РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. Соболева

На правах рукописи
УДК 519.21

СИДОРОВ Дмитрий Иванович

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ

Специальность 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск
2010

Работа выполнена в Институте математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Борисов Игорь Семенович

Официальные оппоненты:
д.ф.-м.н., профессор Тихомиров Александр Николаевич
к.ф.-м.н. Аркашов Николай Сергеевич

Ведущая организация:
Омский Государственный Университет
им. Ф. М. Достоевского

Защита состоится 22 сентября 2010 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. акад. Коптюга, 4, к. 417.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан «____ » августа 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.015.01 при Институте
математики СО РАН
д.ф.-м.н. Ю. В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию предельных распределений аддитивных статистик, построенных по выборкам так называемых скользящих средних. В работе изучаются формы зависимости таких наблюдений, доказана центральная предельная теорема для аналитических преобразований скользящих средних и исследуются предельные распределения U- и V-статистик.

Скользящие средние представляют собой весьма популярную модель последовательности стационарно связанных случайных величин. Зависимость между элементами такой последовательности может быть достаточно сильной. В частности, классические условия α- или φ-перемешивания, используемые при доказательстве предельных теорем для сумм слабо зависимых величин ([1], [5]), здесь уже могут не выполняться. При определенных ограничениях на параметры скользящих средних наличие тех или иных условий перемешивания для них исследовалось в [4], [11], [21]. Для некоторых классов скользящих средних отсутствие перемешивания установлено в работах [4], [5], [8], [21].

Интенсивное изучение предельного поведения последовательностей сумм нелинейных преобразований скользящих средних началось с конца 60-х годов прошлого века. Наиболее простая методика изучения этих объектов сводилась к аппроксимации исходных скользящих средних аналогичными средними, построенными по конечному отрезку порождающих коэффициентов, что позволяло сводить задачу к анализу предельного поведения сумм m-зависимых случайных величин ([1], [5]). Иные подходы, приводящие в некоторых случаях к более тонким результатам, основаны на применении техники теории мартингалов (см, например, [13]). В

1996–2006 годах были существенно ослаблены требования на коэффициенты так называемых *односторонних* скользящих средних ([14], [16], [19]), при этом, помимо мартингальных, использовалось ещё и их марковское свойство, которое отсутствует в более общей модели скользящих средних, рассматриваемых в диссертации. В работе [9] в 2007 г. были получены центральная и функциональная предельные теоремы для преобразований двусторонних скользящих средних также с ослабленными условиями на коэффициенты; причём в отличие от работ [1], [5] рассматривались только независимые порождающие величины.

Исследование U- и V- статистик начинается с работ Мизеса [18] и Хёфдинга [15]. Интерес к таким статистикам обусловлен многочисленными приложениями. В диссертации исследуются так называемые *канонические* U- и V-статистики.

В работах [6], [7], [12], [15], [17], [18] достаточно полно исследованы U- и V-статистики, построенные по независимым наблюдениям. Ряд работ ([10] и др.) посвящён исследованию наблюдений, представимых в виде детерминированного преобразования сильно зависимых (без условий перемешивания) гауссовских случайных величин. Слабо зависимые наблюдения рассматривались в работах [2] (условие ψ-перемешивания), [3] (условия α-, φ-перемешивания).

Цель работы. Основной целью работы является доказательство предельных теорем для аддитивных статистик, построенных по выборкам скользящих средних, а также исследование форм зависимости таких выборок.

Научная новизна. В диссертации найдены условия для скользящих средних, обеспечивающие φ-перемешивание; для некоторых классов доказано отсутствие перемешивания. Доказана центральная предельная теорема для аналитических (целых) преобразований скользящих средних, порождённых последовательностью стационарно свзанных величин с условием α-перемешивания. Найдено предельное распределение канонических U- и V-статистик произвольной размерности от наблюдений, имеющих структуру скользящих средних.

Апробация работы. Все результаты докладывались на объединённом семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики СО РАН под руководством академика А. А. Боровкова. Результаты работы также докладывались на 44-ой Международной Научной Студенческой Конференции (г. Новосибирск, 2006 г.), на 4-ой международной конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» (г. Новосибирск, 2006 г.), на Всероссийской конференции «Математика в современном мире», (г. Новосибирск, 2007 г.), на 2-м «Северном тройственном семинаре» (г. Стокгольм, Швеция, 2010 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [20]–[22].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Объём диссертации — 44 страницы.

