На правах рукописи

Семенова Марина Владимировна

Вложение решеток в решетки замкнутых подмножеств пространств замыкания

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2007

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН
Ершов Юрий Леонидович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Максимова Лариса Львовна,
доктор физико-математических наук, профессор
Пинус Александр Георгиевич
доктор физико-математических наук, профессор
Репницкий Владимир Брониславович

Ведущая организация:
Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится 18 октября 2007 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д.003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090 Новосибирск, пр. акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан “____” ___________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.003.015.02
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.
Оператор φ на множестве X называется *оператором замыкания*, если он обладает следующими свойствами:

(1) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$;
(2) $A \subseteq \varphi(A) \subseteq X$ для любого $A \subseteq X$;
(3) $\varphi^2(A) = \varphi(A)$ для любого $A \subseteq X$;
(4) $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ для любых $A \subseteq B \subseteq X$.

Пространством замыкания называется пара (X, φ), где X — множество, а φ — оператор замыкания на X. Если $\varphi(A) = A$, то множество $A \subseteq X$ наывается *замкнутым.* Множество $L(X, \varphi)$ всех замкнутых подмножеств пространства (X, φ) образует полную решетку относительно включения, в которой выполняются равенства

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i; \qquad \bigvee_{i \in I} A_i = \varphi(\bigcup_{i \in I} A_i)$$

для любого семейства подмножеств $A_i \subseteq X$, $i \in I$. Решетка $L(X, \varphi)$ называется *решеткой замкнутых подмножесть.*

К примеру, для любой алгебраической системы A и для любого $B \subseteq A$ пусть $\mathrm{Sub}(B)$ обозначает подсистему в A, порожденную множеством B. Тогда (A, Sub) является пространством замыкания, для которого решетка замкнутых подмножеств совпадает с *решеткой подсистем* $\mathrm{Sub}(A)$. Другой пример решетки замыкания можно указать, используя частично упорядоченные множества. Пусть $\langle P, \lhd \rangle$ является строго частично упорядоченным множеством, то есть бинарное отношение $\lhd$ на множестве P антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Сопоставляя каждому подмножеству в $\lhd$ его транзитивное замыкание, мы таким образом определяем оператор замыкания на $\lhd$. Соответствующая этому оператору решетка замкнутых подмножеств $\mathcal{O}(P, \lhd)$ называется *решеткой подпорядков.*

Конечно, два приведенных выше примера ни в коем случае не исчерпывают весь список решеток замыканий, которые служат объектом широкого круга исследований во многих областях алгебры, логики и, в частности, теории решеток, см. [1, 18, 4, 21, 38, 33]. Эти исследования связаны с изучением свойств решеток замкнутых подмножеств как конкретных пространств замыканий, так и абстрактных пространств замыканий в целом.

Как отмечено выше, решетка замкнутых подмножеств произвольного пространства замыкания полна. Верно и обратное (см., к примеру, Г. Гретцер [18]): любая полная решетка изоморфна решетке замкнутых подмножеств некоторого пространства замыкания, а любая алгебраическая решетка изоморфна решетке замкнутых подмножеств некоторого алгебраического (или конечно порожденного) пространства замыкания. Более того, любая алгебраическая решетка изоморфна решетке замкнутых подмножеств пространства замыкания вполне конкретного вида: например, согласно работе Г. Биркгофа и О. Фринка [14], каждая алгебраическая решетка изоморфна решетке подалгебр некоторой алгебры, а согласно работе Г. Гретцера и Э. Т. Шмидта [19], каждая алгебраическая решетка также изоморфна решетке конгруенций некоторой алгебры. Вопрос о том, изоморфна ли любая конечная решетка решетке конгруенций некоторой конечной алгебры конечной сигнатуры, является хорошо известной открытой проблемой. Согласно работе П. П. Палфи и П. Пудлака [22], положительное решение этой проблемы равносильно тому, что каждая конечная решетка изоморфна интервалу в решетке подгрупп некоторой конечной группы.

Процитированные результаты показывают, что для некоторых пространств замыкания класс их решеток замкнутых подмножеств достаточно сложно устроен, поскольку содержит в себе все полные решетки. В обшем случае, рассматривая некий конкретный класс $\mathcal{C}$ пространств замыкания, можно задаться вопросом о взаимосвязи класса $\mathcal{C}$ и класса $\mathrm{Cl}(\mathcal{C})$ решеток замкнутых подмножеств пространств, принадлежащих $\mathcal{C}$. Другими словами, можно спросить, в какой степени сложность класса $\mathcal{C}$ определяет сложность класса $\mathrm{Cl}(\mathcal{C})$, а также какие ограничения на пространства из $\mathcal{C}$ следует наложить, чтобы класс $\mathrm{Cl}(\mathcal{C})$ их решеток замкнутых подмножеств обладал определенными решеточными свойствами. В частности, для фиксированного класса $\mathcal{C}$ пространств замыкания можно поставить такие проблемы:

