На правах рукописи

Толстых Владимир Александрович

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ ГРУПП БЕСКОНЕЧНОГО РАНГА

01.01.06 — математическая логика,

алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Кемерово-2006

Работа выполнена в Кемеровском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

Левчук Владимир Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор

Морозов Андрей Сергеевич

доктор физико-математических наук, профессор

Романьков Виталий Анатольевич

Ведущая организация:

Институт математики им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 23 марта 2007 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан февраля 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В работе исследуются алгебраические и теоретико-модельные свойства групп автоморфизмов относительно свободных групп бесконечного ранга.

Роль групп автоморфизмов структур хорошо известна. Автоморфизмы дают ценную информацию для изучения структур, выявляя их симметрии и позволяя понять их строение. Важную роль при этом играют подмножества структур (или, шире, отношения на структурах), инвариантные относительно всех автоморфизмов структуры. При изучении таких отношений теория групп часто вступает в плодотворное взаимодействие с теорией моделей. В частности, свойства семейства всех подмножеств данной структуры, определимых в логике первого порядка без параметров, — очевидным образом инвариантных относительно всех автоморфизмов, — определяют во многих важных случаях свойства и строение этой структуры [**2, 31, 46**].

Классификация изоморфизмов (автоморфизмов) для основных типов линейных групп над телами, полученная в классических работах Ж. Дьедонне, К. Риккарта и других авторов, обусловила появление важной работы Л.-К. Хуа и И. Райнера [**33**] 1951 года, в которой было найдено описание автоморфизмов групп автоморфизмов свободных абелевых групп конечного ранга (унимодулярных групп $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$).

Новые результаты об автоморфизмах групп автоморфизмов относительно свободных групп появились только примерно через четверть века после выхода работы Л.-К. Хуа и И. Райнера. Появлению этих результатов способствовал ряд гипотез Г. Баумслага о башнях автоморфизмов групп, предложенных в начале семидесятых. В частности, он сформулировал гипотезу о том, что башня автоморфизмов свободной группы конечного ранга должна быть очень короткой и, пожалуй, наиболее известную (и до сих пор ни подтвержденную, ни опровергнутую) гипотезу о том, что башня автоморфизмов всякой нильпотентной группы без кручения должна обрываться после конечного числа шагов [**3**, проблема 4.9]. (Заметим, что мы допускаем, как это принято в последнее время, построение башни автоморфизмов над любой группой, а не только над группой без центра, как того требует классическое определение.)

В серии работ [**23, 24, 25, 26**], написанных в середине семидесятых, Дж. Дайер и Э. Форманек подтвердили некоторые из гипотез Г. Баумслага и описали башни автоморфизмов для достаточно большого класса конечно порожденных относительно свободных групп. Выяснилось, к примеру, что башня автоморфизмов неабелевой свободной группы F конечного ранга является настолько короткой, насколько это вообще возможно, поскольку, как показали Дж. Дайер и Э. Форманек в работе [**23**], группа $\mathrm{Aut}(F)$ является совершенной, и потому группы $\mathrm{Aut}(F)$ и $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F))$ изоморфны. (Напомним, что группа G называется *совершенной*, если ее центр тривиален, и все ее автоморфизмы — внутренние). Ключевой результат работы [**23**] — это утверждение о характеристичности подгруппы $\mathrm{Inn}(F)$ внутренних автоморфизмов (сопряжений) в группе $\mathrm{Aut}(F)$.

Изучая частный случай вышеприведенной гипотезы Баумслага о башнях автоморфизмов нильпотентных групп без кручения, Дж. Дайер и Э. Форманек [**24**] установили, что группа автоморфизмов свободной нильпотентной группы ступени два, имеющей конечный ранг $r \geqslant 2$, является совершенной за исключением случая, когда $r = 3$; в последнем случае высота соответствующей башни автоморфизмов равна 2.

В работе [**26**] Дж. Дайер и Э. Форманек изучали автоморфизмы групп автоморфизмов групп вида F/R, где R — характеристическая подгруппа неабелевой свободной группы F конечного ранга. Один из наиболее общих результатов работы [**26**] говорит о том, что если фактор-группа F/R, где R — характеристическая подгруппа группы F, аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, то группа автоморфизмов фактор-группы F/R', где R' — коммутант группы R, является совершенной. В частности, группа автоморфизмов каждой неабелевой свободной разрешимой группы конечного ранга является совершенной.

В 1991 Э. Форманек [**29**] усилил результат из работы [**23**], указав явным образом причину того, что подгруппа $\mathrm{Inn}(F)$ является характеристической подгруппой группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$ неабелевой свободной группы F конечного ранга: ключевой результат работы [**29**] гласит, что $\mathrm{Inn}(F)$ — это единственная свободная нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(F)$, ранг которой совпадает с рангом группы F. Еще одно доказательство совершенности группы $\mathrm{Aut}(F)$, найденное в том же году Д. Г. Храмцовым [**8**], основывалось на полученной им классификации конечных групп, реализуемых как подгруппы групп автоморфизмов конечно порожденных свободных групп [**6, 7**]. Кроме того, Д. Г. Храмцов показал, что и группа $\mathrm{Out}(F)$ внешних автоморфизмов группы F является совершенной при условии, что $\operatorname{rank} F \geqslant 3$.

М. Брайдсон и К. Фогтманн [**13**] передоказали в 2000 году результат Д. Г. Храмцова о совершенности группы $\mathrm{Out}(F)$, где F — неабелева свободная группа конечного ранга $\geqslant 3$, и предложили еще одно (четвертое по счету) доказательство совершенности группы автоморфизмов неабелевой свободной группы конечного ранга. Доказательство, данное в работе [**13**], использовало действие группы $\mathrm{Out}(F)$ на так называемом внешнем пространстве (outer space), специальном и очень полезном для приложений комбинаторном объекте, введенном К. Фогтманн и М. Каллером в работе [**18**].

В диссертации М. Кассабова [**34**] (2003 год) показывается, что башни автоморфизмов свободных нильпотентных групп конечного ранга обрываются после конечного числа шагов, и, тем самым, для этих групп подтверждается вторая из указанных нами гипотез Г. Баумслага. Например, если N — свободная нильпотентная группа конечного ранга такая, что группа $\mathrm{Aut}(N)$ имеет тривиальный центр, то башня автоморфизмов группы N имеет высоту не превосходящую 3. Основная идея работы М. Кассабова заключается во вложении каждого этажа соответствующей башни автоморфизмов в качестве решетки в подходящую группу Ли. Это позволило ему свести задачу об описании башни автоморфизмов свободной нильпотентной группы к задаче об описании башни производных некоторой свободной нильпотентной алгебры Ли.

Результаты М. Кассабова были стимулированы важной работой Э. Форманека [**28**], описавшим центры групп автоморфизмов свободных нильпотентных групп конечного ранга.

Во всех цитированных выше статьях об автоморфизмах групп автоморфизмов относительно свободных групп конечного ранга условие конечности ранга существенно: например, при использовании действия автоморфизмов на порождающих, как в работах [**8, 13, 23, 24**], или при использовании результата Л.-К. Хуа и И. Райнера, опирающегося на матричную технику, как в работах [**23, 24, 25, 26, 29**]. Представляется, тем не менее, целесообразным перенесение этих результатов на группы автоморфизмов относительно свободных групп бесконечного ранга.

В начале семидесятых широкое внимание логиков привлек вопрос Дж. Исбелла о классификации бесконечных симметрических групп с точностью до элементарной эквивалентности. Обобщив результаты, полученные рядом авторов, С. Шелах [**41, 42**] дал окончательное решение этой проблемы. Для пояснения формулировок результатов из работы [**41**] нам потребуется следующее определение.