Краткое содержание работы

Во Введении даётся обзор работ по теме исследований и обсуждается содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена исследованию форм зависимости скользящих средних.

Пусть $\{\xi_j;\, j \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве, $\{a_j;\, j \in \mathbb{Z}\}$ — некоторые вещественные числа, где $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.

Определение 1. *Скользящие средние* $\{X_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$, *порождённые последовательностью* $\{\xi_j\}$, *определяются равенством*

$$X_k := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{k-j}\xi_j. \tag{1}$$

Предполагается, что ряд в (1) сходится с вероятностью 1. В частности, это будет выполнено, если

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{k-j}|\mathbf{E}|\xi_j| < \infty, \tag{2}$$

а в случае, когда $\{\xi_j;\, j \in \mathbb{Z}\}$ независимы и центрированы, достаточно потребовать, чтобы

$$\sum_{j} a_{k-j}^2 \mathbf{E}\xi_j^2 < \infty. \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{A}_{-\infty}^{k} = \sigma\{X_j, j \le k\}$ и $\mathcal{A}_{k+m}^{\infty} = \sigma\{X_j, j \ge k+m\}$ — σ-алгебры, порождённые соответствующими наборами случайных величин.

Определение 2. *Последовательность* $\{X_k\}$ *удовлетворяет условию* α*-перемешивания, если при* $m \to \infty$

$$\alpha(m) := \sup_{k\in\mathbb{Z}, A\in\mathcal{A}_{-\infty}^{k}, B\in\mathcal{A}_{k+m}^{\infty}} |\mathbf{P}(B\cap A) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)| \to 0.$$

Определение 3. *Последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания, если при $m \to \infty$*

$$\varphi(m) := \sup_{k \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{A}_{-\infty}^{k}, B \in \mathcal{A}_{k+m}^{\infty}, \mathbf{P}(A) \neq 0} \frac{|\mathbf{P}(B \cap A) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)|}{\mathbf{P}(A)} \to 0.$$

Следующие четыре теоремы составляют основное содержание первой главы. В теоремах 1–3 описываются классы скользящих средних, для которых не выполнено то или иное условие перемешивания.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — независимые дискретные случайные величины, из которых хотя бы одна невырожденная. Кроме того, пусть существуют такие константы $0 < \delta \le \Delta < \infty$, не зависящие от j, что расстояние между любыми двумя атомами распределения ξ_j не меньше δ и не превосходит Δ. Наконец, пусть для всех k имеет место* (2) *сходится и выполнено одно из следующих двух условий:*

1) $a_j = \begin{cases} a_0 q^{|j|}, & j < 0, \\ a_0 a^j, & j \ge 0, \end{cases}$ $\quad a_0 \neq 0,\ 0 < q < 1,\ 0 < a \le \frac{\delta}{\Delta + \delta}$;

2) $0 < |a_{k_{j+1}}| \leqslant |a_{k_j}| \frac{\delta}{\Delta+\delta}$ *для всех $j \ge 0$, где $\{a_{k_j};\, j \ge 0\}$ — упорядоченные по убыванию абсолютных величин ненулевые коэффициенты a_j.*

Тогда последовательность $\{X_k\}$ не удовлетворяет условию α-перемешивания.

Если в условиях 1) *и* 2) *неравенства для a и a_{k_j} строгие, то утверждение останется верным и в случае произвольно зависимых случайных величин ξ_j.*

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — независимые случайные величины, $a_j > 0$ при всех j, ряд в* (2) *сходится при всех k, и выполнены условия:*

1) *существуют положительные константы x_0, c_0, c_1, c_2,*

такие что для некоторого целого j_0 и некоторого $j_1 > 0$

$$\sup_{x \ge x_0} \frac{\mathbf{P}(\xi_{j_0} \ge x + y)}{\mathbf{P}(\xi_{j_0} \ge x)} \le c_1 e^{-c_2 y} \quad \text{для всех } y \ge 0,$$

$$\mathbf{P}(\xi_j \ge x) \le c_1 e^{-c_2 x} \quad \text{для всех } x \ge x_0, \text{ если } |j| < j_1,$$

$$\mathbf{P}(\xi_j \ge x) \le c_0 \mathbf{P}(\xi_{j_0} \ge x) \quad \text{для всех } x \ge x_0, \text{ если } |j| \ge j_1;$$

