На правах рукописи

Ревин Данила Олегович

ХОЛЛОВЫ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 2008

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН
Мазуров Виктор Данилович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Казарин Лев Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев Анатолий Семёнович
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси
Шеметков Леонид Александрович

Ведущая организация:
Южно-Уральский государственный университет

Защита диссертации состоится «14» ноября 2008 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан «___» ___________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Диссертационная работа относится к классическому направлению теории конечных групп — теоремам силовского типа. В ней с помощью классификации конечных простых групп дается исчерпывающий ответ на следующий вопрос. *Пусть заданы некоторое множество π простых чисел и конечная группа G. Имеет ли место в группе G полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп?* Также решается ряд связанных с этим вопросом известных проблем. Следуя [1,33,35], напомним историю вопроса и дадим необходимые определения.

Тематика, которой посвящена диссертация, восходит к самым истокам теории конечных групп. Число элементов (или, иначе, порядок) конечной группы является ее естественной арифметической характеристикой и определяет многие ее свойства. Теорема Лагранжа, исторически самый первый значимый результат теории групп, говорит, что порядок $|G|$ конечной группы G делится на порядок любой подгруппы. Это несложное утверждение имеет исключительное значение и во многом определяет проблематику теории конечных групп. Теорема Лагранжа демонстрирует, насколько порядок группы может определять ее подгрупповое строение. Например, оказывается, что группа простого порядка циклическая и не содержит собственных нетривиальных подгрупп. Обращение теоремы Лагранжа неверно. Скажем, знакопеременной группе степени 4, имеющей порядок 12, нет подгрупп порядка 6. Тем более удивительной является следующая теорема, доказанная в 1872 году норвежским математиком Л. Силовом [61]:

Теорема (Л. Силов). *Пусть G — конечная группа и $|G| = p^\alpha m$, где число p простое и m не делится на p. Тогда*

(1) *группа G содержит подгруппу порядка p^α (т. н. силовскую p-подгруппу);*

(2) *любые две силовские p-подгруппы сопряжены;*

(3) *всякая p-подгруппа группы G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.*

Таким образом, оказывается, что для некоторых делителей порядка группы обращение теоремы Лагранжа, все же, имеет место. Более того, оказывается, что строение и свойства любой p-подгруппы во многом определяются строением и свойствами одной-единственной силовской p-подгруппы.

Значение теоремы Силова трудно переоценить. По мнению специалистов [8, 25, 54] она является краеугольным камнем теории конечных групп. Уже в первом издании[1] классической книги У. Бернсайда [45] теореме Силова и ее приложениям посвящена целая глава.

Получение аналогов теоремы Силова сформировалось в большое самостоятельное направление, берущее свое начало в работах Ф. Холла и С. А. Чунихина [14, 56, 57]. Как ни странно, теорема Холла, первый из таких аналогов, появилась на свет лишь 1928 году [56], т. е. спустя более, чем 50 лет после работы Л. Силова. Идея английского математика Ф. Холла состояла в том, чтобы вместо силовских p-подгрупп рассматривать более общий объект — S_π-подгруппы или, как их впоследствии стали называть, холловы π-подгруппы. Напомним определение.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Символом π' будем обозначать множество тех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество его простых делителей, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой.* Подгруппа H конечной группы G называется *холловой π-подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Таким образом, если $\pi = \{p\}$, то холлова π-подгруппа — это, в точности, силовская p-подгруппа.

Аналог теоремы Силова для π-подгрупп, вообще говоря, неверен: для многих π существуют группы, не обладающие холловыми π-подгруппами, есть примеры групп с несопряженными холловыми π-подгруппами, а также групп, в которых имеются π-подгруппы, не лежащие в холловых π-подгруппах. Тем не менее, Ф. Холлу [56] удалось доказать следующую теорему.

Теорема (Ф. Холл). *Пусть конечная группа G разрешима и π — произвольное множество простых чисел. Тогда*

(1) *группа G обладает холловой π-подгруппой;*

(2) *любые две холловы π-подгруппы сопряжены;*

(3) *всякая π-подгруппа содержится в некоторой холловой π-подгруппе.*

Эта теорема — обобщение теоремы Силова для π-подгрупп разрешимых конечных групп. В 30-е годы Ф. Холл [57] и независимо С. А. Чунихин [14] доказали, что если конечная группа содержит холлову p'-подгруппу для любого простого числа $p \in \pi(G)$, то она разрешима. Поэтому исследование возможных аналогов теоремы Силова для π-под-

[1] Имеется ввиду издание 1897 года. В списке литературы приведена ссылка на второе издание 1911 года этой книги.

групп в неразрешимых группах первоначально воспринималось скептически. Л. А. Шеметков [35] пишет: «В то далекое время многим казалось, что изучение холловых подгрупп в неразрешимых конечных группах не имеет перспективы. В этом как-будто бы убеждал и тот факт, что конечная группа оказывается разрешимой, если она обладает холловыми подгруппами любого возможного порядка ... Но С. А. Чунихин думал иначе. Его основная идея состояла в том, что надо искать связь между подгрупповой структурой конечной группы и подгрупповой структурой ее главных и композиционных факторов.»

Поясним идею С. А. Чунихина. Предположим, что множество π фиксировано. Тогда даже полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп не означает, что группа разрешима, поскольку он имеет место, скажем, для любой π- или π'-группы. Поэтому задача получения таких аналогов при фиксированном π представляется весьма нетривиальной. Для более точной формулировки этой задачи нам понадобятся введенные Ф. Холлом [55] обозначения.

Пусть задано некоторое множество π простых чисел. Будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π, если в G имеется холлова π-подгруппа. Если при этом любые две холловы π-подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G *обладает свойством* C_π. Если, к тому же, любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством* D_π. Группу со свойством E_π (C_π, D_π) будем называть также E_π- (соответственно, C_π-, D_π-) *группой*. Таким образом, свойство D_π означает справедливость полного аналога теоремы Силова для π-подгрупп, тогда как свойства E_π и C_π обобщают на π-подгруппы пункты (1) и (2) заключения этой теоремы. Группы со свойством D_π наиболее интересны для изучения, поскольку, по аналогии с теоремой Силова, в них строение и свойства (например, разрешимость, нильпотентность, абелевость и т. д.) произвольной π-подгруппы определяются одной-единственной холловой π-подгруппой. Восходящую к С. А. Чунихину задачу получения возможных аналогов теоремы Силова для π-подгрупп мы будем интерпретировать так.

