На правах рукописи

ЗАВАРНИЦИН Андрей Витальевич

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ПРОБЛЕМА РАСПОЗНАВАЕМОСТИ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 2008

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН
Мазуров Виктор Данилович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Казарин Лев Сергеевич

доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев Анатолий Семёнович

доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси
Шеметков Леонид Александрович

Ведущая организация:

Южно-Уральский государственный университет

Защита диссертации состоится «14» ноября 2008 г. в «14» ч. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан «____» ________ 2008 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А.Н.Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Множество порядков элементов конечной группы несёт большую информацию о её строении. Классическим примером, иллюстрирующим глубину связи между периодом и строением конечной группы, является стоявшая открытой более 60-ти лет ослабленная проблема Бернсайда. Из положительного решения этой проблемы [4, 1, 2] следует, что число конечных групп данного периода с данным числом порождающих конечно, а значит, ограничено их строение. Другим важным примером является теорема Фейта–Томпсона [11], утверждающая, что конечная группа без элементов порядка 2 является разрешимой.

В постклассификационной теории конечных групп порядки элементов стали играть заметную роль в проблемах распознаваемости по арифметическим свойствам. Когда возникли первые примеры групп, однозначно характеризуемых по совокупности порядков своих элементов, естественно возникла задача нахождения и изучения всех групп, обладающих этими или близкими свойствами.

Как оказалось, проблема распознаваемости потребовала применения самых современных знаний и методов, таких как свойства автоморфизмов и подгрупповое строение конечных простых групп и групп лиева типа, связь этих групп с линейными алгебраическими группами, теория обыкновенных и модулярных представлений. Настоящая диссертация предлагает новые и опирается на уже известные результаты из всех этих областей, однако больший акцент сделан на приложение методов теории представлений к вопросам распознаваемости.

Приступим теперь к более конкретному изложению основной проблематики диссертации. Общий список используемых терминов и обозначений (большинство из которых стандартны) приведён в конце диссертации.

Всюду в дальнейшем под *спектром* конечной группы G, обозначаемом через $\omega(G)$, будем понимать множество порядков всех элементов из G. Другими словами,

$$\omega(G) = \left\{\, n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists\; g \in G \,:\, |g| = n \right\}.$$

К примеру, спектром знакопеременной группы степени 5 является множество $\omega(\mathrm{Alt}_5) = \{1, 2, 3, 5\}$.

Назовём конечную группу G *распознаваемой (по спектру)*, если для любой конечной группы H равенство спектров $\omega(G) = \omega(H)$ влечёт изоморфизм $G \cong H$. Центральной проблемой, на которой основана диссертация, является

Проблема 1. *Найти все распознаваемые по спектру конечные группы.*

Сразу отметим, что эта проблема представляет интерес только для простых или близких к простым групп, поскольку известно [7], что группа, обладающая нетривиальной разрешимой нормальной подгруппой не является распознаваемой. К настоящему времени распознаваемые группы описаны во многих классах конечных простых и почти простых групп (см. обзор [8]). Тем не менее, полное решение проблемы 1 даже в классе простых групп $\mathrm{L}_n(q)$ пока представляется отдалённым.

Конечные группы, спектры которых совпадают, будем называть *изоспектральными.* Для конечной группы G обозначим через $h(G)$ число (возможно, ∞) попарно неизоморфных изоспектральных ей конечных групп. Таким образом, распознаваемость группы G эквивалентна равенству $h(G) = 1$. В частности, проблему 1 можно сформулировать в уточнённом виде, как проблему нахождения значения $h(G)$ для заданной конечной группы G. Именно эту задачу мы и будем подразумевать под проблемой распознаваемости для данной группы.

Группу G, для которой $h(G) = \infty$ (соответственно, $1 < h(G) < \infty$), будем называть *нераспознаваемой* (соответственно, *почти распознаваемой*) по спектру. К примеру, нераспознаваемой группой является, очевидно, группа $\mathbb{Z}_2$. Первые примеры почти распознаваемых групп появились в работах [5, 6]. Все эти группы G удовлетворяют условию $h(G) = 2$, и до недавнего времени было неизвестно, существуют ли группы, для которых $h(G) \notin \{1, 2, \infty\}$. В связи с этим В. Ши поставил следующий вопрос, внесённый в Коуровскую тетрадь [10, проблема 13.63]:

Проблема 2. *Верно ли, что существует натуральное число k такое, что для любой конечной группы G либо $h(G) \leqslant r$, либо $h(G) = \infty$?*

В настоящей диссертации получено решение данной проблемы. А именно, показана сюръективность отображения $h : G \mapsto h(G)$ из класса конечных групп в множество $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Накрытием группы G назовём произвольную группу H, входящую в короткую точную последовательность

$$1 \to N \to H \to G \to 1.$$

Накрытие называется *собственным*, если группа N в этой последовательности нетривиальна.