Пусть $\{T_i^0 : i \in \mathbf{I}\}$ и $\{T_i^1 : i \in \mathbf{I}\}$ — семейства теорий в логиках $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$, соответственно. Говорят, что теория T_i^0 *синтаксически интерпретируется* в теории T_i^1 *равномерно* (*единообразно*) *по* $i \in \mathbf{I}$, если существует отображение * множества всех $\mathcal{L}_0$-предложений во множество всех $\mathcal{L}_1$-предложений такое, что для каждого $\mathcal{L}_0$-предложения χ и для каждого $i \in \mathbf{I}$, $\chi \in T_i^0$, если и только если $\chi^* \in T_i^1$ [**2, 14, 31**]. Если, дополнительно, теория T_i^1 синтаксически интерпретируется в теории T_i^0 равномерно по $i \in \mathbf{I}$, то теории T_i^0, T_i^1 называют *взаимно синтаксически интерпретируемыми равномерно по* $i \in \mathbf{I}$. В случае, если для всех $i \in \mathbf{I}$ имеем, что $T_i^0 = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_0)$ и $T_i^1 = \mathrm{Th}(\mathcal{N}_i, \mathcal{L}_1)$, где $\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$ — некоторые структуры, то естественным достаточным условием для равномерной синтаксической интерпретируемости теории T_i^0 в теории T_i^1 является равномерная интерпретируемость структуры $\mathcal{M}_i$ в структуре $\mathcal{N}_i$ средствами логики $\mathcal{L}_1$ [**2, 14, 31**]. Фактически, для равномерной интерпретируемости теории T_i^0 в теории T_i^1 достаточно более слабое условие равномерной интерпретируемости структуры $\mathcal{M}_i$ в структуре $\mathcal{N}_i$ с $\mathcal{L}_1$-определимыми параметрами. В обоих случаях имеем, что для всех $i, j \in \mathbf{I}$ условие $\mathcal{N}_i \equiv_{\mathcal{L}_1} \mathcal{N}_j$ влечет условие $\mathcal{M}_i \equiv_{\mathcal{L}_0} \mathcal{M}_j$.

С. Шелах [**41**] показал, что элементарная теория симметрической группы $\mathrm{Sym}(\aleph_\alpha)$ над кардиналом $\aleph_\alpha$ взаимно синтаксически интерпретируема с теорией двухсортной структуры $\langle \alpha, \lambda_\alpha; < \rangle$ в логике $\mathbf{L}_2((2^{\aleph_0})^+)$ равномерно по α, где λ_α — кардинал $\min(\aleph_\alpha, 2^{\aleph_0})$, рассматриваемый как множество без структуры, а $<$ — отношение полного порядка ординала α. Здесь логика $\mathbf{L}_2(\varkappa^+)$, где $\varkappa$ — некоторый кардинал, — фрагмент полной логики второго порядка, допускающий квантификацию по отношениям мощности не выше $\varkappa$. Результат из работы [**41**] резко контрастирует с известным результатом М. Рабина [**39**], утверждающим что элементарная теория полугруппы $\mathrm{End}(\aleph_\alpha)$ всех отображений кардинала $\aleph_\alpha$ в себя взаимно синтаксически интерпретируема с теорией $\mathrm{Th}_2(\aleph_\alpha)$ — теорией кардинала $\aleph_\alpha$, рассматриваемого как множество без структуры, в полной логике второго порядка $\mathbf{L}_2$. Неформально, сравнивая результаты Рабина и Шелаха, можно сказать, что выразительная сила элементарной теории полугруппы $\mathrm{End}(\aleph_\alpha)$ существенно превосходит выразительную силу элементарной теории группы $\mathrm{Sym}(\aleph_\alpha)$.

Работа [**41**] послужила для С. Шелаха отправной точкой для ряда важных работ. Одна из них — работа [**43**] 1976 года — может рассматриваться как значительное обобщение упомянутого выше результата М. Рабина на полугруппы эндоморфизмов свободных объектов в многообразиях алгебр. Пусть $F_\varkappa = F_\varkappa(\mathfrak{V})$ — свободная алгебра бесконечного ранга $\varkappa$ из многообразия алгебр $\mathfrak{V}$ в языке L. Тогда, если $\varkappa > |L|$, то элементарная теория полугруппы эндоморфизмов алгебры $F_\varkappa$ синтаксически интерпретирует теорию кардинала $\varkappa$, рассматриваемого как множество без структуры, в полной логике второго порядка [**43**].

С. Шелах замечает в работе [**43**], что естественно изучать вопрос о том, когда выразительная сила элементарной теории *группы автоморфизмов* свободной алгебры $F_\varkappa$ сравнима с выразительной силой элементарной теории ее полугруппы эндоморфизмов. Через более чем двадцать лет С. Шелах вновь вернулся к этому вопросу, включив его в список проблем в обзоре [**45**, проблема 3.14], и предложив описать многообразия алгебр $\mathfrak{V}$, группы автоморфизмов свободных алгебр $F_\varkappa(\mathfrak{V})$ которых интерпретируют средствами логики первого порядка теорию $\mathrm{Th}_2(\varkappa)$ кардинала $\varkappa$ в полной логике второго порядка для всех (или, возможно, для всех достаточно «больших») бесконечных кардиналов $\varkappa$. Конечно, ситуация с группами автоморфизмов свободных алгебр выглядит гораздо более сложной, ибо, несмотря на то, что полугруппы автоморфизмов свободных алгебр могут быть исключительно сложными, они, все же, если сформулировать существо результатов С. Шелаха из работы **[43]** предельно кратко, являются «комбинаторными» объектами. Никаких более или менее общих результатов по проблеме С. Шелаха нет. В работе **[45]** С. Шелах набрасывает схему изучения проблемы для класса многообразий, который он называет классом Aut-разложимых многообразий. Предполагается, что группы автоморфизмов свободных алгебр бесконечного ранга из этих многообразий ведут себя во многом так же, как и бесконечные симметрические группы.

В своей кандидатской диссертации **[5]** автор нашел решение проблемы С. Шелаха для многообразий векторных пространств над телами. Пусть V — векторное пространство бесконечной размерности $\varkappa$ над телом D. Тогда, если $\varkappa \geqslant |D|$, то элементарная теория группы $\mathrm{GL}(V)$ взаимно синтаксически интерпретируема с теорией двухсортной структуры $\langle \varkappa, D \rangle$, основными отношениями которой являются только основные отношения тела D, в полной логике второго порядка. Заметим, что если D — поле, то элементарная теория группы $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(\varkappa, D)$ синтаксически интерпретирует теорию $\mathrm{Th}_2(\dim V) = \mathrm{Th}_2(\varkappa)$ без без каких-либо ограничений на размерность векторного пространства V.