Проблема 1. Пусть заданы множество π и конечная группа G. Обладает ли группа G свойством D_π?

Серия работ С. А. Чунихина [14–25] привела к следующему методу отыскания D_π-групп. Если $\mathfrak{D}_\pi$ — класс известных D_π-групп, то новые D_π-группы ищутся среди тех групп, у которых факторы некоторого субнормального ряда принадлежат $\mathfrak{D}_\pi$. Двигаясь в этом направлении, Чунихин обобщил теорему Холла на случаи т. н. π-разрешимых и π-отделимых групп, им впервые введенных в рассмотрение[2]. Ему принадлежит также следующий важный результат[3]: *Расширение C_π-группы с помощью C_π-группы является C_π-группой.*

В 50-е годы результаты и идеи Чунихина получили распространение и признание как у нас в стране, так и за рубежом, что привело к невиданному росту интереса к данной тематике. Изучением проблемы 1 в том или ином аспекте занимались, помимо Ф. Холла и С. А. Чунихина, такие ученые, как Л. С. Казарин [5, 6], В. Д. Мазуров [11, 82], Л. А. Шеметков [27–33, 35], Р. Бэр [43], Ф. Гросс [47–50], Б. Хартли [53, 54], Н. Ито [59], Дж. Томпсон [62], Х. Виландт [1, 63–71], Г. Цаппа [72] и многие другие. Эта проблематика вызывает живой интерес и сегодня (упомянем доклад китайского математика Го Вэньбиня на недавней конференции в Красноярске [51]). К сожалению, мы не имеем возможности здесь должным образом осветить все полученные результаты и приведем лишь некоторые из них. Заинтересованного читателя отсылаем к обзорам С. А. Чунихина и Л. А. Шеметкова [26,33]. Подробное изложение некоторых результатов и исторические сведения можно найти в монографиях С. А. Чунихина, Л. А. Шеметкова и М. Судзуки [25, 34, 60]. Более современные обзоры имеются у Б. Хартли [54] и в монографии К. Дёрка и Т. Хоукса [46].

Важным этапом стали работы Ф. Холла [55] и немецкого математика Х. Виландта [63].

Виландт, в отличие от С. А. Чунихина, ничего не предполагал о факторах группы, а наложил ограничение на строение холловой π-подгруппы. Его результат состоит в том, что из существования в группе нильпотентной холловой π-подгруппы вытекает свойство D_π.

Работа 1956 года Ф. Холла [55] считается классической. В ней, помимо обзора результатов С. А. Чунихина и Х. Виландта, получен ряд новых важных теорем, а также введены обозначения E_π, C_π и D_π (см. выше). Комбинируя результат Виландта и метод Чунихина, в качестве основ-

[2] Понятие π-разрешимой группы оказалось чрезвычайно плодотворным. Во многом благодаря знакомству Холла с работами С. А. Чунихина стало возможным появление статьи Ф. Холла и Г. Хигмэна [58], в которой посредством изучения p-разрешимых групп ослабленная проблема Бернсайда сводилась к случаю групп примарной экспоненты и которая сыграла важную роль в решении этой проблемы [3, 4, 10]. Введенные С. А. Чунихиным понятия и полученные им результаты неоднократно обобщались и на некоторые классы бесконечных группы (отметим в связи с этим работы П. А. Гольберга [2] и М. И. Каргаполова [7]).

[3] В такой формулировке этот результат использует теорему Фейта-Томпсона о разрешимости конечных групп нечетного порядка [52].

ного результата работы [55] Ф. Холл доказал следующую теорему.

Теорема (Ф. Холл, теорема D5). *Расширение D_π-группы A, обладающей нильпотентной холловой π-подгруппой, с помощью D_π-группы B, обладающей разрешимой холловой π-подгруппой, является D_π-группой.*

Сразу же возник вопрос, нельзя ли в этой теореме отказаться от ограничений на строение холловых подгрупп, дав, тем самым, методу Чунихина построения новых D_π-групп из уже известных общее теоретическое обоснование. Возникла

Проблема 2. Всегда ли расширение D_π-группы A с помощью D_π-группы B будет D_π-группой?

Впервые эта проблема была озвучена Х. Виландтом в часовом обзорном докладе на XIII Международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 году [1]. На протяжении пятидесяти лет к ее изучению обращались многие математики. Она отмечена в обзорах [26,33,66], монографиях Л. А. Шеметкова [34, проблема 22] и М. Судзуки [60] и записана Л. А. Шеметковым в Коуровскую тетрадь [36, вопрос 3.62].

Сам Л. А. Шеметков внес в изучение этого вопроса фундаментальный вклад. Он решил [32] проблему 2 в случае, когда силовские p-подгруппы группы A являются циклическими для всех $p \in \pi$, и получил [27–31] ряд других важных результатов, которые нашли свое отражение в его монографии [34]. Более пóзднее обсуждение результатов, связанных с этой проблемой, имеется в [35]. Не будет преувеличением сказать, что Л. А. Шеметков «выжал» из проблемы 2 все, что можно было сделать без использования классификации простых групп (см. [34, лемма 18.3, теор. 18.14]).

В 1971 году Б. Хартли [53] показал, что условие разрешимости холловой π-подгруппы группы B в теореме Холла D5 можно опустить, предположив выполнение гипотезы Шрайера (о разрешимости групп внешних автоморфизмов) для композиционных факторов группы A. Ранее этот результат без доказательства был отмечен Х. Виландтом [70].