Решение проблемы распознаваемости для конечной группы G включает в себя проверку следующего естественного ослабленного условия:

$$\omega(G) \neq \omega(H) \text{ для всякого собственного накрытия } H \text{ группы } G.$$

Группу G, удовлетворяющую этому условию будем называть *распознаваемой (по спектру) среди своих накрытий.* Хотя свойство распознаваемости среди накрытий формально более слабое, чем просто распознаваемость, его проверка для некоторых групп может быть очень трудоёмкой и часто приводит к изучению модулярных представлений. Это объясняется тем, что изучение спектра накрытия H группы G сводится к рассмотрению случая, когда H — расщепляемое расширение элементарной абелевой p-группы N, где p — некоторое простое число, с помощью G, причём G действует неприводимо на N. Так возникают G-модули над полем положительной характеристики p, и для проверки неравенства $\omega(G) \neq \omega(H)$ требуется использовать информацию о неподвижных точках в этих модулях p'-элементов, либо о размерах жордановых клеток p-элементов группы G. В случае, когда G — группа лиева типа, определённая над полем некоторой характеристики r, рассмотрение естественно разбивается на два случая. При $p = r$ речь идёт об *эквихарактеристических модулях* группы G. Как известно из классических результатов Стейнберга [9], теория эквихарактеристических модулей конечных групп лиева типа тесно связана с теорий представлений полупростых алгебраических групп положительной характеристики. Однако, непосредственное применение этих результатов довольно ограничено, поскольку описания строения неприводимых модулей таких групп в общем случае не существует. В кросс-характеристическом же случае (т. е. когда $p \neq r$) информации о явном строении G-модулей ещё меньше, и здесь приходится использовать подгрупповое строение группы G с целью применения теорем типа Холла-Хигмэна.

Неразрешимые симметрические и знакопеременные группы составляют первый широкий класс групп, для которого была установлена распознаваемость среди накрытий (см. [25]), но до сих пор полностью не решена проблема распознаваемости по спектру. Следующая проблема была внесена в Коуровскую тетрадь В. Д. Мазуровым (см. [10, проблема 14.60]):

Проблема 3. *Пусть G — собственное накрытие конечной простой группы $L = \mathrm{L}_n(q)$, где $n \geqslant 3$. Верно ли, что в G найдётся элемент, порядок которого отличен от порядка любого элемента из L?*

Другими словами, в проблеме 3 спрашивается, являются ли простые группы $L_n(q)$, где $n \geqslant 3$, распознаваемыми среди накрытий. В данной диссертации получено решение этой проблемы. Отметим, что уже в случае $n = 3$ предложенное доказательство не обходится без существенного применения теории представлений.

Простые неабелевы группы, не являющиеся распознаваемыми среди накрытий очень редки. В [7] были получены два единственных известных до недавнего времени примера таких групп, а именно группы $U_3(3)$ и $U_3(7)$. Отвечая на вопрос из проблемы 3, мы находим новый пример такой группы.

Граф простых чисел $\Gamma(G)$ конечной группы G, также часто называемый *графом Грюнберга–Кегеля*, — это граф, множеством вершин которого является совокупность простых делителей порядка $|G|$, в котором две вершины p, q соединены ребром если и только если G содержит элемент порядка pq. Граф простых чисел впервые возник и исследовался в работах [3, 12, 15] в связи с вопросами строения целочисленных групповых алгебр и представлений конечных групп. Например, было доказано, что для любой конечной группы G число компонент связности графа $\Gamma(G)$ не превосходит 6.

Непосредственная связь графа простых чисел и спектра очевидна: по спектру $\omega(G)$ данной группы G однозначно восстанавливается граф $\Gamma(G)$. Заметим, что для группы G определение её графа $\Gamma(G)$ является более простой задачей, чем нахождение спектра, т. к. для этого достаточно знать существование только элементов, порядка pq при различных $p, q \in \pi(G)$. Поэтому естественно возникает вопрос, насколько граф $\Gamma(G)$ определяет группу G. Группу G назовём *распознаваемой по графу*, если для любой конечной группы H равенство графов $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ (как графов с отмеченными вершинами) влечёт изоморфизм $H \cong G$. Распознаваемость по графу сильнее распознаваемости по спектру. Первые примеры распознаваемых по графу групп появились в работе [14]. Таких примеров было известно лишь конечное число (и все они были из числа спорадических простых групп).

По аналогии с упомянутым ранее значением $h(G)$ для данной группы G можно обозначить через $h_\Gamma(G)$ число (возможно, ∞) неизоморфных конечных групп, граф простых чисел которых совпадает с $\Gamma(G)$. Таким образом, возникает следующая проблема распознаваемости групп по графу, которая представляет интерес.