Проблема, предложенная С. Шелахом, может в более общем контексте рассматриваться как проблема классификации элементарных типов некоторых производных структур. В случае алгебр традиционно рассматриваемыми производными структурами являются полугруппы эндоморфизмов, группы автоморфизмов, решетки подалгебр, решетки конгруэнций и т.п. В ряде важных случаев выразительная сила элементарных теорий решеток подалгебр (решеток конгруэнций) свободных алгебр сравнима с выразительной силой элементарных теорий их полугрупп эндоморфизмов. Пусть, к примеру, $\mathfrak{V}$ — многообразие векторных пространств над фиксированным полем, либо многообразие всех полугрупп, либо многообразие всех коммутативных полугрупп, либо многообразие всех полурешеток. Тогда элементарная теория решетки $\mathrm{Sub}(F_\varkappa)$ подалгебр $\mathfrak{V}$-свободной алгебры $F_\varkappa$ бесконечного ранга $\varkappa$ синтаксически интерпретирует теорию $\mathrm{Th}_2(\varkappa)$. Результат для случая векторных пространств доказан О. В. Белеградеком и автором [**9**], а остальные результаты доказаны А. Г. Пинусом в работе [**4**]. Результаты из работы [**4**] были усилены в работе [**38**] А. Г. Пинуса и Г. Роуза. Проблеме элементарной эквивалентности производных структур и связанным вопросам посвящены обстоятельные обзоры Ю. М. Важенина и А. Г. Пинуса [**1**] и Е. И. Буниной и А. В. Михалева [**15**].

Напомним, что *ширина* данной группы G относительно порождающего множества S — это наименьшее натуральное число k такое, что каждый элемент группы G может быть записан в виде произведения не более k элементов из множества $S \cup S^{-1}$, или ∞, если такого k не существует.

Недавний неожиданный результат Дж. Бергмана [**11**] о бесконечных симметрических группах, а также ряд сформулированных им вопросов, стимулировал появление ряда работ о свойствах порождающих множеств групп автоморфизмов различных структур. Пусть Ω — произвольное бесконечное множество. Дж. Бергман [**11**] показал, что ширина группы $\mathrm{Sym}(\Omega)$ относительно *любого* множества порождающих конечна. Мы говорим, что данная группа G является *группой конечной ширины*, если ее ширина относительно любого множества порождающих конечна (отметим, что некоторые авторы называют группы конечной ширины группами со свойством Бергмана, группами ограниченного диаметра Кэли и т.п.).

По-видимому, первый пример бесконечной группы, имеющей конечную ширину относительно любого множества порождающих, был найден С. Шелахом в работе [**44**] 1980 года. Эта работа содержит пример несчетной группы, которая имеет ширину не более чем 240 по отношению к каждому своему порождающему множеству.

В препринте [**10**] статьи [**11**] Дж. Бергман сформулировал несколько вопросов о том, являются ли группы автоморфизмов различных классических структур группами конечной ширины. В частности, он предложил проанализировать ситуацию для группы автоморфизмов множества вещественных чисел $\mathbf{R}$ как борелевского пространства, для групп автоморфизмов однородных булевых пространств, для бесконечномерных общих линейных групп, для групп автоморфизмов свободных групп бесконечного ранга, а также для ряда других групп автоморфизмов. Более того, Дж. Бергманом была высказана общая гипотеза о том, что новые примеры групп конечной ширины могут быть найдены «среди групп автоморфизмов структур, которые могут быть ‘собраны’ из бесконечного числа копий самих себя».

Препринт Бергмана вызвал значительный интерес, и вскоре были найдены новые примеры бесконечных групп автоморфизмов, являющихся группами конечной ширины. Выяснилось, что группами конечной ширины, например, являются: группы автоморфизмов 2-транзитивных линейно упорядоченных множеств [**21**], группа автоморфизмов $\mathbf{R}$ как борелевского пространства [**20**], группы автоморфизмов многих счетных ω-стабильных ω-категоричных структур [**35**], ω_1-экзистенциально замкнутые группы [**17**] и т.д.

Цель работы. Главной целью диссертации является решение для свободных групп F бесконечного ранга из ряда классических многообразий групп двух тесно связанных друг с другом проблем: проблемы описания автоморфизмов групп $\mathrm{Aut}(F)$ (башен автоморфизмов групп F) и проблемы оценки выразительной силы элементарных теорий групп $\mathrm{Aut}(F)$. Первая проблема инициирована гипотезами Г. Баумслага о башнях автоморфизмов относительно свободных групп, а вторая — общей проблемой С. Шелаха о выразительной силе элементарных теорий групп автоморфизмов относительно свободных алгебр бесконечного ранга, обсуждавшейся выше. Отвечая на ряд вопросов, предложенных Дж. Бергманом, мы изучаем также проблему конечности ширины групп $\mathrm{Aut}(F)$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В диссертации применяются методы комбинаторной теории групп, теории линейных групп и теории моделей.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории групп и по теории моделей. Многие доказанные в диссертации теоремы могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Апробация. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на российских и международных конференциях: в Марселе-Люмини (Франция, 1997), в Омске (1998), в Париже (Франция, 2000), в Новосибирске (2000, 2003, 2005), в Стамбуле (Турция, 2001), в Анталье (Турция, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005), в Мюнстере (ФРГ, 2002), в Хаттингене (ФРГ, 2003), в Санкт-Петербурге (2005, 2006). Они обсуждались на специализированных семинарах: в Кемеровском государственном университете (1997, 2003, 2006), в математическом институте Оксфордского университета (Великобритания, 2001), в университете Лидса (Великобритания, 2001), в университетах Бильги и

Йедитепе (Стамбул, Турция, 2001, 2003, 2004, 2005), на семинаре «Алгоритмические вопросы алгебры и логики» Московского государственного университета (2005), на семинаре отдела логики ИМ РАН (2005) и на семинаре «Алгебра и логика» Новосибирского государственного университета (2006).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 20 работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на одиннадцать параграфов, и изложена на 188 страницах. Список литературы содержит 97 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации получены следующие основные результаты.

• Доказано, что группа автоморфизмов произвольной неабелевой свободной группы является совершенной, что обобщает результат Дж. Дайер и Э. Форманека.

• Доказано, что группа автоморфизмов бесконечно порожденной свободной нильпотентной группы ступени два является совершенной, что обобщает еще один результат Дж. Дайер и Э. Форманека.

• Пусть $\mathfrak{V}$ — многообразие всех групп, либо многообразие всех абелевых групп, либо многообразие нильпотентных групп ступени $\leqslant c$, а $F_\varkappa(\mathfrak{V})$ — свободная группа из $\mathfrak{V}$, имеющая бесконечный ранг $\varkappa$. Показано, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_\varkappa(\mathfrak{V}))$ интерпретирует средствами логики первого порядка теорию кардинала $\varkappa$, рассматриваемого как множество без структуры, в полной логике второго порядка (равномерно по $\varkappa$). Таким образом, получено решение проблемы С. Шелаха для указанных многообразий и описание элементарных типов групп $\mathrm{Aut}(F_\varkappa(\mathfrak{V}))$:

$$\mathrm{Aut}(F_\varkappa(\mathfrak{V})) \equiv \mathrm{Aut}(F_\lambda(\mathfrak{V})) \iff \varkappa \equiv_{\mathbf{L}_2} \lambda,$$

где $\varkappa, \lambda$ — произвольные бесконечные кардиналы.

• Доказано, что общая линейная группа бесконечномерного векторного пространства над произвольным телом является группой конечной ширины, что отвечает на вопрос Дж. Бергмана.

• Доказано, что группа автоморфизмов произвольной бесконечно порожденной свободной нильпотентной группы (в частности, свободной абелевой) является группой конечной ширины.

• Доказано, что группа автоморфизмов свободной группы счетно-бесконечного ранга является группой конечной ширины.

К другим результатам, имеющим и самостоятельное значение, относятся следующие результаты.

• Определимость без параметров семейства всех сопряжений посредством степеней примитивных элементов в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$ произвольной неабелевой свободной группы F и вытекающая отсюда характеристичность группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(F)$ в группе $\mathrm{Aut}(F)$, что обобщает аналогичный результат Дж. Дайер и Э. Форманека для случая, когда ранг группы F конечен.