2)

$$\inf_{j \in \mathbb{Z}} \frac{a_j}{a_{j+1}} > 0;$$

а также выполнено одно из следующих условий:

3)

$$\sum_{j \ne 0} a_j \ln |j| < \infty \text{ и } \inf_{j \in \mathbb{Z}} \frac{a_{j+1}}{a_j} > 0;$$

3′) *для некоторых $\delta > 0$, $c_3 > 0$*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j |j|^\delta < \infty \text{ и } \frac{a_{j+1}}{a_j} \ge \frac{c_3}{ln|j|} \text{ при } |j| \to \infty.$$

Тогда соответствующая последовательность $\{X_k\}$ не удовлетворяет условию φ-перемешивания.

Теорема 3. *Пусть $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность ограниченных случайных величин, из которых хотя бы одна невырожденная и не зависит от остальных, множество $A^- := \{j < 0 : a_j \ne 0\}$ бесконечно, и для любого k случайная величина X_k ограничена. Тогда последовательность $\{X_k\}$ не удовлетворяет условию φ-перемешивания.*

Если в условиях теоремы 3 не требовать бесконечность множества A^-, то φ-перемешивание последовательности $\{X_k\}$ возможно и в том случае, когда множество всех ненулевых коэффициентов a_j бесконечно.

Введём для некоторого $p \geq 1$ (включая случай $p = \infty$) дополнительное ограничение на коэффициенты $\{a_j\}$:

$$\begin{gathered}\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{j\geq k}|a_j|^p\Big)^{1/p} < \infty, \text{ если } p<\infty,\\ \sum_{k\geq 0}\sup_{j\geq k}|a_j| < \infty, \text{ если } p=\infty.\end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, из (4) следует, что $\sum |a_k| < \infty$. Обозначим через L линейный оператор, который отображает пространство суммируемых последовательностей l_1 в себя по следующему правилу: образ $Ly := ((Ly)_k; k \in \mathbb{Z})$ любого элемента $y := (y_j; j \in \mathbb{Z}) \in l_1$ задается формулой

$$(Ly)_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{k-j}y_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 4. *Пусть $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — независимые ограниченные случайные величины, имеющие соответственно плотности распределений $p_j(x)$, множество A^- конечно, и существует такое $C_1 > 0$, что*

$$\int |p_j(y+x) - p_j(y)|dy \leq C_1|x| \ \ \textit{при всех} \ \ j \ \textit{и} \ x.$$

Пусть также для некоторого $p \geq 1$ выполнено (4) и существует ограниченный обратный оператор L^{-1} в пространстве l_1. Кроме того, пусть для некоторого $C > 0$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\Big(\sup_j|\xi_j| \leq C\Big) = 1, \ \textit{если} \ p=1,\\ \mathbf{P}\Big(\big(\sum_j|\xi_j|^q\big)^{1/q} \leq C\Big) = 1, \ \textit{если} \ p>1,\end{gathered}$$

где $1/p + 1/q = 1$. Тогда последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания.

Во второй главе диссертации исследуются предельные распределения аддитивных статистик, построенных по наблюдениям, имеющим структуру скользящих средних, порождённых стационарной (в узком смысле) последовательностью $\{\xi_j; j \in \mathbb{Z}\}$.

В первом параграфе доказана центральная предельная теорема для аналитических на носителе распределения X_1 преобразований двусторонних скользящих средних. Рассмотрен случай стационарно связанных порождающих $\{\xi_j\}$ с α-перемешиванием при условии абсолютной суммируемости коэффициентов $\{a_i\}$; а также случай независимых порождающих $\{\xi_j\}$, при этом ряд $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i$ может быть расходящимся. Результаты параграфа содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 5. *Пусть $\alpha(n)$ — коэффициент α-перемешивания последовательности $\{\xi_j\}$,*

$$g(X_k) := \sum_{l\geq 0} \beta_l X_k^l,$$

$$A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| < \infty,$$

и выполнено одно из условий (α) или (α_0):

$$(\alpha) \begin{cases} \sum\limits_{l\geq 0} |\beta_l| \cdot l \cdot A^l \cdot \left(\mathbf{E}|\xi_0|^{(2+\delta)l}\right)^{\frac{1}{2+\delta}} < \infty, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha(n)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty \end{cases}$$