(1) описать класс $\mathrm{Cl}(\mathcal{C})$, а также класс $\mathrm{Cl}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{Fin}$ конечных решеток, принадлежащих $\mathrm{Cl}(\mathcal{C})$;

(2) описать класс [конечных] решеток, вложимых в решетки из $\mathrm{Cl}(\mathcal{C})$;

(3) являются ли эти классы аксиоматизируемыми [в классе конечных решеток]? если это так, то можно ли аксиоматизировать эти классы (квази)тождествами [в классе конечных решеток]?

Класс $\mathcal{C}$ пространств замыкания называется [*конечно*] *решеточно универсальным*, если любая [конечная] решетка вложима в решетку замкнутых подмножеств некоторого [конечного] пространства замыкания, принадлежащего $\mathcal{C}$.

Вопрос о возможности вложить решетки, лежащие в каком-то определенном классе, в решетки замкнутых подмножеств конкретных пространств замыкания имеет долгую историю. В этом направлении было получено много замечательных результатов. Среди первых, ставших к настоящему времени классическими, следует отметить результат Ф. М. Уитмена [41] 1946 года, утверждающий (в эквивалентной формулировке), что любую решетку можно вложить в решетку подгрупп некоторой группы. Таким образом, класс групп решеточно универсален. Вопрос о возможности вложить любую конечную решетку в решетку подгрупп конечной группы долго оставался без ответа и был решен положительно в 1980 году в известной работе П. Пудлака и И. Тумы [24]. Более того, в работе [40] И. Тума получил уточнение результата Уитмена, показав, что интервалы в решетках подгрупп исчерпывают все алгебраические решетки; другое доказательство этого результата И. Тумы можно найти в работе В. Б. Репницкого [31].

В работах В. Б. Репницкого [5]–[7] и [25]–[30] было проведено глубокое исследование решеток, вложимых в решетки подалгебр различных конкретных классов алгебр. Полученные им результаты нашли отражение в монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [38, Глава VIII]. В частности, В. Б. Репницкий показал в [5], что класс полурешеток, класс коммутативных 2-нильполугрупп, а также класс коммутативных полугрупп без идемпотентов с сокращением и с однозначным извлечением корня являются решеточно универсальными, а в работе [6] им же была установлена решеточная универсальность многообразия групп, задаваемого тождеством $x^n = 1$ для всякого $n \geqslant 665$. Кроме того, в работе [6] было показано, что всякое ненильпотентвное многообразие ассоциативных колец, всякое нетривиальное многообразие решеток, а также класс всех булевых алгебр решеточно универсальны.

Другой решеточно универсальный класс пространств замыкания был обнаружен в работе Д. Бредхина и Б. Шайна [15]. Они показали, что любая решетка вложима в подходящую решетку подпорядков.

В работе К. В. Адаричевой, В. А. Горбунова и В. И. Туманова [11] исследуется вопрос о вложении решеток в решетки замкнутых подмножеств так называемых *выпуклых геометрий*, то есть пространств замыкания (X, φ), обладающих следующим *свойством антизамены*:

$$a \in \varphi(Y \cup \{b\}) \backslash \varphi(Y), \ a \neq b \quad \text{влечет} \quad b \notin \varphi(Y \cup \{a\})$$

для любых a, $b \in X$ и любого $Y \subseteq X$. Отметим, что в [11, Теорема 2.8] указан один решеточно универсальный класс выпуклых геометрий конкретного вида.

Понятие выпуклой геометрии является обобщение понятия выпуклости в векторных пространствах. Пусть V — векторное простнранство над линейно упорядоченным телом $\mathbb{F}$. Множество $U \subseteq V$ *выпукло*, если $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ для всех $x, y \in U$ и всех $\lambda \in [0,1] \subseteq \mathbb{F}$. Сопоставляя каждому подмножеству $X \subseteq V$ его выпуклую оболочку (то есть наименьшее выпуклое подмножество в V, содержащее X), мы таким образом определяем оператор замыкания на V, который, как нетрудно видеть, обладает свойством антизамены.