• Обобщение результата Л.-К. Хуа и И. Райнера о канонической виде инволюций в группах автоморфизмов свободных абелевых групп.

• Определимость без параметров семейства всех трансвекций в группах автоморфизмов свободных абелевых групп бесконечного ранга.

• Определимость без параметров в группе $\mathrm{Aut}(N)$ ядра гомоморфизма групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}(N) \to \mathrm{Aut}(N/Z(N))$, индуцированного естественным гомоморфизмом $N \to N/Z(N)$, где N — произвольная бесконечно порожденная свободная нильпотентная группа, а $Z(N)$ — центр группы N.

• Доказательство того, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(N)$ произвольной бесконечно порожденной свободной нильпотентной группы N порождается инволюциями, совпадает со своим коммутантом и имеет конфинальность, строго большую, чем ранг N.

Перейдем к точным формулировкам.

В первой главе диссертации обобщается ряд результатов Дж. Дайер и Э. Форманека о совершенности групп автоморфизмов относительно свободных групп конечного ранга. Кроме того, рассматривается вспомогательный алгебраический материал, который впоследствии применяется для оценки выразительной силы элементарных теорий групп автоморфизмов относительно свободных групп бесконечного ранга.

Первый параграф главы является вводным. Пусть F — произвольная неабелева свободная группа. Ключевой результат второго параграфа может быть описан в теоретико-модельных терминах следующим образом: множество всех сопряжений посредством степеней примитивных элементов группы F является определимым без параметров средствами логики первого порядка в группе $\mathrm{Aut}(F)$ (теорема 2.5.1; здесь и далее ссылка вида $m.n.k$ указывает на утверждение с номером k из раздела n параграфа m соответствующей главы). Более точно, утверждается, что существует формула первого порядка с одной свободной переменной в языке теории групп такая, что ее реализациями во *всех* группах автоморфизмов неабелевых свободных групп являются сопряжения степенями примитивных элементов. Следовательно, подгруппа всех сопряжений является характеристической подгруппой группы $\mathrm{Aut}(F)$, а из этого легко следует совершенность группы $\mathrm{Aut}(F)$ (теорема 2.5.5). Таким образом, результат Дж. Дайер и Э. Форманека о совершенности групп автоморфизмов неабелевых свободных групп конечного ранга **[23]** обобщается на произвольные неабелевы свободные группы.

Доказательство теоремы 2.5.1 основывается на описании инволюций в группе $\mathrm{Aut}(F)$, полученном Дж. Дайер и П. Скоттом в работе [**22**]. Важная роль отводится инволюциям, называемым квази-сопряжениями. Говорим, что инволюция $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$ является *квази-сопряжением*, если найдутся примитивный элемент $x \in F$ и свободный множитель C группы F, где $F = \langle x \rangle * C$, такие, что x обращается под действием φ, а каждый элемент свободного множителя C переходит под действием φ в сопряженный посредством x.

Предположим, что $\operatorname{rank} F > 2$. Для данного квази-сопряжения $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$ рассмотрим множество Π, состоящее из всех автоморфизмов группы F вида $\sigma\sigma'$, где оба автоморфизма σ и σ' коммутируют с φ и сопряжены. Доказывается (предложение 2.5.3), что если указанное квази-сопряжение определяется примитивным элементом x и свободным множителем C, то сопряжения степенями x — это те и только те элементы централизатора множества Π в группе $\mathrm{Aut}(F)$, которые не являются инволюциями. В подобном же духе характеризуются сопряжения степенями примитивных элементов в случае, если $\operatorname{rank} F = 2$ (предложение 2.5.2). Таким образом, проблема описания сопряжений степенями примитивных элементов сводится к проблеме описания квази-сопряжений в группе $\mathrm{Aut}(F)$ средствами логики первого порядка. Для решения последней проблемы мы получаем характеризацию класса квази-сопряжений в терминах произведений классов сопряженности инволюций.

Подмножество данной группы называется антикоммутативным, если его элементы попарно неперестановочны. В случае, если ранг группы F строго больше 2, мы показываем, что класс сопряженности, состоящий из квази-сопряжений, есть единственный антикоммутативный класс K сопряженности инволюций такой, что для всякого другого антикоммутативного класса сопряженности инволюций K', все инволюции в множестве KK' попарно сопряжены (предложение 2.4.6). В случае же, если $\operatorname{rank} F = 2$, класс квази-сопряжений является единственным антикоммутативным классом сопряженности инволюций, элементы которого не являются квадратами (предложение 2.4.5). Указанные результаты позволяют легко построить формулу первого порядка, реализациями которой в группе $\mathrm{Aut}(F)$ являются в точности квази-сопряжения, и, следовательно, получить желаемое описание сопряжений степенями примитивных элементов группы F средствами логики первого порядка.

Третий параграф главы посвящен свойствам инволюций в группах автоморфизмов свободных абелевых групп. Результаты этого параграфа используются как в главе I, так и в главе II. Главным результатом параграфа является обобщение результата Л.-К. Хуа и И. Райнера из работы [**33**]: каждая инволюция $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$, где A — свободная абелева группа, обладает базисом $\mathcal{B}$ таким, что для каждого элемента $b \in \mathcal{B}$, либо $\varphi b = \pm b$, либо $\varphi b \in \mathcal{B}$ (теорема 3.1.2). Л.-К. Хуа и И. Райнер доказали указанный результат в предположении *конечности* ранга группы A (на самом деле, они работали с матричными группами $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ и их доказательство существенным образом использовало матричное исчисление). Данное в диссертации доказательство работает для произвольных свободных абелевых групп.

Как уже говорилось выше, Дж. Дайер и Э. Форманек [**24**] показали, что группа автоморфизмов свободной нильпотентной группы ступени два, имеющей конечный ранг $r \geqslant 2$, является совершенной, если и только если $r \neq 3$. Целью четвертого параграфа является обобщение результата Дж. Дайер и Э. Форманека на произвольные свободные нильпотентные группы ступени два.

Пусть N — свободная нильпотентная группа ступени два, имеющая бесконечный ранг. Методы, используемые в диссертации для доказательства совершенности группы $\mathrm{Aut}(N)$, довольно близки к методам, примененным Дж. Дайер и Э. Форманеком в работе [**24**]. Так, как и в цитированной работе, в рассматриваемом параграфе диссертации доказывается, что после умножения на подходящий внутренний автоморфизм группы $\mathrm{Aut}(N)$ любой автоморфизм группы $\mathrm{Aut}(N)$ сохраняет каждый элемент подгруппы $\mathrm{Inn}(N)$ и некоторую фиксированную инволюцию $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$, которая обращает все члены некоторого базиса группы N (мы называем такие инволюции *симметриями*).

Однако, в отличие от доказательства из работы [**24**], анализа действия преобразованного автоморфизма, скажем, Δ группы $\mathrm{Aut}(N)$ на каком-нибудь множестве порождающих группы $\mathrm{Aut}(N)$ не производится. Доказывается (предложение 4.6.3), что автоморфизм Δ сохраняет все IA-автоморфизмы, и, следовательно, класс сопряженности всех симметрий, ибо произведение любой симметрии и выбранной симметрии θ есть IA-автоморфизм. (Напомним, что автоморфизм группы G называется IA-*автоморфизмом*, если он индуцирует тождественный автоморфизм на ее абелизации). Надо сказать также, что анализ действия преобразованного автоморфизма, данный в работе [**24**], — довольно технический, несмотря на то, что необходимо проанализировать действие всего на четырех порождающих.