для некоторого $\delta > 0$, или

$$(\alpha_0) \begin{cases} \|\xi_0\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}|\xi_0| < \infty, \\ \sum\limits_{l\geq 0} |\beta_l| \cdot l \cdot C^l < \infty, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha(n) < \infty. \end{cases}$$

Тогда определена величина

$$\sigma^2 := \mathbf{D}g(X_0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} cov(g(X_0), g(X_k)).$$

Если $\sigma^2 \neq 0$, *то* $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \big(g(X_k) - \mathbf{E}g(X_0)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$.

Если $\sigma^2 = 0$, *то* $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \big(g(X_k) - \mathbf{E}g(X_0)\big) \underset{p}{\to} 0$.

Теорема 6. *Пусть* $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *— последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин,* $\mathbf{E}\xi_0^2 < \infty$; $\beta_l = 0$ *и* $\mathbf{E}\xi_0^l = 0$ *для всех нечётных* l,

$$\sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i a_{i+k}|\Big)^2 < \infty,$$

$$\sum_{l,m\geqslant 2} |\beta_l\beta_m| \Big(\sum_i a_i^2\Big)^{\frac{l+m}{2}} (l+m-1)!!\ \mathbf{E}|\xi|^{l+m} < \infty. \qquad (5)$$

Тогда ряд

$$g(X_k) := \sum_{l\geqslant 0} \beta_l X_k^l$$

сходится в средне квадратичном, и для $\{g(X_k)\}_{k\geq 1}$ *выполнена центральная предельная теорема.*

Во втором параграфе главы исследуется предельное поведение ещё одного типа статистик — канонических U- и V-статистик произвольного порядка, построенных по наблюдениям $\{X_k\}_{k\geq 1}$.

Определение 4. V*-статистики (или статистики Мизеса) размерности* $d \geq 2$ *с ядром* $f(t_1, \ldots, t_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *определяются равенством*

$$V_n = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{1\leq k_1,\ldots,k_d\leq n} f(X_{k_1}, \ldots, X_{k_d}), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

Определение 5. *U-статистики размерности $d \geq 2$ с ядром $f(t_1, \ldots, t_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ определяются равенством*

$$U_n = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{\substack{1 \leq k_1, \ldots, k_d \leq n \\ k_i \neq k_j \text{ при } i \neq j}} f(X_{k_1}, \ldots, X_{k_d}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Определение 6. *Статистика и её ядро $f(t_1, \ldots, t_d)$ называются каноническими (или вырожденными), если*

$$\mathbf{E} f(t_1, \ldots, t_{j-1}, X_j, t_{j+1}, \ldots, t_d) = 0$$

для любых $j = 1, \ldots, d$ и $t_{j_1}, \ldots, t_{j_d} \in \mathbb{R}$.

Исследование предельного распределения статистик проводится с помощью разложения ядра f по базисным функциям в ряд вида

$$f(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{i_1, \ldots, i_d} f_{i_1, \ldots, i_d} e_{i_1}(t_1) \ldots e_{i_d}(t_d). \tag{8}$$

Пусть функции $\{e_i(t) : i \geq 0\}$ образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве

$$L_2(\mathbb{R}, F) := \{g : \mathbf{E} g^2(X_1) < \infty\},$$

$e_0(t) \equiv 1$. Тогда $\mathbf{E} e_i(X_0) = 0$ для всех $i \geq 1$, $\mathbf{E} e_i^2(X_0) = 1$ для всех i. Функции $\{e_{i_1}(t_1) \ldots e_{i_d}(t_d) : i_1, \ldots, i_d \geq 0\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве

$$L_2(\mathbb{R}^d, F^d) := \{g : \mathbf{E} g^2(X_1^*, \ldots, X_d^*) < \infty\},$$

где $X_1^*, \ldots, X_d^*$ — независимые копии X_1. Если ядро f канонической статистики является функцией из $L_2(\mathbb{R}^d, F^d)$, то оно представимо в виде суммы ряда

$$f(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{i_1, \ldots, i_d \geq 1} f_{i_1, \ldots, i_d} e_{i_1}(t_1) \ldots e_{i_d}(t_d) \tag{9}$$

сходящегося в норме $L_2(\mathbb{R}^d, F^d)$.