Проблема 4. *Для каждой конечной группы G найти значение $h_\Gamma(G)$.*

В частности, представляют интерес вопросы о существовании бесконечного числа групп, распознаваемых по графу, а также групп G, для которых $1 < h_{\Gamma}(G) < \infty$. На эти вопросы также получен ответ в данной диссертации.

Подводя итог, можно отметить, что основной целью диссертации является получение результатов в рамках решения указанных выше проблем 1–4, опираясь, в частности, на известные и разрабатывая новые методы из теории представлений.

Основные результаты диссертации.

1. Получено исчерпывающее решение проблемы распознаваемости по спектру для простых групп $\mathrm{L}_3(q)$ и $\mathrm{U}_3(q)$ и для симметрических групп простой степени $r \geqslant 7$. Найден критерий распознаваемости симметрических групп степени $r+1$, для простого числа $r \geqslant 11$.

2. Предложена модель для построения неприводимых (рациональных конечномерных) модулей простой алгебраической группы $\mathrm{SL}_3(F)$ над алгебраически замкнутым полем F простой характеристики в пространствах полиномов и, как следствие, всех абсолютно неприводимых эквихарактеристических представлений конечных простых групп $\mathrm{L}_3(q)$ и $\mathrm{U}_3(q)$.

3. Получено решение проблемы 13.63 из Коуровской тетради о существовании для любого натурального числа k ровно k конечных изоспектральных групп.

4. Получено решение проблемы 14.60 из Коуровской тетради о распознаваемости по спектру среди накрытий простых групп $\mathrm{L}_n(p^m)$. При этом случай, когда n много больше чем p, был рассмотрен в совместной с В. Д. Мазуровым работе. В качестве следствия доказана распознаваемость по спектру групп $\mathrm{L}_n(2)$ при любом $n > 2$.

5. Построен первый пример бесконечной серии конечных групп, распознаваемых по графу, а также первый пример группы G, удовлетворяющей равенству $h_{\Gamma}(G) = 2$.

Отметим, что результаты 1, 3, 5 опираются на классификацию конечных простых групп.

Научная новизна. Все основные и ряд вспомогательных результатов диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований как вопросов распознаваемости, так и других проблем теории групп и их представлений. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории групп (конечные группы, группы лиева типа, алгебраические группы), методы теории представлений конечных и алгебраических групп, методы линейной алгебры, а также элементы теории чисел и теории графов.

Апробация работы. Результаты диссертации в период с 2002 по 2008 год были представлены на международных конференциях в Новосибирске, Москве, Нальчике, Гуаруже (Бразилия). В частности, на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2006 г.) и международной школе-конференции по теории групп (Нальчик, 2006 г.) автором были сделаны пленарные доклады по теме диссертации. Результаты неоднократно докладывались на семинарах Института математики СО РАН и НГУ «Теория групп» и «Алгебра и логика», а также на общеинститутском семинаре ИМ СО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в журналах [17] – [24], входящих в перечень ВАК для докторских диссертаций. См. также [29, 32].

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из четырёх глав (включая введение), списка обозначений, предметного указателя и литературы. Она изложена на 119 страницах текста. Библиография содержит 91 наименование.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, главы на параграфы, а параграфы, в свою очередь, на пункты. Основные результаты каждой главы (теоремы и их следствия), а также открытые и решённые вопросы (проблемы) явным образом сформулированы в первом параграфе главы. Нумерация всех результатов (теорем, предложений, лемм, следствий) тройная: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа, третья — номер утверждения в текущем параграфе. Нумерация проблем сквозная.

Глава 1. Введение

В этой вводной главе формулируется постановка задачи, обосновывается актуальность проблематики, приводится общая характеристика и формулировка результатов, а также объясняется структура диссертации.

Глава 2. Распознавание по спектру почти простых групп

Данная глава посвящена распознаваемости по спектру некоторых классов линейных, унитарных и симметрических групп. Получено полное решение проблемы распознаваемости для простых групп $\mathrm{L}_3(q)$ и $\mathrm{U}_3(q)$. В качестве следствия получено решение проблемы 13.63 из Коуровской тетради. Кроме того, доказана распознаваемость по спектру симметрических групп Sym_r, $r \geqslant 7$, и получен критерий распознаваемости групп Sym_{r+1}, $r \geqslant 11$, где в обоих случаях r — простое число. Здесь же предложена модель для построения неприводимых модулей простой алгебраической группы $\mathrm{SL}_3(F)$ над алгебраически замкнутым полем F положительной характеристики в пространствах полиномов и, как следствие, всех абсолютно неприводимых эквихарактеристических представлений простых групп $\mathrm{L}_3(q)$ и $\mathrm{U}_3(q)$.

Из вспомогательных утверждений главы, представляющих самостоятельный интерес, отметим следующее. Получена общая формула (см. предложение 2.4.12), описывающая спектр автоморфных расширений групп лиева типа, определённых над конечным полем, через спектры групп того же типа, определённых над меньшим полем. Также представляет интерес теоретико-числовая гипотеза (проблема 5), связанная с существованием особых простых чисел Мерсенна.