Из предложения 4.6.3 легко выводится, что автоморфизм Δ сохраняет все элементы группы $\mathrm{Aut}(N)$, и потому все автоморфизмы группы $\mathrm{Aut}(N)$ — внутренние (теорема 4.6.1). Действительно, можно использовать, например, следующее общее наблюдение: если K — класс сопряженности данной группы G такой, что его централизатор в G тривиален, то любой автоморфизм группы G, фиксирующий K поточечно, фиксирует с необходимостью все элементы этой группы.

Ключевым результатом в доказательстве того, что все IA-автоморфизмы стабилизируются под действием указанного выше автоморфизма Δ, принадлежащего группе $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(N))$, является следующий результат: подгруппа $\mathrm{IA}_\tau(N)$ группы $\mathrm{Aut}(N)$, состоящая из всех IA-автоморфизмов, фиксирующих данный примитивный элемент x группы N (на самом деле, каждый элемент смежного класса xN', где N' — коммутант группы N) определима в группе $\mathrm{Aut}(N)$ средствами монадической логики с параметром τ, где τ — сопряжение посредством x (теорема 4.5.1). Стабилизаторы $\mathrm{IA}_\tau(N)$ используются затем для интерпретации в группе $\mathrm{Aut}(N)$ примитивных элементов группы N.

Характеризации стабилизаторов $\mathrm{IA}_\tau(N)$ предшествует характеризация ряда классов сопряженности инволюций и характеризация подгрупп $\mathrm{IA}(N)$ и $\mathrm{Inn}(N)$. Доказывается, что группы $\mathrm{IA}(N)$ и $\mathrm{Inn}(N)$ определимы без параметров средствами логики первого порядка в группе $\mathrm{Aut}(N)$ (однако в данном случае из определимости подгруппы $\mathrm{Inn}(N)$ не следует напрямую, что группа $\mathrm{Aut}(N)$ совершенна, ибо центр группы N нетривиален). Часть результатов обобщается в главе II на группы автоморфизмов произвольных бесконечно порожденных свободных нильпотентных групп.

Основные результаты первой главы диссертации опубликованы в работах [**47, 48, 49, 50, 53, 55, 60, 63**].

Вторая глава посвящена решению обсуждавшейся выше проблемы Шелаха для многообразия всех групп, для многообразия $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп и для многообразий $\mathfrak{N}_c$ всех нильпотентных групп ступени $\leqslant c$.

Пусть F — бесконечно порожденная свободная группа. Основной результат первого параграфа главы II гласит, что теория $\mathrm{Th}_2(\operatorname{rank} F)$ кардинала $\operatorname{rank} F$, рассматриваемого как структура в пустом языке, в полной логике

$\mathbf{L}_2$ второго порядка взаимно синтаксически интерпретируема с элементарной теорией группы $\mathrm{Aut}(F)$ (равномерно по F). Тем самым, дается решение проблемы Шелаха для многообразия всех групп. В качестве следствия получается классификация элементарных типов для групп автоморфизмов свободных групп бесконечного ранга: если F_1, F_2 — бесконечно порожденные свободные группы, то

$$\mathrm{Aut}(F_1) \equiv \mathrm{Aut}(F_2) \iff \operatorname{rank} F_1 \equiv_{\mathbf{L}_2} \operatorname{rank} F_2,$$

т.е. группы автоморфизмов групп F_1 и F_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда кардиналы $\operatorname{rank} F_1$ и $\operatorname{rank} F_2$, рассматриваемые как множества без структуры, эквивалентны в логике второго порядка.

Основываясь на полученном в главе I результате о том, что семейство всех сопряжений степенями примитивных элементов является определимым без параметров в группе $\mathrm{Aut}(F)$, мы немедленно получаем, что группа $\mathrm{Inn}(F)$ является определимой без параметров подгруппой группы $\mathrm{Aut}(F)$, ибо в бесконечно порожденной относительно свободной группе каждый элемент является, как легко видеть, произведением не более двух примитивных элементов. Таким образом, в группе $\mathrm{Aut}(F)$ интерпретируется двухсортная структура $\langle \mathrm{Aut}(F), F\rangle$, основными отношения которой включают в себя групповые операции на $\mathrm{Aut}(F)$ и F, а также предикат, задающий действие группы $\mathrm{Aut}(F)$ на группе F.

Следующий шаг — это интерпретация в структуре $\langle \mathrm{Aut}(F), F\rangle$ трехсортной структуры $\langle \mathrm{Aut}(F), F, S\rangle$, где S обозначает множество всех свободных множителей группы F (теорема 1.2.3). Основные отношения последней структуры включают в себя основные отношения структур $\mathrm{Aut}(F)$ и F, отношения, задающие действие группы $\mathrm{Aut}(F)$ на F и S, отношение принадлежности на множестве $F \cup S$ и тернарное отношение $R(A, B, C)$ на S, выполняющееся если и только если $A = B * C$. Интерпретация существенным образом использует результаты об инволюциях группы $\mathrm{Aut}(F)$, полученные в главе I.

Далее в структуре $\langle \mathrm{Aut}(F), F, S\rangle$ интерпретируется действие группы $\mathrm{Aut}(F)$ на некотором базисе группы F, или, более формально, в указанной структуре интерпретируется средствами логики первого порядка структура $\langle \mathrm{Aut}(F), F, \mathcal{B}\rangle$ (с естественными отношениями), где $\mathcal{B}$ — какой-нибудь базис группы F (теорема 1.3.1). Используя затем достаточно стандартные методы, мы интерпретируем в структуре $\langle \mathrm{Aut}(F), F, \mathcal{B}\rangle$ структуру $\langle \mathcal{B}^{\mathcal{B}}; \circ\rangle$, т.е. полугруппу всех отображений базиса $\mathcal{B}$ в себя. После этого применяется версия цитировавшегося выше результата М. Рабина, гласящая, что если X — бесконечное множество, то элементарная теория структуры $\langle X^X; \circ\rangle$ и полная теория второго порядка $\mathrm{Th}_2(X)$ множества X в пустом языке являются взаимно синтаксически интерпретируемыми, равномерно по X.

Таким образом, элементарная теория группы $\mathrm{Aut}(F)$, с которой мы начали цепочку теорий, каждая из которых синтаксически интерпретируется в предыдущей, синтаксически интерпретирует теорию $\mathrm{Th}_2(\mathrm{rank}\, F)$. Синтаксическая интерпретация элементарной теории группы $\mathrm{Aut}(F)$ в теории $\mathrm{Th}_2(\mathrm{rank}\, F)$ строится довольно просто. Таким образом, теории $\mathrm{Th}(\mathrm{Aut}(F))$ и $\mathrm{Th}_2(\mathrm{rank}\, F)$ являются взаимно синтаксически интерпретируемыми, равномерно по F (теорема 1.4.1).

Пусть A обозначает бесконечно порожденную свободную абелеву группу. Во втором параграфе главы II мы изучаем проблему Шелаха для многообразия $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп. Основной результат звучит так же, как и основной результат предыдущего параграфа: элементарная теория группы $\mathrm{Aut}(A)$ является взаимно синтаксически интерпретируемой с теорией $\mathrm{Th}_2(\mathrm{rank}\, A)$, равномерно по A (теорема 2.3.1). Таким образом, видим, что для еще одного классического многообразия групп проблема Шелаха решается положительно. Ясно тогда, что и для любого другого многообразия групп $\mathfrak{V}$ проблема Шелаха решается положительно, если абелизации свободных групп из $\mathfrak{V}$ являются свободными абелевыми группами, и если в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F(\mathfrak{V}))$, где $F(\mathfrak{V})$ — бесконечно порожденная свободная группа из $\mathfrak{V}$, можно средствами логики первого порядка интерпретировать группу автоморфизмов абелизации группы $F(\mathfrak{V})$. Подобный подход, как показывается в следующем параграфе, может быть применен к многообразию $\mathfrak{N}_c$ всех нильпотентных групп ступени $\leqslant c$, для любого натурального числа $c \geqslant 2$.