Хорошо известно, что любая конечная выпуклая геометрия *полудистрибутивна вверх*, то есть удовлетворяет следующему квазитождеству

$$\forall xyz \ x \vee y = x \vee z \rightarrow x \vee y = x \vee (y \wedge z).$$

Таким образом, класс выпуклых геометрий не имеет ни единого шанса быть конечно решеточно универсальным. Тем не менее, в работе [11, Теорема 1.11] среди прочего показано, что любая конечная полудистрибутивная вверх решетка вложима в решетку замкнутых подмножеств некоторой конечной выпуклой геометрии. Таким образом класс выпуклых геометрий можно считать конечно решеточно универсальным в классе полудистрибутивных вверх решеток. В связи с этим результатом в работе [11] была предложена проблема 3, которая звучит так:

> *существует ли класс $\mathcal{U}$ конечных выпуклых геометрий конкретного типа, содержащий все конечные полудистрибутивные вверх решетки в качестве подрешеток своих решеток замкнутых подмножеств?*

Другими словами, существует ли класс $\mathcal{U}$ выпуклых геометрий конкретного типа, такой что любая полудистрибутивная вверх решетка вложима в некоторую решетку из $\mathrm{Cl}(\mathcal{U})$? Ответ на этот вопрос для конечных полурешеток следует из результата, полученного независимо В. Б. Репницким [25] и К. В. Адаричевой [8]. Они показали, что конечная решетка вложима в решетку подполурешеток некоторой конечной полурешетки тогда и только тогда, когда она ограничена снизу. Другой результат того же характера был доказан Б. Сиваком в работе [43], где показано, что конечная решетка вложима в решетку подпорядков некоторого конечного частично упорядоченного множества тогда и только тогда, когда она ограничена снизу. Здесь следует также упомянуть характеризацию класса конечных ограниченных снизу решеток в терминах вложимости в решетки подполугрупп различных свободных полугрупп, которая была получена В. Б. Репницким в работе [25]. Он показал, что конечная решетка ограничена снизу в том и только том случае, когда она вложима в решетку подполугрупп свободной [коммутативной] полугруппы, а также свободной [коммутативной] 2-нильполугруппы.

Заметим, что класс конечных ограниченных снизу решеток является собственным подклассом в классе конечных полудистрибутивных вверх решеток (см. монографию Р. Фриза, Я. Ежека и Дж. Б. Нейшна [16]).

Вопрос о существовании конкретного класса выпуклых геометрий, конечно решеточно универсального в классе полудистрибутивных вверх решеток, мотивировал изучение выпуклых геометрий, возникающих из понятия выпуклости в векторных пространствах и в частично упорядоченных множествах. Решетки замкнутых подмножеств таких пространств замыкания, называемые также решетками выпуклых подмножеств, изучались несколькими авторами. В работе Ф. Верунга и соискателя [3] было показано, что любая решетка вложима в решетку выпуклых подмножеств некоторого векторного пространства над любым линейно упорядоченным телом. Много интересных результатов о решетках выпуклых подмножеств векторных пространств (в частности, результаты об элементарных свойствах таких решеток) можно найти в работе Дж. Бергмана [12], см. также работу К. В. Адаричевой [9]. Что же касается выпуклых геометрий, возникающих из понятия выпуклости в частично упорядоченных множествах, то в работе Ф. Верунга и соискателя [34] было установлено, что такие геометрии не могут быть конечно решеточно универсальными даже в классе полудистрибутивных вверх решеток: класс решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств, образует конечно базируемое подмногообразие в квазимногообразии полудистрибутивных вверх решеток. Изучение решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств для некоторых конкретных классов частично упорядоченных множеств, было проведено в работах [34, 35, 37], см. также обзор недавних результатов в [49]. Отметим также, что довольно сложное описание решеток, изоморфных решеткам выпуклых подмножеств частично упорядоченных множеств, было получено в работе Г. Биркгофа и М. К. Беннет [13].

Хотелось бы отметить здесь также большое число работ, связанных с изучением решеток клонов над конечными и бесконечными множествами. К примеру А. А. Булатов [2] показал, что любая конечная решетка вложима в решетку клонов над множеством, имеющим, по крайней мере, четыре элемента, а М. Пинскер [23] показал, что полные подрешетки решеток клонов исчерпывают весь класс алгебраических решеток. Исчерпывающий обзор недавних результатов о решетках клонов можно найти в работе М. Гольдштерна и М. Пинскера [17].

Цель работы.
Данная работа посвящена изучению решеток, вложимых в решетки замкнутых подмножеств пространств замыкания конкретного вида: изучаются классы решеток, вложимых в решетки подпорядков и в решетки подполугрупп. Получены результаты о характеризации указанных классов решеток для различных классов частичных порядков и полугрупп. Полученные результаты позволяют, в частности, сделать заключение об аксиоматизируемости этих классов решеток на языке первого порядка.