Впервые для изучения проблемы 2 результаты классификации конечных простых групп использовал в работе 1981 года [5] Л. С. Казарин, существенно усилив более ранние результаты Л. А. Шеметкова [32] о т. н. π-классах Виландта.

В.Д.Мазуров и автор показали [82], что проблема 2 имеет положительное решение, если силовские 2-подгруппы всех композиционных факторов группы A абелевы.

Среди недавних результатов о проблеме 2 отметим работы В. Н. Тютянова [12, 13].

Несмотря на интенсивное изучение и большой накопленный опыт, проблему 2 долгое время удавалось решить только в частных случаях. В 1997 году с появлением статьи В. Д. Мазурова и автора [82], вошедшей в кандидатскую диссертацию последнего [88], появилась надежда полностью ответить на этот вопрос с помощью классификации конечных простых групп. В [82] проблема 2 была сведена к случаю, когда A — простая группа, а B — группа ее внешних автоморфизмов.

При использовании индуктивных рассуждений в [82] стало ясно, что проблема 2 тесно связана с другим вопросом:

Проблема 3. Всегда ли нормальная подгруппа D_π-группы будет D_π-группой?

В. Д. Мазуров записал эту проблему в Коуровскую тетрадь [36, вопрос 13.33]. Еще раньше она была отмечена в работе Ф. Гросса 1986 года [47].

Несложно показать, что факторгруппа D_π-группы всегда является D_π-группой. Поэтому проблемы 2 и 3 являются в определенном смысле двойственными. Сравнительно меньший интерес, который математики проявляли по отношению к проблеме 3, объясняется тем, что их внимание было сконцентрировано на получении *достаточных* условий для свойства D_π. В то же время, если ставить вопрос шире, о *необходимых и достаточных* условиях, то эта проблема является столь же важной и естественной, как и проблема 2. В случае положительного решения обеих проблем оказалось бы, что конечная группа обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда каждый ее композиционный фактор обладает этим свойством, и проблема 1 свелась бы к следующей.

Проблема 4. Пусть задано множество простых чисел π. Описать конечные простые группы со свойством D_π.

В кандидатской диссертации автора [88] изучение проблемы 3, также как и проблемы 2, было сведено к проверке некоторых условий в группах автоморфизмов простых неабелевых групп (см. также работы [79, 86]). Тем не менее, проверка этих условий оказалась непростой задачей. В то время ее удалось осуществить для спорадических, знакопеременных групп и тех групп лиева типа, у которых характеристика принадлежит π [79, 88]. Самый сложный случай — случай групп лиева типа над полем характеристики, не принадлежащей π, остался тогда неразобранным. Трудность такой проверки в том, что она требует знания всех холловых подгрупп данной простой группы. Т. е. требуется решить еще одну довольно тяжелую задачу:

Проблема 5. Классифицировать холловы подгруппы в конечных простых группах.

Эта проблема представляет независимый интерес и также приковывала внимание многих ученых. Ее значимость в том, что холловы подгруппы в определенном смысле «наследуются» нормальными подгруппами и факторгруппами. В частности, необходимым условием существования холловой π-подгруппы является существование таких подгрупп у всех композиционных факторов группы. Важность проблемы описания холловых подгрупп в простых и близких к ним группах была понятна еще Ф. Холлу. В его работе 1956 года [55] и последующей работе 1966 года Дж. Томпсона [62] описаны холловы подгруппы симметрических групп. Для групп лиева типа проблема 4 сформулирована в известном обзоре А. С. Кондратьева [9]. Л. С. Казарин [6, теор. 7] ее решил в случае, когда $\pi = r'$ для произвольного простого r. Ф. Гросс, доказывая в работах [48,49] с помощью классификации конечных простых групп, что если $2 \notin \pi$, то $E_\pi \Rightarrow C_\pi$, (ослабленная гипотеза Холла), описал в случае, когда $2 \notin \pi$, холловы π-подгруппы спорадических, классических групп, а также исключительных групп лиева типа над полем характеристики $p \in \pi$. В кандидатской диссертации автора случай $p \in \pi$ для групп лиева типа [81] и случай спорадических групп [79] были исследованы полностью. Таким образом, незавершенным осталось описание холловых π-подгрупп в группах лиева типа в характеристике $p \notin \pi$ и, как ни странно, в знакопеременных группах.

Цель диссертации — полностью решить проблемы 2–5*. Тем самым, будет решена проблема* 1 *— получено исчерпывающее описание конечных групп, в которых имеется свойство* D_π *(выполнен полный теоремы Силова для* π*-подгрупп).*

Основные результаты диссертации.

1. Доказано (совместно с Е. П. Вдовиным), что расширение D_π-группы с помощью D_π-группы является D_π-группой. Тем самым, решена известная проблема [36, 3.62].

2. Доказано (совместно с Е. П. Вдовиным), что нормальная подгруппа D_π-группы является D_π-группой. Тем самым, решена проблема [36, 13.33].

3. Для любого множества π простых чисел получено арифметическое описание простых конечных D_π-групп и, как следствие, с учетом предыдущих результатов, получено исчерпывающее описание всех конечных групп, в которых имеет место полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп.

Кроме того, завершено (совместно с Е. П. Вдовиным) описание холловых подгрупп во всех известных простых группах.

Хотя часть результатов диссертации опирается на классификацию конечных простых групп, ее использование в работе является достаточно аккуратным, а именно, для всякой K-группы, т. е. конечной группы, композиционные факторы которой изоморфны известным простым группам, результаты получены непосредственно. Поэтому при осторожном походе можно сказать, что они доказаны в классе K-групп.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [73–77] в журналах, входящих в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных изданий, см. также [78–80]. Все работы автора по теме диссертации [73–100] приведены в списке литературы. Из них [73–77, 79–82] на момент публикации входили в перечень ВАК.

Новизна и научная значимость работы. В диссертации решается ряд известных теоретико-групповых проблем. Все результаты являются новыми. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований в области теорем силовского типа, теории формаций и, шире, классов конечных групп. Методы, разработанные и используемые в диссертации, могут быть применены для изучения подгруппового, в частности, локального строения конечных простых групп, для описания максимальных π-подгрупп и решения других проблем. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории групп: теория конечных простых групп, теория линейных алгебраических групп, теория групп лиева типа, теория представлений. Используется (по-видимому, впервые) новый метод изучения локального строения классических групп, основанный на использовании описания радикальных подгрупп и их нормализаторов.