Основной результат параграфа для случая стационарно связанных порождающих $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ с условием α-перемешивания содержится в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть*

$$\gamma_d = \sum_{i\geq 0}(i+1)^{d^+/2-1}\alpha(i) < \infty,$$

$$B(e_i) := \sum_{l\geq 1}|\beta_{i,l}|l^{d^+/2}A^l\|\xi_0\|_\infty^l < \infty, \tag{10}$$

если $\|\xi_0\|_\infty < \infty$, *или*

$$\gamma_d = \sum_{i\geq 0}(i+1)^{d^+/2-1}\alpha(i)^{\frac{\delta}{d^++\delta}} < \infty,$$

$$\sum_{l\geq 1}|\beta_{i,l}|lA^l\|\xi_0\|_{4+2\delta}^l < \infty \quad \textit{для всех} \quad i\geq 1, \tag{11}$$

$$B(e_i) := \sum_{l\geq 1}|\beta_{i,l}|l^{d^+/2}A^l\|\xi_0\|_{d^++\delta}^l,$$

если $\|\xi_0\|_\infty = \infty$, *где* d^+ — *целое чётное число,* $d^+ \geq d$, $\|\xi_0\|_p = \left(\mathbf{E}|\xi_0|^p\right)^{1/p}$. *Пусть также функция* $f(t_1,\ldots,t_d)$ *непрерывна, вырождена относительно распределения* X_1, *и*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_d\geq 1}|f_{i_1,\ldots,i_d}|(1+B(e_{i_1}))\ldots(1+B(e_{i_d})) < \infty. \tag{12}$$

Тогда

$$U_n \xrightarrow{d} \eta := \sum_{i_1,\ldots,i_d\geq 1} f_{i_1,\ldots,i_d}\prod_{j=1}^{\infty}H_{\#\{i_s:i_s=j\}}(\tau_j),$$

$$V_n \xrightarrow{d} \eta := \sum_{i_1,\dots,i_d \geq 1} f_{i_1,\dots,i_d} \tau_{i_1} \dots \tau_{i_d},$$

где $\{\tau_j\}_{j\geq 1}$ — *гауссовская последовательность центрированных случайных величин с ковариациями*

$$\sigma_{i,j} = cov(\tau_i, \tau_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} cov(e_i(X_0), e_j(X_k)),$$

$\#\{i_s : i_s = j\}$ — *количество элементов* i_s, *равных* j, $1 \leq s \leq d$, $H_k(t)$ — *полином Эрмита степени* k, *определяемый равенством*

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2}.$$

Отметим, что аналогичный результат (для более широкого класса ядер f) в случае независимых наблюдений $\{X_k; k \geq 1\}$ был получен в [17] и для наблюдений с α- и φ-перемешиванием — в работе [3].

В заключительной теореме рассмотрены статистики порядка 2, построенные по скользящим средним с независимыми порождающими величинами, при этом требования на коэффициенты разложения ядра существенно ослаблены.

Определим модуль непрерывности функции g как

$$\omega_g(h, M) = \sup_{|t|\leq h,\ |x|\leq M,\ |x+t|\leq M} |g(x+t) - g(x)|$$

и введём следующие условия:

$$\omega_{e_i}(h, M) \leq L_i h M^{\alpha_i} \text{ для всех } i \geq 1, \quad \mathbf{E}|\xi_0|^k < \infty\ \forall k, \tag{13}$$

$$\omega_{e_i}(h, M) \leq L_i h M^{\alpha} \text{ для всех } i \geq 1, \quad \mathbf{E}|\xi_0|^{4(\alpha+1)} < \infty, \tag{14}$$

$$\omega_{e_i}(h, \|\xi_0\|_\infty \sum |a_j|) \leq L_i h \text{ для всех } i \geq 1, \quad \|\xi_0\|_\infty < \infty; \tag{15}$$

здесь всюду предполагается, что $\sum_{i\in\mathbb{Z}}|a_i|<\infty$;

$$\sum_{i,j\geq 1}|f_{i,j}|L_iL_jK^{\alpha_i+\alpha_j+2}<\infty \quad \forall K>0, \tag{16}$$

$$\sum_{i,j\geq 1}|f_{i,j}|L_iL_j<\infty. \tag{17}$$

Теорема 8. *Пусть функция f непрерывна, вырождена относительно распределения X_1,*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}|a_i|<\infty, \quad \sum_{i,j\geq 1}|f_{i,j}|<\infty$$

и выполнен один из наборов условий: (13) *и* (16), *или* (14) *и* (17), *или* (15) *и* (17).