Основные результаты.
В работе получены следующие основные результаты:
1. Показано, что класс решеток, вложимых в решетки подпорядков частичных порядков высоты не более, чем n, образует конечно базируемое многообразие для любого $n < \omega$. Указан конкретный базис тождеств для этого многообразия.
2. Показано, что класс решеток, вложимых в решетки подполугрупп n-нильпотентных полугрупп, образует конечно базируемое многообразие для любого $0 < n < \omega$. Указан конкретный базис тождеств для этого многообразия. Этот результат дает синтаксическое решение проблемы 28.14.2 из монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [38].
3. Дано синтаксическое описание класса конечных решеток, вложимых в решетки подполурешеток [n-арных] деревьев. Этот класс является собственным подклассом класса конечных ограниченных снизу решеток и аксиоматизируется тождествами в классе конечных решеток [для всякого положительного $n < \omega$].

Основные методы.
В работе используются теоретико-решеточные методы. В частности, широко применяется метод вложения решеток в производные решетки, основанный на использовании раскрашенных лесов, который был развит в работах Ф. Верунга и соискателя [34, 35, 36, 3].

Теоретическая и практическая ценность.
Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области теории решеток, универсальной алгебры и дискретной математики, а также для чтения специальных курсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в указанных областях.

Научная новизна работы.
Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Апробация результатов работы.
Результаты работы были представлены автором в пленарных докладах на международной конференции "Arbeitstagung Allgemeine Algebra" в Потсдаме (2004) и Клагенфурте (2007), на международной конференции "Алгебра и анализ" в Казани (2004) и на международной конференции "Мальцевские чтения" в Новосибирске (2005). Кроме того, результаты работы были представлены в докладах автора на международных конференциях "Arbeitstagung Allgemeine Algebra" в Оломоуце (2002), Дрездене (2004), Бендлево (2006), Будапеште (2006), на Летней школе по общей алгебре и упорядоченным множествам в Тале (2002), на международной конференции SIDIM XX в Маягуэсе (2005), на Девятом азиатском логическом коллоквиуме в Новосибирске (2005), на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения П. Г. Канторовича и 70-летию Л. Н. Шеврина в Екатеринбурге (2005), на международной конференции "Logic Colloquium" в Наймегене (2006), на конференции по алгебре и геометрии в Телче (2006), на конференции "Treillis Marseillais" в Марселе (2007), а также на международной конференции "Order, Algebra, and Logics" в Нэшвилле (2007).

По теме диссертационной работы автором были сделаны доклады на общеинститутском семинаре Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также на научных семинарах Новосибирского государственного университета, Уральского государственного университета, Института математики и механики УрО РАН, Карлова университета в Праге, университета Кана, технического университета Дармштадта, технического университета Варшавы, университета Масарика в Брно, технического университета Вены. Кроме того, в течение осеннего семестра 2006/2007 учебного года автором был прочитан курс лекций “Вложение решеток в решетки подполугрупп” на кафедре алгебры математико-физического факультета Карлова университета в Праге.

Публикации.
Все основные результаты диссертации опубликованы в [42]–[49].

Структура и объем работы.
Диссертация состоит из введения, трех разделов, разбитых на параграфы, и списка литературы. Утверждения нумеруются тремя цифрами: первая обозначает номер раздела, вторая — номер параграфа в разделе, а третья — номер утверждения в параграфе. Нумерация выносных формул двойная: первая цифра обозначает номер раздела, а вторая — номер формулы в главе. Список литературы содержит 68 наименований. Объем диссертации составляет страниц.

Содержание работы

Первый раздел носит вспомогательный характер. В параграфе 1.1 приведены все необходимые определения. В параграфе 1.2 устанавливаются некоторые вспомогательные результаты, которые используются на протяжении всей диссертационной работы. Параграф 1.3 содержит основное определение, определение раскрашенного леса, которое используется впоследствии при доказательстве всех основных результатов.

Второй раздел посвящен изучению решеток подпорядков частично упорядоченных множеств. Если $\langle X, \lhd\rangle$ — строго частично упорядоченное множество, то, сопоставляя каждому подмножеству $\lhd$ его транзитивное замыкание, можно определить оператор замыкания на $\lhd$, который, как нетрудно проверить, удовлетворяет свойству антизамены. Решетка $\mathcal{O}(X, \lhd)$ замкнутых относительно этого оператора подмножеств в $\lhd$ называется решеткой подпорядков. В параграфе 2.1 устанавливаются некоторые основные свойства решеток подпорядков. Кроме того, в этом параграфе даны описания частичных порядков, для которых соответствующие им решетки подпорядков коалгебраичны, полудистрибутивны вверх, ограничены снизу. Напомним, что решеточный гомоморфизм $h\colon K \to L$ называется *ограниченным снизу*, если для любого $a \in L$ множество $\{x \in K \mid h(x) \geq a\}$ либо пусто, либо содержит наименьший элемент. Мы говорим также, что решетка L *ограничена снизу*, если любой гомоморфизм $h\colon K \to L$, где K — конечно порожденная решетка, является ограниченным снизу, см. [16], а также работу К. В. Адаричевой и В. А. Горбунова [10].

