents dans une algebre booleenne. C.R.Acad. Sci. Paris, Ser.Math., 299, No 10, 415-418, 1984.
17. Ketonen J. The structure of countable Boolean algebras. Ann of Math., 108, No 1, 41-89, 1978.
18. Pal'chunov D.E. Countably categorical Boolean algebras with distinguished ideals. Studia Logica, 46, No 2, 121-135, 1987.
19. Rabin M. Decidability of the second order theories and automata on infinity trees, Trans. Amer. Math. Soc., No 141, 1-35, 1969.
20. Rubin M. The theory of Boolean algebras with a distinguished subalgebra is undecidable. Ann. Sci. Univ. Clermont 60, Math., 13, 129-134, 1976.
21. Ryll-Nardzewski C. On the categoricity in power $\aleph_0$. Bull. Acad. Polon. Sci. - Ser. Sci. Math. Astron. Phys., 7, 545-548, 1959.
22. Tarski A. Arithmetical classes and types of Boolean algebras. Bull. Amer. Math. Soc., 55, 63, 1949.
23. Touraille A. Elimination des quantificateurs dans la theorie elementaire des algebres de Boole munies d'une famille d'ideaux distingues. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. Math., 300, No 5, 125-128, 1985.
24. Touraille A. Theories d'algebres de Boole munies d'ideaux distingues. I: Theories elementaires. J. Symbolic Logic, 52, No 4, 1027-1043, 1987.
25. Vaught R. Topics in the Theory of Arithmetical Classes and Boolean Algebras. Doctoral Thesis, University of California, Berkeley, 1954.

Работы автора по теме диссертации.

26. Трофимов А.В. Типы изоморфизма суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом. Вычислительные системы, 156, 123-147, 1996
27. Trofimov A.V. Isomorphy types of superatomic Boolean algebras with one distinguished ideal. SibAM, 7, No 4, 79-96, 1998.
28. Трофимов А.В. Типы изоморфизма обогащенных суператомных алгебр Ершова. Математические труды, 3, No 2, 182-201, 2000.
29. Пальчунов Д.Е., Трофимов А.В. Локальные и неисчезающие суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй. Алгебра и логика, 50, No 6, 2011.
30. Д.Е.Пальчунов А.В.Трофимов. Автоморфизмы булевых алгебр, определяемые неподвижными элементами. ДАН, 442, No 3, 2012.