Апробация работы. Результаты диссертации с 2000 по 2008 годы были представлены на конференциях в Екатеринбурге, Москве, Новосибирске, Нальчике, Иркутске, Красноярске, Санкт-Петербурге и Челябинске (см. [90–100]). Автором были деланы пленарные доклады по теме диссертации на Международном семинаре по теории групп (Екатеринбург, 2001), международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2002, 2007), VI и VII Международных школах-конференциях по теории групп (Нальчик, 2006, Челябинск, 2008), Российско-китайском семинаре по алгебре и логике (Иркутск, 2007), Международной конференции «Алгебра и ее приложения» (Красноярск, 2007) и Международной алгебраической конференции (Москва, 2008). Результаты работы неоднократно докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске, а также на Общеинститутском математическом семинаре Института математики СО РАН.

Общая структура диссертации. Диссертация состоит из 4 глав, введения и списка литературы. Главы подразделяются на параграфы. В начале каждой главы приведен обзор ее основных результатов. Все утверждения (теоремы, следствия, леммы) имеют тройную нумерацию: номер главы, номер параграфа в главе и номер утверждения в параграфе.

Содержание диссертации

Глава 1. В этой главе собраны основные необходимые определения и предварительные результаты. Приведен список используемых обозначений. Собраны общеизвестные утверждения о холловых свойствах E_π, C_π и D_π и некоторые результаты из кандидатской диссертации автора. Изложены сведения о группах лиева типа и их связи с алгебраическими группами. Излагаются также общие аспекты изучения холловых подгрупп в группах лиева типа.

Важное место в первой главе занимают результаты о радикальных подгруппах. Напомним определение.

Пусть r — простое число. Подгруппа R конечной группы G называется *радикальной r-подгруппой*, если R совпадает с наибольшей нормальной r-подгруппой своего нормализатора, т. е. $R = O_r(N_G(R))$. Понятие радикальной подгруппы тесно связано с понятием суперлокала, введенного М. Ашбахером в [42] как обобщение параболических подгрупп в группах лиева типа. Для простого числа r подгруппа N группы G называется *r-суперлокалом* в G, если $N = N_G(O_r(N))$. Таким образом, r-суперлокал — это, в точности, нормализатор радикальной r-подгруппы.

М. Ашбахер заметил, что любая подгруппа H конечной группы G содержится в некотором r-суперлокале N таком, что $O_r(H) \leq O_r(N)$. В цитированной работе [42] в перечне наиболее актуальных вопросов теории конечных групп в «постклассификационный» период сформулирована следующая

Проблема 6. Описать r-суперлокалы в знакопеременных группах и группах лиева типа.

В 1991 году эта проблема была записана Р. Ж. Алеевым в Коуровскую тетрадь [36, вопрос 11.3]. В 2003 году автор опубликовал работу [80], в которой описал суперлокалы и радикальные подгруппы в симметрических и знакопеременных группах, а также установил ряд общих полезных свойств суперлокалов и радикальных подгрупп. Впоследствии выяснилось, что часть этих результатов, относящаяся к радикальным подгруппам симметрических групп не является новой. Радикальные подгруппы интенсивно изучались в другом контексте в рамках теории представлений. Эти подгруппы играют ключевую роль в гипотезе Дж. Алперина о весах и ряде гипотез Э. Дейда. В работе Дж. Алперина и П. Фонга [37] и последующей серии [38–41] работ Дж. Ана описаны радикальные подгруппы в симметрических группах, а также в полных классических матричных группах над конечными полями, исключая ортогональные группы в характеристике 2. Эти результаты находят применение в четвертой главе диссертации при индукционных рассуждениях. Оказывается, что в ряде случаев описание радикальных подгрупп и их нормализаторов является более сильным инструментом, чем известные теоремы М. Ашбахера и А. В. Боровика, и работает там, где другие индуктивные инструменты дают сбой.

В первой главе приведены общие сведения о суперлокалах и радикальных подгруппах, а также изложена и адаптирована для дальнейшего использования часть результатов Алперина, Фонга и Ана.

Глава 2. Это самая большая глава. В ней получено описание холловых π-подгрупп в знакопеременных группах и в группах лиева типа, характеристика которых не принадлежит π. Тем самым, решена проблема 5, т. е. завершено описание холловых подгрупп во всех простых конечных группах. Основным результатом этой главы можно считать следующую теорему.

Теорема 2.1.1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда для каждой простой конечной группы S известно, обладает ли S свойством E_π, и известны все ее холловы π-подгруппы.*

Более точные формулировки результатов этой главы слишком объемны, поэтому мы не приводим их здесь. Сформулируем лишь наиболее компактный из них, дающий, с учетом результатов Ф. Холла [55, теор. A4] и Дж. Томпсона [62] о холловых π-подгруппах симметрических групп, описание таких подгрупп и в знакопеременных группах.

Следствие 2.2.4. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Подгруппа M знакопеременной группы A_n является холловой π-подгруппой тогда и только тогда, когда $M = M_0 \cap A_n$ для некоторой холловой π-подгруппы M_0 симметрической группы S_n.*

Результаты главы опубликованы в [73,78] и получены в неразделимом соавторстве с Е. П. Вдовиным.

Глава 3. Основным результатом главы является следующее утверждение, решающее проблемы 2 и 3.

Теорема 3.1.1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, G — конечная группа и A — ее нормальная подгруппа. Группа G обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда группы A и G/A обладают свойством D_π.*

Как следствие, конечная группа обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда каждый ее композиционный фактор обладает этим свойством. Это утверждение открывает путь к исчерпывающей характеризации D_π-групп — основному результату следующей главы.

