На правах рукописи

Свиридов Константин Сергеевич

О СВОЙСТВЕ МАГНУСА И КОНЕЧНЫХ ПОДГРУППАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ГРУПП

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Олег Владимирович Богопольский

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Губа Виктор Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент
Брюханов Олег Вадимович

Ведущая организация:
Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского

Защита состоится 17 февраля 2011г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «____» января 2011г.

Учёный секретарь диссертационного совата
кандидат физико-математических наук А.Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена исследованию актуальных вопросов комбинаторной и геометрической теории групп: свойству Магнуса и подгрупповой структуре гиперболических групп.

A. В 1930 г. В. Магнус опубликовал статью [19], имеющую большое значение для комбинаторной теории групп и логики, в которой доказал т.н. *Freiheitssatz (теорему о свободе)*:

Теорема 1. *Пусть G – факторгруппа свободной группы со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 2$, по нормальному замыканию циклически приведённого слова r, имеющего нетривиальное вхождение $x_1^{\pm 1}$. Тогда подгруппа F группы G, порождённая образами $x_2, \ldots, x_n$, является свободной группой ранга $n-1$.*

В [19] также доказана тесно связанная с торемой о свободе

Теорема 2. *Пусть F – свободная группа, и $r, s \in F$. Если нормальные замыкания r и s совпадают, то r сопряжен с s или s^{-1}.*

Будем говорить, что группа G обладает *свойством Магнуса*, если для каждых двух элементов $r, s \in G$ с совпадающими нормальными замыканиями верно, что r сопряжен с s или s^{-1}.

К числу первых обобщений результатов Магнуса относится работа М. Гриндлингера [10], в которой доказывается теорема 2 для наборов слов свободной группы, удовлетворяющих некоторым условиям малых сокращений.

С.Д. Бродский поставил вопрос, над какими группами, помимо свободных, разрешимо каждое уравнение. В работе [2] он сформулировал утверждение о том, что к числу этих групп принадлежат локально индикабельные группы. Из этого утверждения следует теорема 1 для свободных произведений локально индикабельных групп. Теорема 2 для свободных произведений локально индикабельных групп доказана М. Эджеветом в [9] (при некоторых ограничениях на элементы r и s).

Обобщению теоремы Магнуса в другом направлении посвящена серия работ [13-16] Дж. Хоуи. На замкнутой ориентируемой поверхности S Хоуи рассматривал пару петель, α и β, где β – простая петля. Затем он исследовал, при каких условиях вложение $F \mapsto G/N(\alpha)$ является инъективным, где $G = \pi_1(S)$, $N(\alpha)$ – нормальное замыкание элемента α в группе G, а F – фундаментальная группа компоненты связности $S \backslash \beta$. Наиболее полный результат содержится в [16]. Он заключается в том, что это вложение инъективно, если β разбивает S и α не сопрягается внутрь никакой из компонент связности $S \backslash \beta$. Для случая неразбивающей кривой β достаточно потребовать, чтобы α и β не были гомотопны непересекающимся петлям, и чтобы их геометрический индекс пересечения равнялся нулю.

О.В. Богопольский доказал в [5], что фундаментальные группы замкнутых ориентируемых поверхностей обладают свойством Магнуса.

Б. Гиперболические группы были введены М.Л. Громовым в работе [12] и по сей день являются важным объектом иссле-дования в геометрической теории групп и топологии. О подгруппах гиперболических групп известно немного. Известно, что квазивыпуклые подгруппы гиперболических групп сами являются гиперболическими, и известно, что гиперболические группы удовлетворяют альтернативе Титса ([12]).

Подгруппы гиперболических групп могут иметь сложное строение. Как показано в [17], подгруппа гиперболической группы не всегда является квазивыпуклой. В [20] построен пример гиперболической группы, обладающей конечнопорождённой подгруппой, которая бесконечно определена (а значит, не является гиперболической). И наконец, в [7] построен пример гиперболической группы, обладающей конечноопределённой негиперболической подгруппой.