Как упоминалось выше, Д. Бредихин и Б. Шайн [15] показали, что любая решетка вложима в решетку подпорядков подходящего частичного порядка. В параграфе 2.2 приводится независимое доказательство этого результата, использующее технику раскрашенных лесов.

Параграф 2.3 содержит доказательство одного из основных результатов диссертационной работы. Для того, чтобы его процитировать, введем необходимые определения. Зафиксируем конечное дерево $(T, \trianglelefteq)$, обладающее тем свойством, что любой немаксимальный элемент имеет по крайней мере два верхних покрытия. Пусть $\min T = \{a\}$. Построим решеточные термы U_T и V_T от переменных из множества $\{x_t \mid t \in T\}$ индукцией по высоте дерева $(T, \trianglelefteq)$. Если высота T равна 1, то полагаем

$$\begin{aligned} U_T =& x_a \wedge \bigvee\{x_b \mid a \prec b\}, \\ V_T =& \bigvee_{a \prec b} (x_a \wedge \bigvee\{x_c \mid a \prec c, c \neq b\}); \end{aligned}$$

если же высота T строго больше 1, то полагаем

$$\begin{aligned} U_T =& x_a \wedge \bigvee\{U_{\uparrow b} \mid a \prec b\}, \\ V_T =& \bigvee_{a \prec b, b \in \max T} \big(x_a \wedge \bigvee\{U_{\uparrow c} \mid a \prec c, c \neq b\}\big) \vee \\ & \vee \bigvee_{a \prec b, b \notin \max T} \big(x_a \wedge (V_{\uparrow b} \vee \bigvee\{U_{\uparrow c} \mid a \prec c, c \neq b\})\big). \end{aligned}$$

Если дерево $(T, \trianglelefteq)$ обладает тем свойством, что любой немаксимальный элемент имеет по крайней мере два верхних покрытия, то следуя [43], мы говорим, что решетка L *T-дистрибутивна*, если L удовлетворяет тождеству $U_T = V_T$; это тождество равносильно неравенству $U_T \leq V_T$.

Согласно работе А. Хуна [20], решетка L называется *n-дистрибутивной*, если она удовлетворяет тождеству

$$a \wedge \big(\bigvee_{i \leqslant n} x_i\big) = \bigvee_{i \leqslant n} \big(a \wedge \bigvee_{j \neq i} x_j\big).$$

В частности, свойство 1-дистрибутивности совпадает со свойством дистрибутивности. Отметим, что n-дистрибутивность есть частный случай древесной дистрибутивности. Следует лишь рассмотреть дерево

$$T = \{a, b_0, \dots, b_n\},$$

в котором $a \prec b_i$ для всех $i \leqslant n$.

Конечное дерево $(T, \trianglelefteq)$ мы называем *n-деревом*, если $|\max T| = n+1$, и каждый элемент $a \in T \setminus \max T$ имеет по крайней мере два верхних покрытия. Сформулируем первый основной результат диссертационной работы.

Теорема 1. *Произвольная решетка L вложима в решетку подпорядков некоторого частично упорядоченного множества высоты, не превосходящей n, $0 < n < \omega$, тогда и только тогда, когда L T-дистрибутивна для любого n-дерева T.*

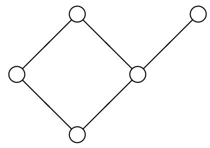
Из доказательства теоремы 1 мы получаем такое утверждение:

Следствие 2. *Класс конечных решеток, вложимых в решетки подпорядков частично упорядоченных множеств высоты, не превосходящей n, образует псевдомногообразие для любого положительного $n < \omega$.*

Кроме того, в качестве следствия мы также получаем уже упоминавшуюся теорему Б. Сивака [43] о том, что конечная решетка ограничена снизу тогда и только тогда, когда она вложима в решетку подпорядков некоторого конечного частичного порядка.

Третий раздел посвящен изучению решеток подполугрупп. Напомним, что в работе В. Б. Репницкого [5], показано, что класс полурешеток, класс коммутативных 2-нильполугрупп, а также класс коммутативных полугрупп без идемпотентов с сокращением и с однозначным извлечением корня являются решеточно универсальными. Доказательство этого результата в [5] существенным образом использует отмеченный выше результат Д. Бредихина и Б. Шайна о том, что любая решетка вложима в решетку подпорядков подходящего частичного порядка. Более точно, в работе [5] автор показывает, что любая решетка подпорядков вложима в решетку подполугрупп $\mathrm{Sub}(S)$ для некоторой полугруппы S, принадлежащей соответствующему классу. В связи с этим в монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [38] был поставлен вопрос (см. вопрос VIII.7) о существовании доказательства этого результата В. Б. Репницкого, которое не использовало бы решетки подпорядков.