Прежде чем сформулировать результаты главы, введём следующие обозначения. Для натурального числа m и простого числа p запись $p^r \,||\, m$ означает, что $p^r \mid m$ и $p^{r+1} \nmid m$. Напомним, что простое число вида $p = 2^k - 1$ для некоторого k называется простым числом Мерсенна. Назовём простое число Мерсенна p *особым*, если число $p^2 - p + 1$ также простое. Например, 3 и 7 — особые простые числа Мерсенна. Обозначим через $A.B$ произвольное расширение группы A с помощью группы B, в котором A является нормальным делителем.

В данной главе доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.1.1. *Пусть $L = \mathrm{L}_3(q)$, где $q = p^k$.*

(*i*) *Если $q \equiv 1 \pmod 6$, то $h(L) = r + 1$, где $3^r \,||\, k$, и $\omega(G) = \omega(L)$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет $L \leqslant G \leqslant L.3^r$, где $L.3^r$ — расширение L посредством группы полевых автоморфизмов порядка 3^r.*

(*ii*) *Если* $q \equiv 5, 9 \pmod{12}$, *то* $h(L) = 2$ *и* $\omega(L) = \omega(L.2)$, *где* $L.2$ — *расширение* L *с помощью графового автоморфизма.*

(*iii*) *Если* q *чётно либо* $3 < q \equiv 3, 11 \pmod{12}$, *то* $h(L) = 1$.

(*iv*) $h(\mathrm{L}_3(3)) = \infty$.

Отметим, что, поскольку q — степень простого числа, сравнение $q \equiv 9 \pmod{12}$ выполнено тогда и только тогда, когда $q = 3^n$ при n чётном, а $q \equiv 3 \pmod{12}$ тогда и только тогда, когда $q = 3^n$ при n нечётном.

Следствие 2.1.2. *Отображение* $h : G \mapsto h(G)$ *из класса конечных групп в множество* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *является сюръективным. В частности, вопрос из проблемы 2 имеет отрицательный ответ.*

Теорема 2.1.3. *Пусть* $U = \mathrm{U}_3(q)$, *где* $q = p^k > 2$.

(*i*) *Если* $5 < q \equiv -1 \pmod 6$, *то* $h(U) = r + 1$, *где* $3^r \,||\, k$, *и* $\omega(G) = \omega(U)$ *тогда и только тогда, когда* G *удовлетворяет условию* $U \leqslant G \leqslant U.3^r$, *где* $U.3^r$ — *расширение* U *посредством группы полевых автоморфизмом порядка* 3^r.

(*ii*) *Если* $q \equiv 3, 7 \pmod{12}$ *и* q — *не особое простое число Мерсенна, то* $h(U) = 2$ *и* $\omega(U) = \omega(U.2)$, *где* $U.2$ — *расширение* U *посредством группы полевых автоморфизмов порядка* 2.

(*iii*) *Если* q *чётно или* $q \equiv 1, 9 \pmod{12}$, *то* $h(U) = 1$.

(*iv*) *Если* $q = 5$ *или* q — *особое простое число Мерсенна, то* $h(U) = \infty$.

Отметим, что из теоремы 2.1.3(v) следует, что распознаваемость некоторых унитарных групп $\mathrm{U}_3(q)$ связана с существованием особых простых чисел Мерсенна. В этой связи сделаем ещё ряд замечаний. Нам не известно, существуют ли особые простые числа Мерсенна, кроме 3 и 7, и мы предполагаем, что они не существуют. По крайней мере из всех 44 известных на сегодняшний день (2008 г.) простых чисел Мерсенна, самое большее из которых равно $2^{32582657} - 1$, только 3 и 7 являются особыми. На самом деле можно поставить следующий более общий вопрос, ответ на который нам не известен.

Проблема 5. *Существует ли простое число* $k > 3$, *для которого число* $p^2 - p + 1$, *где* $p = 2^k - 1$, *является простым?*

Было проверено с помощью компьютера, что такого $k < 100000$ не существует. Также можно показать, что такое k должно удовлетворять сравнению $k \equiv 1 \pmod{12}$.

Теорема 2.1.4. *Пусть $r \geqslant 11$ — простое число. Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Симметрическая группа Sym_r распознаваема по спектру.*

(ii) *Симметрическая группа степени Sym_{r+1} распознаваема тогда и только тогда, когда $\omega(\mathrm{Sym}_{r+1}) \neq \omega(G)$ для любого собственного накрытия $G = N.A$ произвольной группы N с помощью группы A, изоморфной Sym_r или Alt_r.*

Неприводимые модули алгебраических групп $\mathrm{SL}_3(F)$ и соответствующие им неприводимые эквихарактеристические представления конечных групп $\mathrm{SL}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ описываются в следующем утверждении. Существенным здесь является пункт (ii), в котором приведены базовые (т.е p-ограниченные) неприводимые модули этих групп. Подробности см. в §3 главы 2 диссертации.