Кручение осложняет изучение гиперболических групп. Так только недавно была положительно решена проблема изоморфизма для гиперболических групп с кручением ([8]), в то время как эта проблема для гиперболических групп без кручения решена в 1995г. ([21]).

О.В. Богопольский и В.Н. Герасимов доказали в [1], что конечные подгруппы δ-гиперболической группы не могут быть сколь угодно большими. А именно, каждая такая подгруппа сопряжена с подгруппой, лежащей внутри шара радиуса $2\delta + 1$ с центом в единице.

В [4] Г.Н. Аржанцева доказала следующую теорему, сформулированную первоначально Громовым в [12]. Для каждой квазивыпуклой подгруппы бесконечного индекса H гиперболической группы без кручения G существует элемент бесконечного порядка $g \in G$, такой что подгруппа, порождённая g и H, квазивыпукла и является свободным произведением $\langle g \rangle * H$. Очевидно, что без дополнительных ограничений на подгруппу H эта теорема не верна для гиперболических групп с кручением. В качестве контрпримера можно привести группу $F \times H$, где F – свободная группа конечного ранга $r \geqslant 1$ и H – нетривиальная конечная группа.

Возникает вопрос, при каких дополнительных ограничениях на подгруппу H эта теорема верна для гиперболических групп с кручением. Важным частным случаем этого вопроса является случай конечной подгруппы H.

Цель работы.

1. Исследовать, обладают ли фундаментальные группы неориентируемых компактных поверхностей свойством Магнуса.

2. Исследовать, при каких условиях для данной конечной подгруппы H неэлементарной гиперболической группы G существует свободная подгруппа $F < G$ ранга r, где r пробегает $\{1, 2\}$, такая что $\langle F, H \rangle = F * H$ и подгруппа $\langle F, H \rangle$ квазивыпукла в G. Найти способ алгоритмически проверить эти условия.

Методика исследований. В первой части используются методы комбинаторной теории групп в духе Магнуса.

Во второй части используются квазигеодезические и локальные квазигеодезические в гиперболических метрических пространствах, а так же гиперболическая граница и конечные автоматы.

Новизна и научная значимость. Все результаты диссертации являются новыми.

В первой части доказано, что фундаментальные группы неориентируемых компактных поверхностей рода $\rho \neq 3$ обладают свойством Магнуса.

Во второй части найдены необходимые и достаточные условия, при которых для данной конечной подгруппы H неэлементарной гиперболической группы G существует бесконечная циклическая подгруппа $F < G$, такая что $\langle F, H\rangle = F * H$ и подгруппа $\langle F, H\rangle$ квазивыпукла в G. Эти условия допускают алгоритмическую проверку. Получен аналогичный результат, где вместо циклической подгруппы участвует свободная подгруппа ранга 2.

Апробация работы. Результаты диссертации прошли аппробацию на следующих международных конференциях: XLIV МНСК "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 2006г.), "Мальцевские чтения"(Новосибирск, 2005г., 2008г.), "Combinatorial and Geometric Group Theory with applications"(Дортмунд, 2007г.). Автор неоднократно докладывал результаты диссертации на семинарах Института математики СО РАН и НГУ "Геометрическая теория групп", "Теория групп", "Алгебра и логика".

Основные результаты диссертации.

1. Доказано, что свойством Магнуса обладают группы с копредставлением вида

$$\langle a, b, y_1, \ldots, y_k \,|\, [a, b]uv\rangle \ ,$$

где $k \geqslant 2$, u, v – нетривиальные редуцированные слова от букв $y_1, \ldots, y_k$, причём слова u и v не имеют общих букв. Показано, что в этот класс групп входят фундаментальные группы неориентируемых компактных поверхностей рода не менее 4.