В параграфе 3.1 приводится доказательство следующей теоремы, впервые доказанной В. Б. Репницким в [5], не использующее решетки подпорядков, что дает положительный ответ на вопрос VIII.7 из [38]



(более точно, на ту часть вопроса, что касается решеток подполурешеток).

Теорема 3. *Любая решетка вложима в решетку подполурешеток подходящей полурешетки.*

В качестве следствия из доказательства теоремы 3 в параграфе 3.2 мы получаем уже упоминавшийся результат В. Б. Репницкого из [25] о том, что конечная решетка ограничена снизу тогда и только тогда, когда она вложима в решетку подполурешеток подходящей конечной полурешетки. Кроме того, в параграфе 3.2 изучаются также конечные решетки, вложимые в решетки подполурешеток полурешеток, диаграммы Хассе которых являются деревьями. Следующее утверждение является одним из основных результатов диссертационной работы.

Теорема 4. *Класс конечных решеток, вложимых в решетки подполурешеток полурешеток, диаграммы Хассе которых являются деревьями, аксиоматизируется тождествами в классе конечных решеток и поэтому образует псевдомногообразие.*

В параграфе 3.2 указан также конкретный базис тождеств для этого псевдомногообразия. Из выполнимости этих тождеств вытекает, в частности, что любая подрешетка решетки подполурешеток полурешетки, являющейся деревом, ограничена снизу, а само псевдомногообразие, о котором идет речь в теореме 4, образует собственный подкласс в классе конечных ограниченных снизу решеток. Таким образом, не для всякой конечной полурешетки ее решетка подполурешеток вложима в решетку подполурешеток конечного дерева; пример такой полурешетки (относительно пересечения) приведен на рис.

Кроме этого, в качестве следствия из доказательства теоремы 4 получен такой результат:

Следствие 5. *Класс конечных решеток, вложимых в решетки подполурешеток полурешеток, диаграммы Хассе которых являются n-арными деревьями, аксиоматизируется тождествами в классе конечных решеток и поэтому образует псевдомногообразие для любого положительного $n < \omega$.*

Параграфы 3.3–3.4 посвящены доказательству следующего результата, который, как было отмечено выше, впервые был доказан В. Б. Репницким в [25] с использованием решеток подпорядков. Доказательство этого результата, приведенное в параграфах 3.3–3.4, использует метод раскрашенных лесов и не использует решетки подпорядков, что дает положительный ответ на на ту часть вопроса VIII.7 из [38], что касается решеток подполугрупп полугрупп с сокращением и 2-нильполугрупп, соответственно.

Теорема 6. *Для произвольной решетки L выполняется следующее:*

(1) *L вложима в решетку подполугупп подходящей коммутативной полугруппы без идемпотентов с сокращением и однозначным извлечением корня;*
(2) *L вложима в решетку подполугупп подходящей коммутативной 2-нильполугруппы.*

Параграф 3.6 посвящен изучению решеток подполугрупп нильпотентных полугрупп. В монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [38] была поставлена проблема 28.14.2, связаная с нахождением описания класса [конечных] решеток, вложимых в решетки подполугрупп n-нильпотентных полугрупп для фиксированного положительного $n < \omega$. Легко видеть, что класс таких решеток замкнут относительно подрешеток и [конечных] прямых произведений для любого положительного $n < \omega$. В параграфе 3.5 показано, что этот класс является конечно базируемым [псевдо]многообразием для любого положительного $n < \omega$ (то есть, он также замкнут относительно гомоморфных образов), и указан конкретный базис тождеств для него. Следующая теорема является одним из основных результатов диссертационной работы и уточняет теорему 1.

Теорема 7. *Для решетки L и для положительного $n < \omega$ следующие условия равносильны:*

(1) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой коммутативной $(n+1)$-нильпотентной 2-нильполугруппы;*
(2) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой коммутативной $(n+1)$-нильпотентной полугруппы;*

(3) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой $(n+1)$-нильпотентной полугруппы;*
(4) *L вложима в решетку подпорядков некоторого частичного порядка высоты не более, чем n;*
(5) *L является T-дистрибутивной для любого n-дерева T.*

Основным средством при доказательтве теоремы 7 является вновь техника раскрашенных лесов. В качестве сдедствия из этой теоремы мы получаем такое утверждение:

Следствие 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любого положительного $n < \omega$ класс конечных решеток, вложимых в решетки подполугрупп n-нильпотентных полугрупп, аксиоматизируем конечным числом тождеств в классе конечных решеток, а поэтому является псевдомногообразием;*
(2) *конечная решетка вложима в решетку подполугрупп n-нильпотентной полугруппы для некоторого положительного $n < \omega$ тогда и только тогда, когда она ограничена снизу.*