Теорема 2.1.5. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Пусть $G = \mathrm{SL}_3(F)$.*

(i) *Неприводимые рациональные FG-модули $M_{a,b}$ находятся во взаимно однозначном соответствии со своими старшими весами $\chi_{a,b}$, $a, b \geqslant 0$. Пусть p-разложения чисел a и b имеют вид*

$$a = a_0 + pa_1 + \ldots + p^l a_l, \ 0 \leqslant a_i \leqslant p-1,$$

$$b = b_0 + pb_1 + \ldots + p^l b_l, \ \ 0 \leqslant b_i \leqslant p-1.$$

Тогда $M_{a,b} \cong M_{a_0,b_0} \otimes M_{a_1,b_1}^{\rho} \otimes \ldots \otimes M_{a_l,b_l}^{\rho^l}$.

(ii) *Если $0 \leqslant a, b \leqslant p-1$, то $M_{a,b} \cong \overline{W}_{a,b}$, где $\overline{W}_{a,b}$ — модуль, определённый в лемме 2.3.8.*

(iii) *Пусть $q = p^k$. Тогда все q^2 абсолютно неприводимых представлений конечных групп $\mathrm{SL}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ над полем характеристики p эквивалентны ограничениям на эти группы представлений G, соответствующих модулям $M_{a,b}$, где $0 \leqslant a, b \leqslant q-1$.*

Результаты этой главы опубликованы в работах [17, 18, 19, 29, 28].

Глава 3. Порядки элементов в накрытиях простых групп

Данная глава посвящена решению проблемы 14.60 из Коуровской тетради (см. проблему 3), а именно распознаваемости среди накрытий простых линейных групп $\mathrm{L}_n(q)$. Как будет показано (и уже было видно в предыдущей главе при рассмотрении случая $n = 3$), эта задача существенно использует свойства неприводимых модулярных представлений групп $\mathrm{L}_n(q)$ в характеристике определения. Так как теория таких представлений параллельна теории представлений в характеристике определения групп $\mathrm{U}_n(q)$, мы естественно формулируем многие результаты сразу для линейных и унитарных групп $\mathrm{L}_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Первый основной результат (теорема 3.1.1) состоит в том, что если простая линейная или унитарная группа, определённая над полем характеристики p и имеющая достаточно большую размерность по сравнению с p, действует на конечномерном векторном пространстве над полем той же характеристики p, то соответствующее полупрямое произведение содержит элемент, порядок которого отличен от всех порядков элементов исходной простой группы. В качестве следствия отсюда вытекает (следствие 3.1.2), что группа $\mathrm{GL}_n(2) \cong \mathrm{L}_n(2)$ всех невырожденных матриц размерности n над полем порядка 2 распознаваема по спектру при любом $n > 2$.

Доказательство теоремы 3.1.1 опирается на свойства централизаторов элементов в неприводимых модулях группы $\mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$ (предложение 3.2.4), которые, однако, не удаётся применить для случая, когда размерность n группы меньше характеристики определения p. В этом случае использован другой подход, опирающийся на структуру множества весов неприводимых эквихарактеристических модулей алгебраических групп типа A_l. Таким образом, получен второй основной результат (теорема 3.1.3), который обобщает теорему 3.1.1 и состоит в том, что если простая группа $G = \mathrm{L}_n^\varepsilon(q)$, где либо $n \neq 4$, либо q простое или чётное, действует на векторном пространстве над полем характеристики определения группы G, то соответствующее полупрямое произведение содержит элемент, порядок которого отличен от порядков всех элементов группы G. Отсюда, в частности, вытекает частичный положительный ответ на проблему 14.60 из Коуровской тетради (следствие 3.1.4).

Исключённый выше случай в проблеме 14.60, а именно когда $L = \mathrm{L}_4(q)$, где q непростое и нечётное, потребовал более тонкого анализа. Оказалось, что в общем случае эти группы не всегда являются распознаваемыми среди накрытий. Мы строим явно один контрпример и предполагаем существование бесконечного множества подобных примеров среди групп $\mathrm{L}_4(q)$.

Из вспомогательных утверждений главы, представляющих самостоятельный интерес, хотелось бы отметить уточнение предложения Супруненко–Залесского о строении множества весов неприводимых p-ограниченных модулей алгебраических групп типа A_l (см. предложение 3.3.10), а также обобщение известной теоретико-числовой теоремы Жигмонди на "унитарный" случай (см. предложение 3.2.5).

Теперь сформулируем явно доказанные утверждения этой главы.