Результаты главы опубликованы в [73, 76, 78] и получены в нераздельном соавторстве с Е. П. Вдовиным. Они используют также результаты кандидатской диссертации автора, опубликованные в [79, 81, 82].

Глава 4. В четвертой главе решается сформулированная выше проблема 4, а именно, для любого множества π получена классификация простых D_π-групп.

Кроме спорадических простых групп, любая простая группа принадлежит некоторой бесконечной серии и характеризуется в этой серии одним или двумя естественными арифметическими параметрами. Например, знакопеременная группа A_n определяется своей степенью n, группа лиева типа $A_n(q)$ определяется лиевым рангом n и порядком поля q и т. д. Классификация простых D_π-групп получена в терминах этих параметров, а потому может быть названа арифметической.

Для многих классов простых групп такое арифметическое описание было получено ранее. Так, из результатов Ф. Холла [55, теор. A4] и Дж. Томпсона [62] несложно понять, что знакопеременная группа A_n обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда $|\pi \cap \pi(n!)| \leq 1$ или $\pi(n!) \subseteq \pi$. Ф.Гросс [48, следств. 6.13 и теор. 6.14] описал спорадические D_π-группы для любого множества π, не содержащего 2. В кандидатской диссертации автора (см. также [79, теор. 3.3 и теор. 5.1]) было завершено описание спорадических групп со свойством D_π для произвольного π и описаны группы лиева типа характеристики $p \in \pi$ с этим свойством. Оставался, таким образом, неразобранным случай групп лиева типа характеристики, не принадлежащей π.

В четвертой главе этот случай изучен и доказана

Теорема 4.1.2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и S — конечная простая группа. Группа S обладает свойством D_π тогда* *и только тогда, когда пара* (S, π) *удовлетворяет одному из условий* I–VII *(см. далее).*

Условие I. Скажем, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* I, если $\pi(S) \subseteq \pi$ или $|\pi \cap \pi(S)| \leq 1$.

Условие II. Скажем, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* II, если имеет место один из следующих случаев:
(1) $S \simeq M_{11}$ и $\pi \cap \pi(S) = \{5, 11\}$;
(2) $S \simeq M_{12}$ и $\pi \cap \pi(S) = \{5, 11\}$;
(3) $S \simeq M_{22}$ и $\pi \cap \pi(S) = \{5, 11\}$;
(4) $S \simeq M_{23}$ и $\pi \cap \pi(S)$ — одно из множеств $\{5, 11\}$, $\{11, 23\}$;
(5) $S \simeq M_{24}$ и $\pi \cap \pi(S)$ — одно из множеств $\{5, 11\}$, $\{11, 23\}$;
(6) $S \simeq J_1$ и $\pi \cap \pi(S)$ — одно из множетв $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 19\}$, $\{5, 11\}$;
(7) $S \simeq J_4$ и $\pi \cap \pi(S)$ — одно из $\{5, 7\}$, $\{5, 11\}$, $\{5, 31\}$, $\{7, 29\}$, $\{7, 43\}$;
(8) $S \simeq O'N$ и $\pi \cap \pi(S)$ — одно из множеств $\{5, 11\}$, $\{5, 31\}$;
(9) $S \simeq Ly$ и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 67\}$;
(10) $S \simeq Ru$ и $\pi \cap \pi(S) = \{7, 29\}$;
(11) $S \simeq Co_1$ и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 23\}$;
(12) $S \simeq Co_2$ и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 23\}$;
(13) $S \simeq Co_3$ и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 23\}$;
(14) $S \simeq M(23)$ и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 23\}$;
(15) $S \simeq M(24)'$ и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 23\}$;
(16) $S \simeq B$ и $\pi \cap \pi(S)$ — одно из множеств $\{11, 23\}$, $\{23, 47\}$;
(17) $S \simeq M$ и $\pi \cap \pi(S)$ — одно из множеств $\{23, 47\}$, $\{29, 59\}$.

Условие III. Пусть группа S изоморфна группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики $p \in \pi$. Положим $\tau = (\pi(S) \cap \pi) \setminus \{p\}$. Будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* III, если $\tau \subseteq \pi(q-1)$ и никакое число из π не делит число $|W|$ (порядок соответствующей группы Вейля).

Нам понадобится следующее обозначение. Пусть r — нечетное простое число, q — целое число, и q не делится на r. Положим $e(q, r) = \min\{e \in \mathbb{N} \mid q^e \equiv 1 \pmod{r}\}$.

Условие IV. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p, причем $G \not\simeq {}^2B_2(q), {}^2F_4(q), {}^2G_2(q)$. Пусть $2, p \notin \pi$. Пусть $r = \min(\pi(S) \cap \pi)$ и пусть $\tau = (\pi(S) \cap \pi) \setminus \{r\}$. Положим $a = e(q, r)$. Будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* IV, если существует $t \in \tau$, для которого $b := e(q, t) \neq a$, и имеет место одно из утверждений:

(1) $S \simeq A_{n-1}(q)$, $a = r-1$, $b = r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\frac{n}{r-1}\right] = \left[\frac{n}{r}\right]$, причем $e(q,s) = b$ и $n < bs$ и для любого $s \in \tau$;
(2) $S \simeq A_{n-1}(q)$, $a = r-1$, $b = r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\frac{n}{r-1}\right] = \left[\frac{n}{r}\right]+1$, $n \equiv -1 \pmod r$, причем $e(q,s) = b$ и $n < bs$ и для любого $s \in \tau$;
(3) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $a = r-1$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\frac{n}{r-1}\right] = \left[\frac{n}{r}\right]$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;
(4) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $a = \frac{r-1}{2}$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\frac{n}{r-1}\right] = \left[\frac{n}{r}\right]$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;
(5) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $a = r-1$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\frac{n}{r-1}\right] = \left[\frac{n}{r}\right]+1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;
(6) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $a = \frac{r-1}{2}$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\frac{n}{r-1}\right] = \left[\frac{n}{r}\right]+1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;
(7) $S \simeq {}^2D_n(q)$, $a \equiv 1 \pmod 2$, $n = b = 2a$ и для любого $s \in \tau$ либо $e(q,s) = a$, либо $e(q,s) = b$;
(8) $S \simeq {}^2D_n(q)$, $b \equiv 1 \pmod 2$, $n = a = 2b$ и для любого $s \in \tau$ либо $e(q,s) = a$, либо $e(q,s) = b$.