Параграф 3.6 посвящен изучению решеток подполугрупп свободных полугрупп. Проблема 28.14.1, поставленная в монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [38], связана с описанием решеток, вложимых в решетки подполугрупп таких полугрупп. В частности, там спрашивается, совпадают ли классы решеток, вложимых в решетки подполугрупп свободных полугрупп, свободных коммутативных полугрупп, свободных 2-нильполугрупп, свободных коммутативных 2-нильполугрупп, свободных полурешеток. Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос. Отметим, что в работе В. Б. Репницкого [25] было доказано совпадение классов конечных решеток, вложимых в решетки подполугрупп всех перечисленных классов свободных полугрупп, с классом конечных ограниченных снизу решеток.

Теорема 9. *Для любой решетки L, для любого бесконечного кардинала κ следующие условия равносильны:*

(1) *L вложима в решетку подполугрупп свободной полугруппы ранга κ;*
(2) *L вложима в решетку подполугрупп свободной коммутативной полугруппы ранга κ;*
(3) *L вложима в решетку подполугрупп свободной 2-нильполугруппы ранга κ;*

(4) *L вложима в решетку подполугрупп свободной коммутативной 2-нильполугруппы ранга κ;*
(5) *L вложима в решетку подполурешеток свободной полурешетки ранга κ;*
(6) *L вложима в декартово произведение $\prod_{\xi<\kappa} L_\xi$, где L_ξ является конечной ограниченной снизу решеткой для любого $\xi < \kappa$.*

Основным средством при доказательтве теоремы 9 является техника раскрашенных лесов. Из теоремы 9 немедленно вытекает, что класс решеток, вложимых в решетки подполугрупп свободных полугрупп, не аксиоматизируем на языке первого порядка. В качестве сдедствия мы получаем также и такое утверждение:

Следствие 10. *Решетка идеалов любой свободной решетки вложима в решетку подполугрупп некоторой свободной полугруппы. В частности, решетки подполугрупп свободных полугрупп не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству.*

Автор глубоко признателен Виктору Александровичу Горбунову за введение в проблематику теории решеток.

Автор глубоко признателен Юрию Леонидовичу Ершову за внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Список литературы

[1] *Г. Биркгоф*, “Теория решеток”, Москва, Наука, 1984.
[2] *А. А. Булатов*, Конечные подрешетки решеток клонов, Алгебра и логика **33** (1994), 514–549.
[3] *Ф. Верунг, М. В. Семенова*, Подрешетки решеток выпуклых подмножеств векторных пространств, Алгебра и логика **43** (2004), 261–290.
[4] *В. А. Горбунов*, “Алгебраическая теория квазимногообразий”, Новосибирск, Научная книга, 1999. English translation by Plenum, New York, 1998.
[5] *В. Б. Репницкий*, О представлении решеток решетками подполугрупп, Изв. ВУЗов. Математика no. 1 (1996), 60–70.
[6] *В. Б. Репницкий*, Решеточная универсальность свободных бернсайдовых групп, Алгебра и логика **35** (1996), 587–611.
[7] *В. Б. Репницкий*, О решеточно универсальных многообразиях алгебр, Изв. ВУЗов. Математика no. 5 (1997), 53–59.
[8] *K. V. Adaricheva*, Two embedding theorems for lower bounded lattices, Algebra Universalis **36** (1996), 425–430.
[9] *K. V. Adaricheva*, Join-semidistributive lattices of relatively convex sets, Contributions to General Algebra **14** (2003), 1–14.
[10] *K. V. Adaricheva, V. A. Gorbunov*, On lower bounded lattices, Algebra Universalis **46** (2001), 203–213.

[11] *K. V. Adaricheva*, *V. A. Gorbunov*, and *V. I. Tumanov*, Join-semidistributive lattices and convex geometries, Adv. Math. **173** (2003), 1–49.

[12] *G. M. Bergman*, On lattices of convex sets in $\mathbb{R}^n$, Algebra Universalis **53** (2005), 357–395.

[13] *G. Birkhoff*, *M. K. Bennett*, The convexity lattice of a poset, Order **2** (1985), 223–242.

[14] *G. Birkhoff*, *O. Frink*, Representations of lattices by sets, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 299–316.

[15] *D. Bredikhin*, *B. Schein*, Representation of ordered semigroups and lattices by binary relations, Colloq. Math. **39** (1978), 1–12.

[16] *R. Freese*, *J. Ježek*, and *J. B. Nation*, "Free Lattices", Mathematical Surveys and Monographs, **42**, Amer. Math. Soc., Providence, 1995.

[17] *M. Goldstern*, *M. Pinsker*, A survey of clones on infinite sets, accepted in Algebra Universalis.