2. Указаны необходимые и достаточные условия, допускающие алгоритмическую проверку, при которых для данной конечной подгруппы H неэлементарной гиперболической группы G существует свободная подгруппа $F < G$ ранга r, где r пробегает $\{1, 2\}$, такая что $\langle F, H\rangle = F * H$ и подгруппа $\langle F, H\rangle$ квазивыпукла в G.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [22-27], из них [25] входит в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

Работа [27] выполнена в соавторстве с научным руководителем О.В. Богопольским.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы (37 наименований). Объём диссертации 58 страниц.

Содержание работы

Основным результатом первой части диссертации является следующая теорема:

Теорема 1.1.1. *Пусть* $G = \langle a, b, y_1, \ldots, y_e \,|\, [a, b]uv \rangle$, *где* $e \geqslant 2$, u, v *– нетривиальные редуцированные слова от букв* $y_1, \ldots, y_e$, *причём слова* u и v *не имеют общих букв. Тогда* G *обладает свойством Магнуса.*

Фундаментальная группа неориентируемой замкнутой поверхности рода $\rho \geqslant 3$ обладает таким набором порождающих $x_1, \ldots, x_\rho$, что её копредставление в этом наборе имеет вид:

$$\langle\, x_1, \ldots, x_\rho \,|\, [x_1, x_2]x_3^2 \cdot \ldots \cdot x_\rho^2 \,\rangle \;.$$

Таким образом, из теоремы 1.1.1 следует, что фундаментальная группа замкнутой неориентируемой поверхности рода не менее 4 обладает свойством Магнуса (предложение 1.1.2).

Пусть r, s – два элемента группы G с совпадающими нормальными замыканиями. Теорема 1.1.1 доказывается в два шага. На первом шаге мы выбираем по элементам r и s некоторую надгруппу H группы G и указываем в H подгруппу N, так что выполняются следующие условия:

1. из сопряжённости r и s в H следует их сопряжённость в G,
2. N свободна,
3. N содержит r и s.

На втором шаге мы доказываем, что нормальные замыкания r и s в N совпадают. Тогда по теореме Магнуса (теорема 2) элементы r и s сопряжены в N, а значит в H и в G.

Опишем первый шаг. Выбирая надгруппу H, мы опираемся на предложение 1.2.1.

Предложение 1.2.1. *Пусть* $H = \langle x, b, y_1, \ldots, y_e \,|\, [x^k, b]uv \rangle$, *где* $e \geqslant 2$, $k \neq 0$, u, v *– непустые редуцированные слова от букв* $y_1, \ldots, y_e$, *причём наборы букв, входящих в слова* u, v, *не пересекаются. Пусть у элементов* $r, s \in H$ *совпадают нормальные замыкания, и* $r_x = 0$, *где* r_x *– сумма экспонент элемента* r *по порождающему* x. *Тогда* r *сопряжен с* s *или* s^{-1}.

Если $r_a = 0$, теорема 1.1.1 сразу же следует из предложения 1.2.1. В случае $r_b = 0$, мы можем использовать другое представление группы G:

$$G \;=\; \langle a, b, y_1, \ldots, y_e \,|\, [b, a]v^{-1}u^{-1} \rangle \;.$$

Если же одновременно выполняется $r_a \neq 0$ и $r_b \neq 0$, то мы вкладываем естественным образом группу G в группу H, являющуюся свободным произведением G на циклическую группу с объединением по некоторой подгруппе:

$$H = G \underset{a = x^{r_b}}{*} \langle x \,|\, \rangle \;=\; \langle\, x, b, y_1, \ldots, y_e \,|\, [x^{r_b}, b]uv \,\rangle \;.$$

Используя нормальную форму элемента свободного произведения с объединением, мы доказываем, что из сопряжённости элементов r и s в группе H следует их сопряжённость в группе G. Замена переменной $\bar{b} = x^{r_a}b$ обеспечивает выполнимость условия $r_x = 0$, завершая тем самым сведение теоремы 1.1.1 к предложению 1.2.1.