Обсудим схему интерпретации теории $\mathrm{Th}_2(\mathrm{rank}\, A)$ в элементарной теории группы $\mathrm{Aut}(A)$.

Ясно, что A можно рассматривать как свободный $\mathbf{Z}$-модуль. Одним из стандартных методов в теории групп автоморфизмов модулей является изучение возможности обобщения на эти группы фактов, доказанных для групп автоморфизмов векторных пространств. Как показал автор в кандидатской диссертации [**5**] (основные результаты опубликованы в работе [**51**]), в общей линейной группе $\mathrm{GL}(V)$ бесконечномерного векторного пространства V над телом можно средствами логики первого порядка интерпретировать действие группы $\mathrm{GL}(V)$ на всех подпространствах векторного пространства V. Схожая идея используется в рассматриваемом параграфе: в группе $\mathrm{Aut}(A)$ интерпретируется фрагмент геометрии $\mathbf{Z}$-модуля A, а именно, строится интерпретация средствами логики первого порядка семейства $\mathcal{D}^1(A)$, состоящего из всех прямых слагаемых группы A, имеющих ранг или коранг 1, и действие группы $\mathrm{Aut}(A)$ на множестве $\mathcal{D}^1(A)$. Для сравнения, интерпретация первого порядка в общей линейной группе $\mathrm{GL}(V)$ бесконечномерного векторного пространства V семейства всех прямых и гиперплоскостей, проделанная автором в [**5**], значительно длиннее. Надо, однако, заметить, что обе интерпретации имеют схожие черты (обе, к примеру, используют инволюции) и обе используют идеи теории классических групп.

В принципе, восстановление множества $\mathcal{D}^1(A)$ в группе $\mathrm{Aut}(A)$ может быть продолжено до восстановления семейства $\mathcal{D}(A)$ всех прямых слагаемых группы A, с последующей интерпретацией в структуре $\langle \mathrm{Aut}(A), \mathcal{D}(A)\rangle$ полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}(A)$ группы A (так, как это делается в работе [**5**]). Мы, однако, предпочитаем более короткий путь, интерпретируя в группе $\mathrm{Aut}(A)$ общую линейную группу некоторого векторного пространства, имеющего размерность, равную рангу группы A. А именно, используя действие группы $\mathrm{Aut}(A)$ на множестве $\mathcal{D}^1(A)$, мы показываем, что главная конгруэнц-подгруппа $\Gamma_2(A)$ уровня два является определимой без параметров подгруппой группы $\mathrm{Aut}(A)$ (теорема 2.2.1). Фактор-группа $\mathrm{Aut}(A)/\Gamma_2(A)$ изоморфна общей линейной группе векторного пространства $A/2A$ над полем $\mathbf{Z}_2$. Таким образом, группа $\mathrm{Aut}(A)$ интерпретирует средствами первого порядка группу $\mathrm{GL}(\mathrm{rank}\, A, \mathbf{Z}_2)$. Элементарная теория последней группы, как мы замечали выше, синтаксически интерпретирует теорию $\mathrm{Th}_2(\mathrm{rank}\, A)$. Ключевым результатом при доказательстве определимости подгруппы $\Gamma_2(A)$ является результат об определимости средствами логики первого порядка без параметров множества всех трансвекций в группе $\mathrm{Aut}(A)$ (предложение 2.2.2).

В третьем параграфе рассматриваемой главы многообразия $\mathfrak{N}_c$ нильпотентных групп присоединяются к списку многообразий групп, для которых проблема Шелаха решается положительно (теорема 3.2.3). Как уже говорилось, естественная схема решения проблемы в данном случае заключается в интерпретации в группе $\mathrm{Aut}(N)$, где N — бесконечно порожденная свободная нильпотентная группа, группы автоморфизмов абелизации группы N.

На первом этапе обобщается соответствующий результат из четвертого параграфа главы I: семейство всех инволюций, сравнимых по модулю подгруппы $\mathrm{IA}(N)$ с симметриями из группы $\mathrm{Aut}(N)$ (т.е. с инволюциями, обращающими все элементы некоторого базиса) является определимым без параметров семейством группы $\mathrm{Aut}(N)$ (предложение 3.1.3).

Отсюда можно вывести такой результат: группа $\mathrm{Aut}(N)$ интерпретирует средствами первого порядка группу $\mathrm{Aut}(N/Z(N))$, где $Z(N)$ — центр группы N (предложение 3.1.5). Дело здесь в том, что ядро K гомоморфизма $\mathrm{Aut}(N) \to \mathrm{Aut}(N/Z(N))$, индуцированного естественным гомоморфизмом $N \to N/Z(N)$, является определимой подгруппой группы $\mathrm{Aut}(N)$:

$$K = T_n^+(N) \cup T_n^-(N),$$

где $T_n^+(N)$ (соотв. $T_n^-(N)$) обозначает множество всех автоморфизмов группы N, сохраняемых (соотв. обращаемых) при присоединенном действии всеми инволюциями, сравнимыми с симметриями по модулю подгруппы $\mathrm{IA}(N)$.

Ясно, что если группа N имеет ступень нильпотентности $c \geqslant 2$, то группа $M = N/Z(N)$ является нильпотентной группой ступени $c-1$. Теперь простое рассуждение, использующее индукцию по c, показывает, что в группе $\mathrm{Aut}(N)$ интерпретируется группа $\mathrm{Aut}(A)$, где A — абелизация группы N.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [**51, 52, 54, 57, 58, 56, 60, 63**].

В третьей главе диссертации изучается проблема конечности ширины групп автоморфизмов относительно свободных групп бесконечного ранга. Эта проблема инициирована вопросами Дж. Бергмана [**10**].

Пусть Γ — группа перестановок, действующая на множестве Ω. Мы будем использовать стандартные обозначения теории бесконечных групп перестановок. Так, если Y — подмножество группы Γ и U — подмножество множества Ω, то $Y_{(U)}$ обозначает множество всех элементов из Y, которые фиксируют U поточечно, а $Y_{\{U\}}$ — множество всех перестановок из Y, которые фиксируют U как множество. Мы обозначаем $Y_\star \cap Y_*$ через $Y_{\star,*}$.

Глава III организована следующим образом. В первом параграфе изучаются группы автоморфизмов произвольных относительно свободных алгебр бесконечного ранга. Предположим, что $\mathfrak{V}$ — многообразие алгебр, F — свободная алгебра из $\mathfrak{V}$, имеющая бесконечный ранг, а Γ обозначает группу $\mathrm{Aut}(F)$. Рассмотрим цепь $\mathcal{H} = (H_i : i \in I)$ подмножеств группы Γ, удовлетворяющую следующим условиям:

(a) Γ совпадает с объединением цепи $\mathcal{H}$;

(b) для любого $i \in I$ множество H_i замкнуто относительно взятия обратных элементов;

(c) для любого $i \in I$ найдется $j \in I$ такой, что $H_i H_i \subseteq H_j$.

Цепи подмножеств указанного вида были введены М. Дросте и Р. Гёбелем в работе [**20**].