Условие V. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p, причем $G \not\simeq {}^2B_2(q), {}^2F_4(q), {}^2G_2(q)$. Пусть $2, p \notin \pi$. Пусть $r = \min(\pi(S) \cap \pi)$ и пусть $\tau = (\pi(S) \cap \pi) \setminus \{r\}$. Положим $c = e(q,r)$. Будем говорить, что пара (S,π) *удовлетворяет условию* V, если $e(q,t) = c$ для любого $t \in \tau$, и имеет место одно из утверждений:
(1) $S \simeq A_{n-1}(q)$ и $n < cs$ для любого $s \in \tau$;
(2) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 0 \pmod 4$ и $n < cs$ для любого $s \in \tau$;
(3) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 2 \pmod 4$ и $2n < cs$ для любого $s \in \tau$;
(4) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 1 \pmod 2$ и $n < 2cs$ для любого $s \in \tau$;
(5) $S \simeq B_n(q), C_n(q), {}^2D_n(q)$, c четно и $2n < cs$ для любого $s \in \tau$;
(6) $S \simeq B_n(q), C_n(q), D_n(q)$, c нечетно и $n < cs$ для любого $s \in \tau$;
(7) $S \simeq D_n(q)$, c четно и $2n \le cs$ для любого $s \in \tau$;
(8) $S \simeq {}^2D_n(q)$, c нечетно и $n \le cs$ для любого $s \in \tau$;
(9) $S \simeq {}^3D_4(q)$;
(10) $S \simeq E_6(q)$ и если $r = 3$ и $c = 1$, то $5, 13 \notin \tau$;
(11) $S \simeq {}^2E_6(q)$ и если $r = 3$, $c = 2$, то $5, 13 \notin \tau$;
(12) $S \simeq E_7(q)$ и если $r = 3$ и $c \in \{1,2\}$, то $5, 7, 13 \notin \tau$, а если $r = 5$ и $c \in \{1,2\}$, то $7 \notin \tau$;

(13) $S \simeq E_8(q)$ и если $r = 3$ и $c \in \{1, 2\}$, то $5, 7, 13 \notin \tau$, а если $r = 5$ и $c \in \{1, 2\}$, то $7, 31 \notin \tau$;
(14) $S \simeq G_2(q)$;
(15) $S \simeq F_4(q)$ и если $r = 3$ и $c = 1$, то $13 \notin \tau$.

Условие VI. Будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* VI, если имеет место одно из утверждений:
(1) $S \simeq {}^2B_2(2^{2m+1})$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в $\pi(2^{2m+1} - 1)$ или $\pi(2^{2m+1} \pm 2^{m+1} + 1)$;
(2) $S \simeq {}^2G_2(3^{2m+1})$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в $\pi(3^{2m+1} - 1) \setminus \{2\}$ или $\pi(3^{2m+1} \pm 3^{m+1} + 1) \setminus \{2\}$;
(3) $S \simeq {}^2F_4(2^{2m+1})$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в $\pi(2^{2(2m+1)} \pm 1)$, $\pi(2^{2m+1} \pm 2^{m+1} + 1)$, $\pi(2^{2(2m+1)} \pm 2^{3m+2} \mp 2^{m+1} - 1)$ или $\pi(2^{2(2m+1)} \pm 2^{3m+2} + 2^{2m+1} \pm 2^{m+1} - 1)$.

Условие VII. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p. Пусть $2 \in \pi$, а $3, p \notin \pi$. Положим $\tau = (\pi \cap \pi(G)) \setminus \{2\}$ и пусть φ — множество простых чисел Ферма, принадлежащих τ. В этом случае будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* VII, если $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что 4 делит $q - \varepsilon$, и имеет место одно из следующих утверждений.
(1) S изоморфна одной из групп $A_{n-1}(q)$, ${}^2A_{n-1}(q)$, причем $s > n$ для любого $s \in \tau$ и $t > n + 1$ для любого $t \in \varphi$;
(2) $S \simeq B_n(q)$ и $s > 2n + 1$ для любого $s \in \tau$;
(3) $S \simeq C_n(q)$, причем $s > n$ для любого $s \in \tau$ и $t > 2n + 1$ для любого $t \in \varphi$;
(4) S изоморфна одной из групп $D_n(q)$, ${}^2D_n(q)$, и $s > 2n$ для любого $s \in \tau$;
(5) S изоморфна одной из групп $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и $7 \notin \tau$;
(6) $S \simeq F_4(q)$ и $5, 7 \notin \tau$;
(7) S изоморфна одной из групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ и $5, 7 \notin \tau$;
(8) $S \simeq E_7(q)$ и $5, 7, 11 \notin \tau$;
(9) $S \simeq E_8(q)$ и $5, 7, 11, 13 \notin \tau$;
(10) $S \simeq {}^3D_4(q)$ и $7 \notin \tau$.

Из теорем 3.1.1 и 4.1.2 прямо следует утверждение, решающее проблему 1, содержащее в качестве частных случаев теоремы Силова и Холла (а также сами теоремы 3.1.1 и 4.1.2) и которое можно рассматривать в качестве главного результата диссертации.

Теорема 4.1.3. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная группа обладает свойством D_π тогда и и только тогда, когда* *для каждого ее композиционного фактора S пара (S, π) удовлетворяет одному из условий* I–VII.

Этот результат можно интерпретировать так. *Для любой группы с известными композиционными факторами вопрос, обладает ли группа свойством D_π, теперь является чисто арифметическим вопросом.*

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [74–77].