Подгруппа N возникает в ходе доказательства предложения 1.2.1. В качестве N мы берём ядро гомоморфизма $H \to \mathbb{Z}$, отображающего x в 1, а остальные порождающие H в 0. Ввиду условия $r_x = 0$, несложно заметить, что $r \in N$, а значит и $s \in N$. В начале третьего раздела показано, что N является свободной группой счётного ранга.

Второму шагу доказательства теоремы 1.1.1 посвящены посвящены наиболее технические разделы первой части – разделы 3, 4 и 5. В разделах 3 и 4 мы накапливаем сведения о структуре подгруппы N, которые позволяют в разделе 5 доказать, что нормальные замыкания образов элементов r и s в N совпадают.

В последнем разделе первой части доказывается, что свойством Магнуса обладает фундаментальная группа неориентируемой компактной поверхности рода 2. Таким образом, вопрос о свойстве Магнуса остаётся открытым только для рода 3.

Во второй части диссертации исследуется расположение конечных подгрупп внутри гиперболических групп. Гиперболические группы можно определить несколькими способами. Чтобы воспользоваться одним из них, нам потребуется сперва определить δ-тонкие треугольники и δ-гиперболические метрические пространства.

Геодезический треугольник в метрическом пространстве назовём δ-тонким, где $\delta \in \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r \geqslant 0\}$, если каждая его сторона лежит в объединении δ-окрестностей двух других. Геодезическое метрическое пространство называется δ-гиперболическим для некоторого $\delta \geqslant 0$, если все геодезические треугольники в этом пространстве являются δ-тонкими.

В свою очередь, группа называется гиперболической, если её граф Кэли относительно некоторой конечной системы порождающих, будучи рассмотрен как метрическое пространство относительно словарной метрики, ассоциированной с этой порождающей системой, является δ-гиперболическим пространством для некоторого $\delta \geqslant 0$.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 2.1.1 *Пусть G – гиперболическая группа, не являющаяся почти циклической, и H – её конечная подгруппа. Для того, чтобы в G существовала свободная подгруппа F ранга два, такая что $\langle F, H\rangle = F * H$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого неединичного элемента h подгруппы H существовал элемент бесконечного порядка $g(h)$ группы G, такой что $\langle g(h)\rangle \cap C_G(h) = \{1\}$, где $C_G(h)$ – централизатор элемента h в группе G.*

Кроме того, подгруппа $F * H$ является квазивыпуклой (см. замечание 2.3.30) и условия теоремы 2.1.1 проверяются алгоритмически (см. конец раздела 2.4).

Заметим, что условия теоремы 2.1.1 являются необходимыми и достаточными для существования элемента бесконечного порядка $g \in G$, такого что $\langle g, H\rangle = \langle g\rangle * H$ и подгруппа $\langle g, H\rangle$ квазивыпукла в G. Доказывая необходимость условий, для каждого $h \in H$ положим $g(h) = g$. Достаточность этих условий следует из теоремы 2.1.1 очевидным образом.

Каждая подгруппа H гиперболической группы G действует левым умножением на границе группы G (см. опр. 2.2.14). В силу следствия 2.3.14, теорема 2.1.1 может быть сформулирована следующим образом:

Пусть G – гиперболическая группа, не являющаяся почти циклической, и H – её конечная подгруппа. Для того, чтобы в G существовала свободная подгруппа F ранга два, такая что $\langle F, H\rangle = F * H$, необходимо и достаточно, чтобы каждый неединичный элемент подгруппы H нетривиально действовал на границе группы G.

Далее будем считать, что G – неэлементарная гиперболическая группа и H – её конечная подгруппа. Зафиксируем некоторую конечную систему порождающих X группы G, целиком содержащую подгруппу H, и обозначим через Γ граф Кэли группы G относительно системы X. Граф Γ будем считать метрическим пространством относительно словарной метрики.