[18] *G. Grätzer*, "General Lattice Theory. Second edition", Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[19] *G. Grätzer*, *E. T. Schmidt*, Characterizations of congruence lattices of abstract algebras, Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), 34–59.

[20] *A. P. Huhn*, Schwach distributive Verbände. I, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (1972), 297–305.

[21] *B. Korte*, *L. Lovász*, and *R. Schrader*, "Greedoids", Springer Verlag, Berlin, 1991.

[22] *P. P. Pálfy*, *P. Pudlák*, Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups, Algebra Universalis **11** (1980), 22–27.

[23] *M. Pinsker*, Algebraic lattices are complete sublattices of the clone lattice over an infinite set, accepted in Fund. Math.

[24] *P. Pudlák*, *J. Tůma*, Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice, Algebra Universalis **10** (1980), 74–95.

[25] *V. B. Repnitskiĭ*, On finite lattices embeddable in subsemigroup lattices, Semigroup Forum **46** (1993), 388–397.

[26] *V. B. Repnitskiĭ*, On subgroup lattices without non-trivial identities, Algebra Universalis **31** (1994), 379–389.

[27] *V. B. Repnitskiĭ*, On the representation of lattices by subsemigroup lattices of bands, Semigroup Forum **51** (1995), 379–389.

[28] *V. B. Repnitskiĭ*, On the representation of lattices by subgroup lattices, Algebra Universalis **37** (1997), 81–105.

[29] *V. B. Repnitskiĭ*, Nilpotency of algebras and identities on subalgebra lattices, in "Semigroups with applications, including semigroup rings" (Eds. S. Kublanovsky, A. Mikhalev, J. Ponizovski), Walter de Gruyter, Berlin, 1998, pp. 315–328.

[30] *V. B. Repnitskiĭ*, Varieties of semigroups with non-trivial identities on subsemigroup lattices, Algebra Universalis **46** (2001), 69–73.

[31] *V. B. Repnitskiĭ*, A new proof of Tůma's theorem on intervals in subgroup lattices, Contributions to General Algebra **16** (2005), 213–230.

[32] *V. B. Repnitskiĭ*, *J. Tůma*, On intervals in subgroup lattices of locally finite groups, manuscript, 2006.

[33] *R. Schmidt*, "Subgroup Lattices of Groups", Expositions in Math. **14**, de Gruyter, 1994.

[34] *M. Semenova*, *F. Wehrung*, Sublattices of lattices of order-convex sets, I. The main representation theorem, J. Algebra **277** (2004), 543–564.

[35] *M. Semenova*, *F. Wehrung*, Sublattices of lattices of order-convex sets, II. Posets of finite length, Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), 543–564.

[36] *M. Semenova*, *F. Wehrung*, Sublattices of lattices of order-convex sets, III. The case of totally ordered sets, Internat. J. Algebra Comput. **14** (2004), 357–387.

[37] *M. V. Semenova*, *A. Zamojska-Dzienio*, On lattices embeddable into lattices of order-convex sets. Case of trees, accepted in Internat. J. Algebra Comput.

[38] *L. N. Shevrin*, *A. Ja. Ovsyannikov*, "Semigroups and their subsemigroup lattices", Dordrecht, Kluwer Academic publishers, 1996.

[39] *B. Sivák*, Representation of finite lattices by orders on finite sets, Math. Slovaca **28** (1978), 203–215.

[40] *J. Tůma*, Intervals in subgroup lattices of infinite groups, J. Algebra **125** (1989), 367–399.

[41] *Ph. M. Whitman*, Lattices, equivalence relations, and subgroups, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 507–522.

Работы автора по теме диссертации

[42] *М. В. Семенова*, Решетки подпорядков, Сиб. Мат. Ж. **40**, no. 3 (1999), 673–682.

[43] *М. В. Семенова*, О решетках, вложимых в решетки подпорядков, Алгебра и логика **44**, no. 4 (2005), 483–511.

[44] *М. В. Семенова*, О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. I. Полурешетки, Алгебра и логика **45**, no. 2 (2006), 215–230.

[45] *М. В. Семенова*, О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. II. Полугруппы с сокращением, Алгебра и логика **45**, no. 4 (2006), 436–446.

[46] *М. В. Семенова*, О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. III. Нильпотентные полугруппы, Сиб. Мат. Ж. **48**, no. 1 (2007), 192–204.

[47] *M. V. Semenova*, On lattices embeddable into subsemigroup lattices. IV. Free semigroups, Semigroup Forum **74**, no. 2 (2007), 191–205.

[48] *М. В. Семенова*, О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. V. Деревья, Сиб. Мат. Ж. **48**, no. 4 (2007), 894–913.

[49] *M. V. Semenova*, Closure lattices of closure spaces, Contributions to General Algebra **18** (2007).