В заключение я хотел бы выразить глубокую признательность своему учителю чл.-корр. РАН В. Д. Мазурову. Его влияние определило мой жизненный путь и сформировало научные интересы. Он поставил передо мной, тогда еще студентом, задачу, решение которой привело к написанию данной работы. В соавторстве с ним были получены мои первые результаты, и ему я обязан многими идеями, реализованными здесь. Я глубоко признателен д.ф.-м.н. Е. П. Вдовину за многолетнее сотрудничество и дружескую поддержку. Благодаря его усилиям и глубоким знаниям удалось разобрать самые трудные случаи в диссертации, без чего эта работа никогда не была бы написана. Хотел бы особо поблагодарить д.ф.-м.н. А. В. Васильева, к.ф.-м.н. М. А. Гречкосееву и к.ф.-м.н. А. В. Заварницина за помощь в работе над диссертацией. Я благодарен сотрудникам лаборатории теории групп Института математики СО РАН и участникам семинаров «Теория групп» и «Алгебра и логика» за обсуждение работы и благожелательную атмосферу.

Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00322), Советом по грантам Президента РФ (проект НШ-344.2008.1), и СО РАН (интеграционный проект 2006.1.2).

Литература

[1] *Виланд Г.* Пути развития структурной теории конечных групп // Междунар. матем. конгресс в Эдинбурге, 1958 г. Обзорные доклады. М.: Физматгиз. 1962. 263–276.

[2] *Гольберг П. А.* Силовские базы π-отделимых групп // ДАН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 615–618.

[3] *Зельманов Е. И.* Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя // Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т. 54, № 1. С. 42–59.

[4] *Зельманов Е. И.* Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 568–592.

[5] *Казарин Л. С.* Теоремы силовского типа для конечных групп // Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик, Кабардино-балкарск. унив., 1981. С. 42–52.

[6] *Казарин Л. С.* О произведении конечных групп // ДАН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 528–531.

[7] *Каргаполов М. И.* О факторизации π-отделимых групп // ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1155–1157.

[8] *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 4-е изд. М.: Наука. Физматлит. 1996.

[9] *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи матем. н. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.

[10] *Кострикин А. И.* О проблеме Бернсайда // Изв. АН СССР, сер. матем. 1959. Т. 23, № 1. С. 3–34.

[11] *Мазуров В. Д.* Об одном вопросе Л. А. Шеметкова // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 6. С. 624–636.

[12] *Тютянов В. Н.* D_π-теорема для конечных групп, имеющих композиционные факторы такие, что 2-длина любой разрешимой подгруппы не превосходит единицы // Вести Нац. акад. наук Беларуси, сер физ.-мат. наук. 2000 №1. С. 12–14.

[13] *Тютянов В. Н.* О теоремах силовского типа для конечных групп // Укр. матем. ж., 2000. Т. 52, №10. С. 1426–1430.

[14] *Чунихин С. А.* О разрешимых группах // Изв. НИИММ Том. унив. 1938. Т. 2. С. 220–223.

[15] *Чунихин С. А.* О силовски-правильных группах // ДАН СССР. 1948. Т. 60, № 5. С. 773–774.

[16] *Чунихин С. А.* О π-свойствах конечных групп // Матем. сб. 1949. Т. 25, № 3. С. 321–346.

[17] *Чунихин С. А.* Об условиях теорем типа Силова // ДАН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 735–737.

[18] *Чунихин С. А.* О силовских свойствах конечных групп // ДАН СССР. 1950. Т. 73, № 1. С. 29–32.

[19] *Чунихин С. А.* Об ослаблении условий в теоремах типа Силова // ДАН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 663–665.

[20] *Чунихин С. А.* О подгруппах конечной группы // ДАН СССР. 1952. Т. 86, № 1. С. 27–30.

[21] *Чунихин С. А.* О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 111–132.

[22] *Чунихин С. А.* О π-разрешимых подгруппах конечных групп // ДАН СССР. 1955. Т. 103, № 3. С. 377–378.

[23] *Чунихин С. А.* О некоторых направлениях в развитии теории конечных групп за последние годы // Успехи матем. н. 1961. Т. 16, № 4 (100). С. 31–50.

[24] *Чунихин С. А.* Об одной π-силовской теореме, вытекающей из гипотезы о разрешимости групп нечетного порядка // ДАН БССР. 1962. Т. 6, № 6. С. 345–346.

[25] *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника. 1964.

[26] *Чунихин С. А., Шеметков Л. А.* Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия, 1969 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М. 1971.

[27] *Шеметков Л. А.* К теореме Холла // ДАН СССР. 1962. Т. 147, № 2. С. 321–322.

[28] *Шеметков Л. А.* D-строение конечных групп // Матем. сб. 1965. Т. 67, № 3. С. 384–497.

[29] *Шеметков Л. А.* Новая D-теорема в теории конечных групп // ДАН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 290–293.

[30] *Шеметков Л. А.* Силовские свойства конечных групп // Матем. сб. 1968. Т. 76, № 2. С. 271–287.

[31] *Шеметков Л. А.* О сопряженности и вложении подгрупп, в сб. Конечные группы // Минск, 1966. С. 881–883.

[32] *Шеметков Л. А.* О силовских свойствах конечных групп // ДАН БССР. 1972. Т. 16, № 10. С. 881–883.

[33] *Шеметков Л. А.* Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи матем. н. 1975. Т. 30, № 2(182). С. 179—198

[34] *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука. 1978.

[35] *Шеметков Л. А.* Обобщения теоремы Силова // Сиб. матем. ж. 2003. Т. 44, № 6. С. 1425—1431.

[36] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск: Ин-т мат. СО РАН. 2002.

[37] *Alperin J. L., Fong P.* Weights for symmetric and general linear groups // J. Algebra. 1990. V. 131, N1. P. 2–22.

[38] *An J.* 2-weights for general linear groups // J. Algebra. 1992. V. 149, N2. P. 500–527.

[39] *An J.* 2-weights for unitary groups // Trans. Am. Math. Soc. 1993. V. 339, N1. P. 251–278.

[40] *An J.* 2-wights for classical groups // J. reine angew. Math. 1993. V. 439. P. 159–204.

[41] *An J.* Weights for classical groups // Trans. Am. Math. Soc. 1994. V. 342, N1. P. 1–42.