В разделе 2 собрана большая часть необходимых нам определений и утверждений из книг [11] и [6]. Приведём здесь некоторые из них.

Предположим, что $\mathcal{M}$ – метрическое пространство, $U \subseteq \mathcal{M}$, $U \neq \emptyset$, и H – неотрицательное вещественное число. Назовём *H-окрестностью* U в $\mathcal{M}$ и обозначим через $\mathscr{V}_H(U)$ множество

$$\{x \in \mathcal{M} : d(x, U) \leqslant H\}.$$

Определение 2.2.5 ([11], опр. 5.4). Пусть $\mathcal{M}$ – метрическое пространство, U и V – его непустые подмножества.

Назовём *расстоянием Хаусдорфа* между U и V и обозначим через $\mathscr{H}(U, V)$ число, равное

$$\inf\{\ H > 0 : U \subset \mathscr{V}_H(V),\ V \subset \mathscr{V}_H(U)\ \}$$

в случае, если эта нижняя грань существует, и ∞ – в противном случае.

Пусть A и B – непустые множества, и $P : A \to \mathcal{M}$, $F : B \to \mathcal{M}$ – два отображения. *Расстоянием Хаусдорфа* между P и F называется расстояние Хаусдорфа между образами $P(A)$ и $F(B)$ этих отображений.

Определение 2.2.3 ([11], опр. 5.1). Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0$ – метрические пространства с метриками d и d_0, соответственно, $F : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}$ – некоторое отображение, и $\lambda \geqslant 1$, $c \geqslant 0$, $L > 0$ – три числа. Говорят, что отображение F является

- *изометрическим вложением*, если для любых $s, t \in \mathcal{M}_0$ выполняется равенство

$$d(F(s), F(t)) = d_0(s, t) \ ;$$

- *локальной* (λ, c, L)*-квазиизометрией*, если для любых $s, t \in \mathcal{M}_0$, таких что $d_0(s, t) \leqslant L$, выполнены неравенства

$$\frac{1}{\lambda} d_0(s, t) - c \leqslant d(F(s), F(t)) \leqslant \lambda d_0(s, t) + c \ ;$$

- (λ, c)*-квазиизометрией*, если приведённые выше неравенства выполняются для всех $s, t \in \mathcal{M}_0$.

Определение 2.2.3 позволяет естественным образом определить три разновидности сегментов, лучей и прямых в графе Кэли: геодезические, квазигеодезические и локальные квазигеодезические (см. определение 2.2.4).

Следующее свойство локальных квазигеодезических в гиперболических метрических пространствах играет ключевую роль в наших рассуждениях:

Теорема 2.2.8 ([11], теорема 5.25). *Для произвольных чисел* $\delta \geqslant 0$*,* $\lambda \geqslant 1$ *и* $c \geqslant 0$ *существуют константы* $C = C(\delta, \lambda, c)$ *и* $L = L(\delta, \lambda, c)$*, для которых верно следующее утверждение:*

Пусть $\mathcal{M}$ *– собственное*[1] *метрическое пространство, которое к тому же является геодезическим и* δ*-гиперболическим. Тогда*

1. *для любого локального* (λ, c, L)*-квазилуча* $P : \mathbb{Z}_+ \to \mathcal{M}$ *существует луч* $F : \mathbb{Z}_+ \to \mathcal{M}$*, такой что* $P(0) = F(0)$ *и* $\mathscr{H}(P, F) \leqslant C$*;*

[1] Метрическое пространство $\mathcal{M}$ называется *собственным*, если каждый замкнутый шар в $\mathcal{M}$ является компактом.