Теорема 3.1.1. *Пусть $\varepsilon \in \{+,-\}$ и $L = \mathrm{L}_n^{\varepsilon}(q)$ — простая группа, где $q = p^m$. Предположим, что $n \geqslant p$, $n \neq p+1$ и L не является исключительной (см. ниже). Если L действует на векторном пространстве W над полем характеристики p, то $\omega(W \leftthreetimes L) \neq \omega(L)$, где $W \leftthreetimes L$ — естественное полупрямое произведение W на L.*

В формулировке теоремы 3.1.1 *исключительными* называются группы из списка

$$\mathrm{L}_5^{\varepsilon}(2^m), \mathrm{L}_6^{\varepsilon}(3^m), \mathrm{L}_7^{\varepsilon}(3^m), \mathrm{L}_{10}^{\varepsilon}(3^m), \mathrm{L}_{11}^{\varepsilon}(5^m), \mathrm{L}_{18}^{\varepsilon}(5^m), \text{ где } \varepsilon \in \{+,-\}, m \geqslant 1;$$
$$\mathrm{U}_6(2), \mathrm{U}_7(2), \mathrm{U}_9(2), \mathrm{U}_{10}(2), \mathrm{U}_{11}(2), \mathrm{U}_{18}(2), \mathrm{U}_5(3), \mathrm{U}_8(3), \mathrm{U}_{11}(3).$$

Отсюда вытекает подтверждение следующей гипотезы из [13]:

Следствие 3.1.2. *Простые группы $\mathrm{L}_n(2) \cong \mathrm{GL}_n(2)$ распознаваемы по спектру для всех $n \geqslant 3$.*

Следующее утверждение обобщает теорему 3.1.1, однако доказывается, используя другие методы.

Теорема 3.1.3. *Пусть $\varepsilon \in \{+,-\}$ и $L = \mathrm{L}_n^{\varepsilon}(q)$ — простая группа, где $q = p^m$. Предположим, что либо $n \geqslant 5$, либо $n = 4$ и q простое, либо $n = 4$ и q чётное. Если L действует на векторном пространстве W над полем характеристики p, то $\omega(W \leftthreetimes L) \neq \omega(L)$.*

Отметим, что из доказательства теоремы 3.1.3 в случае, когда либо $n \geqslant 5$, либо q нечётное простое, следует более сильный факт: группа L содержит *полупростой* элемент g, порядок которого p-максимален (т. е. такой, что $p\,|g| \notin \omega(L)$), и который централизует нетривиальный вектор из W. Более того, если $n \geqslant 5$ и $q > 3$, то такой элемент g может быть выбран независимо от модуля W.

Следствием этого результата является следующее (частичное) положительное решение проблемы 3:

Следствие 3.1.4. *Пусть $L = \mathrm{L}_n(q)$ — простая линейная группа. Если либо $n \neq 4$, либо q простое или чётное, то L распознаваема по спектру среди своих накрытий.*

Контрпример к проблеме 3 в случае размерности $n = 4$ даётся в следующем утверждении:

Теорема 3.1.5. *Группа $L = \mathrm{L}_4(13^{24})$ обладает абсолютно неприводимым 96-мерным модулем W над полем характеристики 13 таким, что $\omega(W \rtimes L) = \omega(L)$. В частности, L не распознаваема по спектру среди своих накрытий.*

Отметим, что модуль W из теоремы 3.1.5 построен явно (см. предложение 3.4.8). Таким образом, ответ на вопрос из проблемы 3 положительный при $n = 4$ и, вообще говоря, отрицательный при $n = 4$.

Результаты этой главы опубликованы в работах [20, 22, 23, 24, 32]. Теорема 3.1.1 и следствие 3.1.2 доказаны в соавторстве с В. Д. Мазуровым. Остальные результаты получены автором лично.

Глава 4. Распознаваемость по графу простых чисел

Данная глава посвящена проблеме распознаваемости по графу простых чисел. Легко видеть, что зная спектр $\omega(G)$ группы G, можно построить граф $\Gamma(G)$, но не всегда наоборот. Одним из результатов данной главы является первый пример бесконечной серии групп, однозначно определяемых по своему графу простых чисел в классе всех конечных групп:

Теорема 4.1.1. *Простые группы $G_2(7)$, ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1} > 3$, распознаваемы по графу. В частности $G_2(7)$ — новый пример группы, распознаваемой по спектру.*

Обозначим через $s(G)$ число компонент связности графа $\Gamma(G)$. Из классификации [15, 3] следует, что $s(G) \leqslant 6$ для любой конечной группы G. Для групп из теоремы 4.1.1 выполнены равенства $s({}^2G_2(q)) = 3$ и $s(G_2(7)) = 2$. Известно, что спорадическая группа Янко J_4 — единственная простая конечная группа с шестью компонентами связности графа простых чисел. Оказывается, имеет место следующий факт:

Теорема 4.1.2. *Пусть G — конечная группа и $s(G) = 6$. Тогда $G \cong J_4$. В частности, J_4 распознаваема по графу.*

Другими словами, группа J_4 распознаваема в классе конечных групп по числу компонент связности своего графа простых чисел. Очевидно также, что этим свойством обладает только группа J_4.