Ключевой результат первого параграфа рассматриваемой главы гласит, что всякая цепь $\mathcal{H}$ мощности $\leqslant \operatorname{rank} F$, удовлетворяющая условиям (a-c), обладает таким элементом H_{i_0}, что H_{i_0} включает в себя стабилизатор вида $\Gamma_{(U),\{W\}}$, где $F = U * W$ есть свободное произведение подалгебр U и W, каждая из которых изоморфна алгебре F (лемма 1.1.1). Лемма 1.1.1 обобщает ряд известных результатах о группах автоморфизмов (в частности, из результатов Дж. Бергмана в [**11**] следует, что она справедлива для бесконечных симметрических групп). Лемма 1.1.1 неоднократно используется в доказательствах основных результатов третьей главы диссертации.

Обобщая известные примеры [**19, 27, 36, 37**], вводим следующее определение. Говорим, что многообразие алгебр $\mathbf{V}$ является *BMN-многообразием* (многообразием Бергмана–Макферсона–Ноймана), если каждая $\mathbf{V}$-свободная алгебра F бесконечного ранга допускает разложение $F = U_1 * U_2 * W$ такое, что каждая алгебра U_1, U_2, W изоморфна алгебре F, и группа $\Gamma = \mathrm{Aut}(F)$ порождается объединением стабилизаторов

$$\Gamma_{(U_1),\{U_2 * W\}} \cup \Gamma_{(U_2),\{U_1 * W\}}. \tag{1}$$

Тогда результаты из [**19, 27, 36, 37**] означают, что многообразие всех множеств в пустом языке и всякое многообразие векторных пространств над фиксированным телом — это BMN-многообразия.

Используя лемму 1.1.1, легко доказать, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$ свободной алгебры F бесконечного ранга из BMN-многообразия является группой конечной ширины тогда и только тогда, когда ширина группы $\mathrm{Aut}(F)$ относительно некоторого порождающего множества вида (1) конечна. Более того, можно доказать, что группа $\mathrm{Aut}(F)$ порождается инволюциями, совпадает со своим коммутантом и имеет конфинальность, строго большую, чем ранг алгебры F (теорема 1.1.4).

Во втором параграфе дается положительный ответ на вопрос Дж. Бергмана из работы [**10**]: мы показываем, что бесконечномерные общие линейные группы над произвольными телами являются группами конечной ширины. Из результатов Д. Макферсона [**36**] вытекает, что всякое многообразие векторных пространств над фиксированным телом является BMN-многообразием, и, применяя теорему 1.1.4, мы даем новое, более короткое доказательство того, что всякая бесконечномерная общая линейная группа над телом совпадает со своим коммутантом (факт, доказанный А. Розенбергом в работе [**40**]). Доказывается также, что бесконечномерные проективные общие линейные группы и бесконечномерные аффинные группы над телами являются группами конечной ширины и выясняется ситуация с коллинеарными группами: общая коллинеарная группа $\Gamma\mathrm{L}(V)$ (проективная общая коллинеарная группа $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V)$) бесконечномерного векторного пространства V над телом D является группой конечной ширины в том и только в том случае, если группа автоморфизмов тела D является группой конечной ширины. Заметим, что, согласно результату Я. Коллара и Э. Фрида [**30**], всякая группа может быть реализована как группа автоморфизмов некоторого поля. Таким образом, бесконечномерные проективные общие коллинеарные группы, рассматриваемые как группы автоморфизмов проективных пространств, дают как примеры, так и контрпримеры к обсуждавшейся выше общей гипотезе Дж. Бергмана о группах автоморфизмов структур.

Во третьем параграфе рассматриваемой главы доказывается, что любое многообразие $\mathfrak{N}_c$ всех нильпотентных групп класса $\leqslant c$ (и, в частности, многообразие $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп) является BMN-многообразием, и что группы автоморфизмов свободных групп бесконечного ранга этого многообразия являются группами конечной ширины (теорема 3.1.3). В качестве следствия теоремы 1.1.4 получаем, что группа $\mathrm{Aut}(N)$, где N — свободная нильпотентная группа бесконечного ранга, порождается инволюциями, совпадает со своим коммутантом и имеет конфинальность, превосходящую ранг группы N. Абелев случай использует результат Р. Г. Суона [**16**] о порождающих множествах групп автоморфизмов бесконечно порожденных свободных абелевых групп. Нильпотентный случай доказывается индукцией по c.

В четвертом параграфе дается частичный ответ на вопрос Дж. Бергмана [**10**], а именно, доказывается, что группы автоморфизмов свободных групп счетно-бесконечного ранга являются группами конечной ширины. Доказательство опирается на результат из статьи [**12**] Р. Брайна и Д. Эванса, согласно которому свободная группа F счетно-бесконечного ранга богата так называемыми генерическими автоморфизмами по отношению к семейству всех свободных множителей группы F, имеющих конечный ранг. Затем, модифицируя известное рассуждение из статьи [**32**] Ходжеса–Ходкинсона–Ласкара–Шелаха, использующее индукцию по элементам некоторого двоичного дерева, мы показываем, что группа $\mathrm{Aut}(F)$ является группой конечной ширины.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работах [**59, 61, 63, 65, 66**].

Литература

[1] Ю. М. Важенин, А. Г. Пинус, Элементарная классификация и разрешимость теорий производных структур, УМН, 60 (2005), № 3, 3–40.

[2] Ю. Л. Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., «Наука», 1980.

[3] Коуровская тетрадь: нерешенные проблемы теории групп. 15-е изд., Новосибирск, 2003.

[4] А. Г. Пинус, Элементарная эквивалентность производных структур свободных полугрупп, унаров, групп, Алгебра и логика, 43 (2004), № 6, 730–747.

[5] В. А. Толстых, Теории бесконечномерных линейных групп. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Кемерово, 1992.

[6] Д. Г. Храмцов, Конечные группы автоморфизмов свободных групп. Матем. заметки, 38 (1985), № 3, 386–392.

[7] Д. Г. Храмцов, Внешние автоморфизмы свободных групп, в сб. «Теоретико-групповые исследования», Уральское отд. Акад. Наук СССР, Свердловск, 1990, 95–127.

[8] Д. Г. Храмцов, Совершенность группы внешних автоморфизмов свободной группы, в сб. «Теоретико-групповые исследования», Уральское отд. Акад. Наук СССР, Свердловск, 1990, 128–143.

[9] O. V. Belegradek, V. Tolstykh, The logical complexity of theories associated with an infinite-dimensional vector space, Proc. of the Ninth Easter conf. on model theory, Berlin, 1991, 12–34.

[10] G. Bergman, Generating infinite symmetric groups, 2004, preprint, arXiv:math.GR/0401304.

[11] G. Bergman, Generating infinite symmetric groups, Bull. London Math. Soc., 38 (2006), 429–440.

[12] R. M. Bryant, D. M. Evans, The small index property for free groups and relatively free groups, J. London Math. Soc., 55 (1997), 363–369.

[13] M. Bridson, K. Vogtmann, Automorphisms of automorphism groups of free groups, J. Algebra, 229 (2000), 785–792.

[14] J. Baldwin, S. Shelah, Second order quantifiers and the complexity of theories, Notre Dame J. Formal Logic, 26 (1985), 229–302.

[15] E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, Elementary properties of linear groups and related problems. Algebra. J. Math. Sci. (N. Y.), 123 (2004), 3921–3985.

[16] R. G. Burns, L. Pi, Generators for the bounded automorphisms of infinite-rank free nilpotent groups, Bull. Austral. Math. Soc., 40 (1989), 175–187.

[17] Y. de Cornulier, Strongly bounded groups and infinite powers of finite groups, Comm. Algebra 34 (2006), 2337–2345.