2. *для любой локальной (λ, c, L)-квазигеодезической $P : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}$ существует геодезическая $F : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}$, такая что $\mathscr{H}(P, F) \leqslant C$.*

В третьем разделе мы проводим доказательство теоремы 2.1.1. Необходимость условий теоремы очевидна. Действительно, для каждого $h \in H\backslash\{1\}$ в качестве элемента $g(h)$ сгодится любой неединичный элемент подгруппы F. Доказательство достаточности условий не столь тривиально. Решающим его моментом является

Предложение 2.3.20. *Пусть x, y – два элемента группы G, порождающие свободную подгруппу ранга два, причём $x^{-i}hx^i \neq h$ для всех $i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и $h \in H\backslash\{1\}$. Тогда существуют числа $m, n \in \mathbb{Z}_+$, такие что для элементов $g_1 = x^{-n}y^mx^n$ и $g_2 = x^{-2n}y^mx^{2n}$ выполняется: $\langle g_1, g_2, H\rangle \cong F(g_1, g_2) * H$, где $F(g_1, g_2)$ – свободная группа с базисом g_1, g_2.*

Сведение теоремы 2.1.1 к предложению 2.3.20 осуществляется в два этапа. Во-первых, мы доказываем следующее утверждение:

Если для каждого $h \in H$ существует элемент бесконечного порядка $g(h) \in G$, такой что $C_G(h) \cap \langle g(h)\rangle = \{1\}$, то существует элемент бесконечного порядка $g \in G$, такой что для всех $h \in H\backslash\{1\}$ выполняется $C_G(h) \cap \langle g\rangle = \{1\}$ (т.е. $g^{-i}hg^i \neq h$ для всех $i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$).

Во-вторых, мы замечаем, что существует элемент бесконечного порядка $g' \in G$, такой что для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ элементы $x = g^n$ и $y = g'^n$ порождают свободную группу ранга 2. Существование элемента g' обеспечивает известный результата Громова:

Предложение 2.3.28 ([6], Ch. III.Г, prop. 3.20). *Для каждого конечного набора элементов $g_1, \ldots, g_r$ группы G существует целое число $n > 0$, такое что элементы $g_1^n, \ldots, g_r^n$ порождают в G свободную подгруппу (её ранг не превосходит r).*

В нашем случае достижимость ранга 2 обусловлена неэлементарностью группы G (см. лемму 2.3.29).

Остановимся подробнее на доказательстве предложения 2.3.20. При работе со свободным произведением групп мы используем понятие нормальной формы элемента:

Определение 2.3.17 ([18], Гл. IV, §1). Пусть группа G порождается двумя своими подгруппами A и B, причём $A \cap B = \{1\}$. *Нормальной формой*[2] будем называть последовательность $f_1, \dots, f_n$, где $n \geqslant 0$, элементов группы G, таких что каждый f_i отличен от $1 \in G$ и лежит либо в A, либо в B, причём два последовательных элемента f_i и f_{i+1} не лежат одновременно в A или B. Число n будем называть *длиной* нормальной формы.

Понятие нормальной формы элемента позволяет сформулировать критерий изоморфности группы свободному произведению двух своих подгрупп:

Предложение 2.3.18 ([18], Гл. IV, лемма 1.7). *Пусть группа G порождается двумя своими подгруппами A и B, причём $A \cap B = \{1\}$. Если любая нетривиальная нормальная форма задаёт неединичный элемент, то имеет место изоморфизм $G \cong A * B$.*

На протяжении доказательства предложения 2.3.20 мы используем нормальную форму элемента группы $\langle g_1, g_2, H\rangle$ относительно подгрупп $\langle g_1, g_2\rangle$ и H.

По элементам x, y конечной подгруппы H мы выбираем числа $\mu \geqslant 1$ и $d \geqslant 0$, а так же связываем с ними при помощи теоремы 2.2.8 число $L = L(\delta, \mu, d)$, где δ – константа гиперболичности группы G. Затем мы показываем, что степени m и n могут быть выбраны таким образом, что с каждым элементом $v \in \langle g_1, g_2, H\rangle$, обладающим нетривиальной нормальной формой чётной длины, можно связать (μ, d, L)-квазигеодезическую $P(v) : \mathbb{Z} \to \Gamma$, лежащую на конечном расстоянии Хаусдорфа от циклической подгруппы $\langle v\rangle$. После этого остаётся сделать два замечания.