Несложно найти примеры распознаваемых по графу групп G, для которых $s(G)$ равно 4 и 5. Однако, следующий вопрос не столь очевиден.

Проблема 6. *Существует ли распознаваемая по графу конечная группа со связным графом простых чисел?*

Отметим, что установить распознаваемость группы по графу вообще говоря сложнее, чем распознаваемость по спектру, поскольку некоторые методы при решении первой задачи перестают работать. Более заметную роль при распознавании групп по графу играют тонкие свойства модулярных представлений. Так, например, в предложениях 4.2.5 и 4.2.6 данной главы, которые представляют самостоятельный интерес, мы доказываем, используя описание комплексных и модулярных характеров, существование ненулевых неподвижных точек некоторых элементов групп $G_2(q)$ и ${}^2G_2(q)$ при их действии на модулях над полем, характеристика которого отлична от характеристики определения группы.

Группа G называется *квазираспознаваемой по графу*, если любая конечная группа, граф простых чисел которой совпадает с $\Gamma(G)$, имеет тот же набор неабелевых композиционных факторов (с учётом кратностей), что и группа G.

Пусть M обозначает спорадическую группу самого большого порядка (называемую Монстром). Структура группы G с графом $\Gamma(G) = \Gamma(M)$ может быть ограничена до расширений 3-групп посредством M следующим образом.

Теорема 4.1.3. *Монстр M квазираспознаваем по графу, и распознаваем если и только если для любого неприводимого FM-модуля V над полем F характеристики* 3 *в M найдется элемент порядка* 41, 47, 59, *или* 71, *централизующий в V ненулевой вектор.*

Мы выдвигаем гипотезу, что *любой* элемент группы M любого из порядков 41, 47, 59, или 71 централизует ненулевой вектор в любом FM-модуле над полем характеристики 3 и, в частности, Монстр распознаваем по графу. Эта гипотеза могла бы быть легко проверена, если бы все неприводимые 3-модулярные характеры Монстра были известны. Элементарными методами, однако, решить этот вопрос нам не удалось. Отметим, что часть утверждения 4.1.3 была независимо доказана в [14].

Напомним, что для конечной группы G через $h_\Gamma(G)$ обозначается число неизоморфных конечных групп с графом $\Gamma(G)$. Распознаваемость G по графу эквивалентна равенству $h_\Gamma(G) = 1$. Существуют примеры групп G, для которых $1 < h_\Gamma(G) < \infty$:

Теорема 4.1.4. $h_{\Gamma}(\mathrm{L}_3(7)) = 2$ *и* $\Gamma(\mathrm{L}_3(7)) = \Gamma(\mathrm{L}_3(7).2)$.

Отсюда вытекает

Следствие 4.1.5. *Группа* $\mathrm{L}_3(7).2$ *распознаваема по спектру.*

Результаты данной главы опубликованы в работе [21].

Пользуясь случаем, я хотел бы выразить искреннюю благодарность своему научному консультанту чл.-корр. РАН В.Д.Мазурову за его участие в формулировке основной задачи, всестороннюю помощь и внимание в работе, его глубокую компетентность и прекрасные человеческие качества. Я также хотел бы поблагодарить всех сотрудников лаборатории теории групп Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, а в особенности д.ф.-м.н. А.В.Васильева, д.ф.-м.н. Е.П.Вдовина, к.ф.-м.н. М.А.Гречкосееву, к.ф.-м.н. Д.О.Ревина за полезное обсуждение как содержания данной работы, так и общих теоретико-групповых вопросов. Часть этой работы была выполнена во время моих стажировок в университете г. Сан-Пауло (Бразилия), в связи с чем я хотел бы поблагодарить директора института математики и статистики этого университета, а также сотрудников департамента математики за гостеприимство и радушие.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (коды проектов 08-01-00322, 06-01-39001, 05-01-00797, 99-01-00550, 96-01-01893), Сибирского Отделения РАН (гранты №1 и №29 для молодых учёных и Интеграционный проект 2006.1.2), Совета по грантам Президента РФ (грант для ведущих научных школ НШ-344.2008.1), Фонда Содействия Отечественной Науке (программа "Выдающиеся ученые. Кандидаты и доктора наук РАН" за 2008 г.), Фонда FAPESP, Бразилия (проекты 06/60766-3, 01/14811-4).

Литература

[1] *Зельманов Е. И.* Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечётного показателя // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, № 1. С. 42–59.

[2] *Зельманов Е. И.* Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 568–592.

[3] *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел для конечных простых групп // Мат. сборник 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.