[18] M. Culler, K. Vogtmann, Moduli of graphs and automorphisms of free groups, Invent. Math., 84 (1986), 91–119.

[19] J. Dixon, P. M. Neumann, S. Thomas, Subgroups of small index in infinite symmetric groups, Bull. London Math. Soc., 18 (1986), 580-586.

[20] M. Droste, R. Göbel, Uncountable cofinalities of permutation groups, J. London Math. Soc., 71 (2005), 335–344.

[21] M. Droste, W. C. Holland, Generating automorphism groups of chains, Forum Math., 17 (2005), 699–710..

[22] J. Dyer, G. P. Scott, Periodic automorphisms of free groups, Comm. Algebra, 3 (1975), 195–201.

[23] J. Dyer, E. Formanek, The automorphism group of a free group is complete, J. London Math. Soc., 11 (1975), 181–190.

[24] J. Dyer, E. Formanek. Automorphism sequences of free nilpotent group of class two, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 79 (1976), 271–279.

[25] J. Dyer, E. Formanek, Complete automorphism groups, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 435–437.

[26] J. Dyer, E. Formanek, Characteristic subgroups and complete automorphism groups, Amer. J. Math., 99 (1977), 713–753.

[27] D. Evans, Subgroups of small index in infinite general linear groups, Bull. London Math. Soc., 18 (1986), 587–590.

[28] E. Formanek, Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups, Comm. Algebra, 30 (2002), 1033–1038.

[29] E. Formanek, Characterizing a free group in its automorphism group, J. Algebra, 133 (1990), 424–432.

[30] E. Fried, J. Kollár, Automorphism groups of fields, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 29 (1982), 293–304.

[31] W. Hodges, Model Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[32] W. Hodges, I. Hodkinson, D. Lascar, S. Shelah, The small index property for ω-stable ω-categorical structures and for the random graph, J. London Math. Soc., 48 (1993), 204–218.

[33] L. K. Hua, I. Reiner, Automorphisms of the unimodular group, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 331–348.

[34] M. Kassabov, On the automorphism tower of free nilpotent groups. Ph. D. Thesis, Yale Univ., 2003.

[35] A. S. Kechris, C. Rosendal, Turbulence, amalgamation and generic automorphisms of homogeneous structures, 2004, preprint, arXiv:math.LO/0409567.

[36] H. D. Macpherson, Maximal subgroups of infinite-dimensional linear groups, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 53 (1992), 338-351.

[37] H. D. Macpherson, P. M. Neumann, Subgroups of infinite symmetric groups, J. London Math. Soc., 42 (1990), 64–84.

[38] A. G. Pinus, H. Rose, Second order equivalence of cardinals: an algebraic approach, Contributions to General Algebras 13, Verlag J. Heyn, Klagenfurt, 2001, 275–284.

[39] M. .O. Rabin, A simple method for undecidability proofs and some applications, in 1965 Logic, Methodology and Philos. Sci. (Proc. 1964 Internat. Congr.) North-Holland, Amsterdam, 58–68.

[40] A. Rosenberg, The structure of the infinite general linear group, Ann. of Math., 68 1958, 278–294.

[41] S. Shelah, First order theory of permutation groups, Israel. J. Math., 14 (1973), 149–162.

[42] S. Shelah, Errata to: First order theory of permutation groups, Israel J. Math., 15 (1973), 437–441.

[43] S. Shelah, Interpreting set theory in the endomorphism semi-group of a free algebra or in a category, Annales Scientifiques de L'universite de Clermont, 13 (1976), 1–29.

[44] S. Shelah, On a problem of Kurosh, Jónsson groups, and applications, in Word problems, II (Conf. on Decision Problems in Algebra, Oxford, 1976), Stud. Logic Foundations Math., 95, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980, 373–394.

[45] S. Shelah, On what I do not understand (and have something to say), model theory, Math. Japon., 51 (2000), 329–377.

[46] S. Shelah, Classification theory and the number of non-isomorphic models, Second ed., Studies in Logic and Foundations of Mathematics 92, North-Holland, 1990.

Работы автора по теме диссертации

[47] V. Tolstykh, Puissance et plénitude: interprétation des groupes d'automorphismes des groupes libres, Quatrième Colloque Franco-Touranien de Théorie des Modèles, Marseille-Lumini 1997, Résumés des Conférences, Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard, Lyon 1, 19.

[48] V. Tolstykh, The automorphism group of an infinitely generated free group is complete, Комбинаторные и вычислительные методы в математике (28-31 августа 1998 г.), тезисы докладов межд. конф., Омск, ОмГУ, 1998, 131–133.

[49] V. Tolstykh, The automorphism tower of a free group, J. London Math. Soc., 61 (2000), 423–440.

[50] В. А. Толстых, Короткие башни автоморфизмов, Логика и приложения (4-6 мая 2000 г.): тезисы докладов международной конференции. Новосибирск: Институт дискретной математики и информации, 2000, 99.

[51] V. Tolstykh, Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups, Ann. Pure Appl. Logic, 105 (2000), 103–156.

[52] V. Tolstykh, Set theory is interpretable in the automorphism group of an infinitely generated free group, J. London Math. Soc., 62 (2000), 16–26.

[53] V. Tolstykh, On involutions in the outer automorphism groups of free groups, Abstracts of International Conference 'Antalya Algebra Days III', Antalya, 2001, 19.

[54] V. Tolstykh, On the automorphism groups of free two-step nilpotent groups. ASL Logic Colloquium '2000 (Paris, July 2000), Bull. Symb. Logic, 7 (2001), 153–154.

[55] V. Tolstykh, Free two-step nilpotent groups whose automorphism group is complete, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 131 (2001), 73–90.

[56] V. Tolstykh, On the logical strength of the automorphism groups of free nilpotent groups, Contemp. Math. 302, AMS, Providence, 2002, 113–120.

[57] V. Tolstykh, Logically strong automorphism groups of free algebras, Logic Colloquium 2002, ASL European Summer Meeting, August 3–9 2002, Westfälliche Wilhelm Universität, Münster, 2002, 54–55.

[58] V. Tolstykh, On expressive power of first-order logic for the automorphism groups of free algebras, Symmetries and Ordered Structures under the Influence of Model Theory and Combinatorics, July 26-31 (Hattingen, Germany), 21.

[59] V. Tolstykh, Infinite-dimensional general linear groups are groups of universally finite width, Abstracts of International Conference 'Antalya Algebra Days VI', Antalya, 2004, 27–28.

[60] V. Tolstykh, What does the automorphism group of a free abelian group A know about A? Contemp. Math., 380, AMS, Providence, 2005, 283–296.

[61] V. Tolstykh, On the Bergman property, Abstracts of International Conference 'Antalya Algebra Days VII', Antalya, 2005, 52.

[62] V. Tolstykh, On the Bergman property for the automorphism groups of relatively free groups, Methods of Logic in Mathematics II, St. Petersburg, July 18-24, 2005, 21.

[63] В. А. Толстых, Группы автоморфизмов относительно свободных групп бесконечного ранга, Вестник НГУ, Серия: матем., механика, информ., 6 (2006), № 1, 24–48.

[64] V. Tolstykh, Complete automorphism groups of relatively free groups, Methods of Logic in Mathematics III, St. Petersburg, June 1-7, 2006, 17–18.

[65] V. Tolstykh, On the Bergman property for the automorphism groups of relatively free groups, J. London Math. Soc., 73 (2006), 669–680.

[66] В. А. Толстых, Бесконечномерные общие линейные группы являются группами конечной ширины, Сиб. матем. журн., 47 (2006), № 5, 1160–1166.