Во-первых, каждый элемент $v \in \langle g_1, g_2, H\rangle$, обладащиий нетривиальной нормальной формой чётной длины, не равен $1 \in G$. Действительно, по теореме 2.2.8, существует геодезическая $F : \mathbb{Z} \to \Gamma$, такая что $\mathscr{H}(P(v), F) \leqslant C < \infty$, и из предположения $v = 1$ вытекает, что образ F лежит в ограниченной окрестности $1 \in \Gamma$, что противоречит геодезичности отображения F.

[2] В другой терминологии – *A, B-альтернированная последовательность*.

Во-вторых, для каждого элемента, обладающего нормальной формой нечётной длины выполняется альтернатива: либо он сопряжён с неединичным элементом одной из двух подгрупп $\langle g_1, g_2 \rangle$ и H, либо он сопряжён с элементом, имеющим нормальную форму чётной длины и, следовательно, не равным $1 \in G$.

Таким образом, каждый элемент группы $\langle g_1, g_2, H \rangle$, обладающий нетривиальной нормальной формой, отличен от $1 \in G$, и требуемый результат вытекает из предложения 2.3.18.

Посторение для данного элемента $v \in \langle g_1, g_2, H \rangle$ локальной квазигеодезической $P(v)$ – самый нетривиальный момент доказательства. Предварительно мы указываем набор (μ, d, L)-квазигеодезических путей $\mathbb{Z} \to \Gamma$. Отображение $P(v)$ "склеивается" из подсегментов путей этого набора. При этом соседние сегменты не стыкуются вершина в вершину, а имеют достаточно длинные общие части (длина общей части на каждом стыке превосходит L). Поэтому весь результат "склеивания" оказывается локальной (μ, d, L)-квазигеодезической. Заметим, что используемое разбиение отображения $P(v)$ на сегменты продиктовано нормальной формой элемента v. Описанные построения опираются на технические утверждения из третьего раздела, предшествующие предложению 2.3.20.

Определение 2.3.21. Подгруппа G_1 группы G называется *квазивыпуклой*, если существует такое число $R \geqslant 0$, что для любых элементов $u, v \in G_1$ и геодезического сегмента $\gamma \subset \Gamma$, соединяющего u и v, выполняется $\gamma \subseteq \mathscr{V}_R(G_1)$.

Доказательству квазивыпуклости подгруппы $\langle g_1, g_2 \rangle * H$ в G посвящено предложение 2.3.22.

В разделе 4 мы исследуем алгоритмичность проверки условий теоремы 2.1.1. Напомним, что X – порождающая система группы G, целиком содержащая конечную подгруппу H. С каждым элементом $h \in H \backslash \{1\}$ мы связываем некоторое регулярное множество $\mathcal{W}_h$ слов в алфавите $X \cup X^{-1}$. Затем показываем, что существование элемента бесконечного порядка $g_h \in G$, такого что $g_h^{-k} h g_h^k \neq h$ для всех $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ эквивалентно условию $\mathcal{W}_h \neq \emptyset$. Ввиду того, что множество $\mathcal{W}_h$ регулярно, проверка условия $\mathcal{W}_h \neq \emptyset$ алгоритмична.

Список литературы

[1] Богопольский О. В., Герасимов В. Н., *Конечные подгруппы гиперболических групп*, Алгебра и логика, **34**, 6 (1995), 619–622.

[2] С. Д. Бродский, *Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением*, УМН, **35:4**(214) (1980), 183

[3] *А.Л. Шмелькин, Два замечания о свободных разрешимых группах*, Алгебра и Логика, **6**, 2 (1967), 95–109.

[4] G.N. Arzhantseva, *On Quasiconvex Subgroups of Word Hyperbolic Groups*, Geometriae Dedicata 2001, **87**, 191 – 208.