[4] *Кострикин А. И.* Вокруг Бернсайда, М.: Наука, 1986.

[5] *Мазуров В. Д.* О множестве порядков элементов конечной группы // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 81–89.

[6] *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.

[7] *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.

[8] *Мазуров В. Д.* Группы с заданным спектром // Изв. Урал. Гос. Унив. Мат. Мех. 2005. Т. 36, № 7. С. 119–138.

[9] *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле, Москва: Мир, 1975.

[10] Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 16-е изд. Новосибирск. 2006. Ин-т матем. СО РАН.

[11] *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V. 13, P. 775–1029.

[12] *Gruenberg K. W., Roggenkamp K. W.* Decomposition of the augmentation ideal and of the relation modules of a finite group // Proc. London Math. Soc. 1975. V. 31, N 2. P. 149–166.

[13] *Grechkoseeva M. A., Lucido M. S., Mazurov V. D., Moghaddamfar A. R., Vasil'ev A. V.* On recognition of the projective special linear groups over the binary field // Sib. Èlektron. Mat. Izv. 2005. V. 2. P. 253–263.

[14] *Hagie M.* The prime graph of a sporadic simple group // Commun. Algebra 2003. V. 31, N 9. P. 4405–4424.

[15] *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. **69** , N 2. P. 487–513.

[16] *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. für Math. und Phys. 1892. Bd 3. S. 256–284.

Работы автора по теме диссертации

[17] *Заварницин А. В.* Распознавание по множеству порядков элементов симметрических групп степени r и $r+1$ для простого r // Сиб. Матем. Журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1002–1006.

[18] *Заварницин А. В.* Веса неприводимых $\mathrm{SL}_3(q)$-модулей в характеристике определения // Сиб. Матем. Журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 319–328.

[19] *Заварницин А. В.* Распознавание простых групп $\mathrm{U}_3(q)$ по порядкам элементов // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 185–202.

[20] *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* Порядки элементов в накрытиях конечных простых линейных и унитарных групп и распознаваемость групп $\mathrm{L}_n(2)$ по спектру // Доклады Академии Наук. 2006. Т. 409, № 6. С. 736–739.

[21] *Заварницин А. В.* О распознавании конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.

[22] *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* О порядках элементов в накрытиях простых групп $\mathrm{L}_n(q)$ и $\mathrm{U}_n(q)$ // Труды Ин-та матем. и механ. УНЦ РАН. 2007. Т. 13, №1. С. 89–98.

[23] *Заварницин А. В.* Свойства порядков элементов в накрытиях групп $\mathrm{L}_n(q)$ и $\mathrm{U}_n(q)$ // Сиб. Матем. Журн. 2008. Т. 49, №2. С. 309–322.

[24] *Заварницин А. В.* О распознаваемости по спектру среди накрытий конечных простых линейных и унитарных групп // Доклады Академии Наук 2008. Т. 421, №1. С. 11–14.

[25] *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, №3. С. 296–315.

[26] *Заварницин А. В.* Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r+1$ и $r+2$ для простого r и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, №6. С. 635–648.

[27] *Zavarnitsine A. V.* Recognition of finite simple groups by element orders, Международная конференция "Lie and Jordan algebras, their representations and applications I Сан-Пауло (2002), тезисы докладов, с. 48.

[28] *Zavarnitsine A. V.* Weights of the irreducible $\mathrm{SL}_3(q)$-modules in defining characteristic, Препринт RT-MAT 2003-13, IME-USP, Сан-Пауло (2003), 12 с.

[29] *Zavarnitsine A. V.* Recognition of the simple groups $\mathrm{L}_3(q)$ by element orders // J. Group Theory 2004. V. 7, N 1. P. 81–97.

[30] *Заварницин А. В.* Характеризация конечных групп по графу простых чисел, Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева, Санкт-Петербург (2007), тезисы докладов, С. 177–178.

[31] *Вдовин Е. П., Заварницин А. В., Колесников П. С., Пожидаев А. П., Ревин Д. О.* Группы и алгебры лиева типа. Материалы V конференции молодых учёных СО РАН, посвящённой М. А. Лаврентьеву, Новосиб. гос. ун-т, Новосибирск, 2007, С. 11–15.

[32] *Zavarnitsine A. V.* Exceptional action of the simple groups $\mathrm{L}_4(q)$ in the defining characteristic // Siberian Electronic Math. Reports. 2008. V. 5. P. 68–74.

[33] *Zavarnitsine A. V.* Properties of element orders in covers for $\mathrm{PSL}_n(q)$, Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, Москва, 2008, тезисы докладов, С. 376–377.

Заварницин Андрей Витальевич

Представления конечных групп
и проблема распознаваемости

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать ___.___.08. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,__. Уч.-изд. л. 1,__. Тираж 150 экз. Заказ №__

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирска, пр. Лаврентьева, 6