Тогда

$$U_n \xrightarrow{d} \eta := \sum_{i,j\geq 1} f_{i,j}H_{i,j}(\tau_i,\tau_j),$$

где $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$ — гауссовская последовательность центрированных случайных величин с ковариациями

$$\sigma_{i,j}=cov(\tau_i,\tau_j)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}cov(e_i(X_0),e_j(X_k)),$$

$H_{i,j}(\tau_i,\tau_j)=\tau_i\tau_j$ *при* $i\neq j$, *и* $H_{i,i}(\tau_i,\tau_i)=\tau_i^2-1$.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Игорю Семёновичу Борисову за постановку задачи, ценные советы и внимание к работе.

Список литературы

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

2. *Борисов И. С., Быстров А. А.* Предельные теоремы для канонических статистик Мизеса, построенных по зависимым наблюдениям. — Сиб. матем. жур., 2006, т. 47, № 6, с. 1205–1217.

3. *Борисов И. С., Володько Н. В.* Ортогональные ряды и предельные теоремы для канонических U- и V-статистик от стационарно связанных наблюдений. — Матем. труды, 2008, т. 11, № 1, с. 25–48.

4. *Городецкий В. В.* О свойстве сильного перемешивания для линейно порождённых последовательностей. — Теор. вер. и ее примен., 1977, т. 22, № 2, с. 421–423.

5. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные случайные величины. М., 1965.

6. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Теория U-статистик. Киев: Наукова Думка, 1989.

7. *Филиппова А. А.* Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения — Теор. вер. и ее примен., 1962, т. 7, № 1, с. 26–60.

8. *Andrews D. W. K.* Non-strong mixing autoregressive processes. — J. Appl. Prob., 1984, v. 21, N 4, p. 930–934.

9. *Dedecker, J.; Merlevede, F.; Volny, D.* On the Weak Invariance Principle for Non-Adapted Sequences under Projective Criteria — J. Theor. Probab., 2007, v. 20, p. 971–1004.

10. *Dehling, H.; Taqqu, M. S.* The impirical processes of some long-range dependent sequences with an application to U-statistics — Ann. Statist., 1989, v. 17, N 4, p. 1767–1783.

11. *Doukhan, P.* Mixing: Properties and Examples. Lecture Notes in Statistics, Springer, Berlin, 1994, v. 85.

12. *Dynkin E. B., Mandelbaum A.* Symmetric statistics, Poisson point processes and multiple Wiener integrals — Ann. Statist., 1983, v. 11, N 3, p. 739–745.

13. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale Limit Theory and Its Application. New York: Academic Press, 1980.

14. *Ho, H. C., Hsing, T.* Limit theorems for functionals of moving averages. — Ann. Statist., 1996, v. 24, p. 992–1024.

15. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution — Ann. Math. Statist. 1948, v. 19, p. 293–325.

16. *Peligrad, M., Utev S.* Recent advances in invariance principles for stationary sequences. — Probability Surveys, 2006, v. 3, p. 1–36.

17. *Rubin, H.; Vitale, R.* Asymptotic distribution of symmetric statistics. — Ann. Statist., 1980, v. 8, N 1, p. 165–170.

18. *Von Mises R.* On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions — Ann. Math. Statist. 1947, v. 18, p. 309–348.

19. *Wu, W. B.* Central limit theorems for functionals of linear processes and their applications. — Statist. Sinica, 2002, v. 12, p. 635–649.

Публикации по теме диссертации

20. *Борисов И. С., Сидоров Д. И.* Предельные теоремы для аддитивных статистик, построенных по выборкам скользящих средних. — Матем. труды, 2010, т. 13, № 2, с. 3–24

21. *Сидоров Д. И.* Об условиях перемешивания последовательностей скользящих средних. — Теор. вер. и ее примен., 2009, т. 54, № 2, с. 374–382.

22. *Sidorov D.* On mixing conditions for sequences of moving averages. — IV International Conference “Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications”, 2006, Novosibirsk, Abstracts of Comm., p. 29–30.