[5] O. Bogopolski, *A surface group analogue of a theorem of Magnus*, in "Geometric Methods in Group Theory", Contemp. Math., **372**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 59–69.

[6] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren 319, Springer-Verlag, 1999.

[7] N. Brady, *Branched coverings of cubical complexes and subgroups of hyperbolic groups*, Journal of the London Mathematical Society (2), **60** (1999), 2, 461–480

[8] F. Dahmani, V. Guirardel, *The isomorphism problem for all hyperbolic groups*, http://arxiv.org/abs/1002.2590v1

[9] M. Edjvet, *A Magnus theorem for free products of locally indicable groups*, Glasgow Math. J., **31** (1989), 383–387.

[10] M. Greendlinger, *An analogue of a theorem of Magnus*, Arch. Math., **12** (1961), 94–96.

[11] É. Ghys and P. de la Harpe (eds.), *Sur les groupes hyperboliques d'aprés Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83. Birkhaüser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

[Э. Гис, П. де ля Арп (ред.), *Гиперболические группы по Михаилу Громову*, (ред. перевода Р.И. Григорчук), Москва, «Мир», 1992.]

[12] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (S.M. Gersten, ed.), MSRI Publ. 8, Springer-Verlag, 1987. P. 75–263.

[М. Громов, *Гиперболические группы* (ред. перевода О.В. Богопольский), Ижевск: институт компьютерных исследований, 2002.]

[13] J. Howie, How to generalize one-relator group theory, in: Combinatorial group theory and topology (S.M. Gersten and J.R. Stallings, eds.), 53–78, Ann. of Math. Stud., 111, Princeton Univ. Press, (1987).

[14] J. Howie, *Some results on one-relator surface groups*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), **10**, Special Issue, 255–262 (2004).

[15] J.Howie, Erratum: , *Some results on one-relator surface groups*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), **10**, Special Issue, 545–546 (2004).

[16] J. Howie and M. S. Saeed, *Freiheitssatze for one-relator quotients of surface groups and of limit groups*, Quart. J. Math. **60** (2009) 313–325

[17] I. Kapovich, *A Non-quasiconvex Subgroup of a Hyperbolic Group with an Exotic Limit Set*, New York J. Math. 1 (1995) 184–195.

[18] R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 1977.

[19] W. Magnus, *Über diskontinuerliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)*, J. reine angew. Math. **163** (1930), 141–165.

[20] E. Rips, *Subgroups of small cancellation groups*, Bull. Lon. Math. Soc.**14**, 1 (1982), 45–47.

[21] Z. Sela, *The isomorphism problem for hyperbolic groups. I*, Ann. of Math. **2**, 141 (1995), 2, 217–283.

Работы автора по теме диссертации

[22] К.С. Свиридов, *О свойстве Магнуса для фундаментальных групп неориентируемых поверхностей*, Материалы XLIV международной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика, Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006.

[23] К.С. Свиридов, *Свойство Магнуса для фундаментальных групп компактных поверхностей*, Мальцевские чтения, Новосибирск, 15-17 ноября 2005.

http://math.nsc.ru/conference/malmeet/05/SVIRIDOV.PS

[24] К.С. Свиридов, *О конечных подгруппах словесно гиперболических групп*, Мальцевские чтения, Новосибирск, 11-13 ноября 2008.

http://math.nsc.ru/conference/malmeet/08/

Abstracts/Sviridov.pdf

[25] К.С. Свиридов, *Дополнение конечной подгруппы гиперболической группы свободным множителем,* Алгебра и логика, 2010, **49**, 4, 520–554.

[26] К.С. Свиридов, *О нормальных замыканиях элементов метабелевых групп.* Препринт / РАН Сиб. отд-ние. Институт математики, №222.

[27] O. Bogopolski, K. Sviridov, *A Magnus theorem for some onerelator groups*, Geometry & Topology Monographs **14** (2008) 63–73.