[42] *Aschbacher M.* Subgroup structure of finite groups // Proc. Rutger group theory year, 1983/1984. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1985. P. 35–44.

[43] *Baer R.* Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen // Arch. Math. 1958. V. 9, N1–2. P. 7—17.

[44] *Borel A., Tits J.* Eléments unipotents et sousgroupes paraboliques de groupes réductifs, I // Inv. Math. 1971. V. 12, N 2. P. 95–104.

[45] *Burnside W.* Theory of groups of finite order. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1911.

[46] *Doerk K., Hawks T.* Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1992.

[47] *Gross F.* On the existence of Hall Subgroups // J. Algebra. 1986. V. 98, N1. P. 1–13.

[48] *Gross F.* On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 1986. V. 52, N3. P. 464–494.

[49] *Gross F.* Odd order Hall subgroups of the classical linear groups // Math. Z. 1995. V. 220, N3. P. 317–336.

[50] *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N4. P. 311–319.

[51] *Guo W.* Some problems in group theory // Межд. конф. «Алгебра и ее приложения», посв. 75-летию В. П. Шункова, Красноярск, 12–18 авг. 2007 г., тез. докл. С. 162–163.

[52] *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. 1963. V. 13, N3. P. 775–1029.

[53] *Hartley B.* A theorem of Sylow type for a finite groups // Math. Z. 1971. V. 122, N4. P. 223–226.

[54] *Hartley B.* Helmut Wielandt on the π-structure of finite groups // Mathematische Werke = Mathematical Works / Helmut Wielandt, ed. by B. Huppert and H. Sneider, vol. 1, Berlin: Walter de Gruyter, 1994. P. 511–516.

[55] *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 1956. V. 6, N22. P. 286–304.

[56] *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98–105.

[57] *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12. P. 198–200.

[58] *Hall P., Higman G.* On the p-lenght of p-soluble groups and reduction theorem for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 1956. V. 6, N21. P. 286–304.

[59] *Îto N.* On π-structures of finite groups // Tôhoku Math. Journ. 1952. V. 4, N1. P. 172–177.

[60] *Suzuki M.* Group theory II, NY, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verl. 1986.

[61] *Sylow M. L.* Théorèmes sur les groupes de substitutions // Math. Ann. 1872. V. 5, N4. P. 584–594.

[62] *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Th. 1966. V. 1, N2. P. 271–279.

[63] *Wielandt H.* Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1954. V. 60, N4. 407–408.

[64] *Wielandt H.* Sylowgruppen und Kompositoin-Struktur // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1958. V. 22. P. 215–228.

[65] *Wielandt H.* Zum Satz von Sylow. II // Math. Z. 1959. V. 71, N4. P. 461–462.

[66] *Wielandt H.* Arithmetische Struktur und Normalstuktur endlicher Gruppen // Conv. Internaz. di Teoria dei Gruppi Finitine Applicazioni, Firenze, 1960. Roma: Edizioni Cremonese, 1960. P. 56–65.

[67] *Wielandt H.* Der Normalisator einer subnormalen Untergruppe // Acta Sci. Math. Szeged. 1960. V. 21. P. 324–336.

[68] *Wielandt H.* Sylowtürme in subnormalen Untergruppen // Math. Z. 1960. V. 73, N4. P. 386–392.

[69] *Wielandt H., Huppert B.* Arithmetical and normal sructure of finite groups // Proc. Symp. Pure Math. 1962. V. 6. Providence RI: Amer. Math. Soc. P. 17–38.

[70] *Wielandt H.* Sur la Stucture des groupes composés // Séminare Dubriel-Pisot (Algèbre et Théorie des Nombres), 17e anée, 10 pp. 1963/64. N17.

[71] *Wielandt H.* Zusammenghesetzte Gruppen: Hölder Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups, 1979. Proc. Sympos. Pure Math. V. 37, Providence RI: Amer. Math. Soc., 1980. P. 161–173.

[72] *Zappa G.* Sopra un'estensione di Wielandt del teorema di Sylow // Boll. Un. Mat. Ital. (3). 1954. V. 9, N4. P. 349—353.

Работы автора по теме диссертации

[73] *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, №1. С. 15–56.

[74] *Ревин Д. О.* Свойство D_π конечных групп в случае $2 \notin \pi$ // Труды ИММ УрО РАН. 2006. Т. 13, №1. С. 166–182.

[75] *Ревин Д. О.* Свойство D_π в линейных и унитарных группах // Сиб. матем. ж. 2008. Т. 49, №2. С. 437–448.

[76] *Ревин Д. О.* Характеризация конечных D_π-групп // ДАН. 2007. Т. 417, №5. С. 601–604.

[77] *Revin D. O.* The D_π-property in finite simple groups // Algebra and Logic. 2008. V. 47, N3. P. 210–227. Имеется русск. перев.: *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах, Алгебра и логика. 2008. Т. 47, №3. С. 364–394.

[78] *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Contemporary Mathematics. V. 402 (2006). С. 229–265.

[79] *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, №3. С. 335–370.

[80] *Ревин Д. О.* Суперлокалы в симметрических и знакопеременных группах // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, №3. С. 338–365.

[81] *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Матем. труды. 1999. Т. 2, №1. С. 157–205.

[82] *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. ж. 1997. Т. 38, №1. С. 106–113.

[83] *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* Арифметические свойства периодических групп // Математика, механика, информатика-2002. Труды конф., посв. 10-летию РФФИ. М.: Физматлит. 2004. С. 228–238.

[84] *Васильев А. В., Вдовин Е. П., Макаренко Н. Ю., Маслакова О. С., Ревин Д. О.* Характеризация групп: арифметические свойства, автоморфизмы, комбинаторные методы // Мат. III конф. молодых ученых, посв. 100-летию М. А. Лаврентьева, ч. I. Новосибирск. 2003 г. С. 13–18.

[85] *Вдовин Е. П., Заварницин А. В., Колесников П. С., Пожидаев А. П., Ревин Д. О.* Группы и алгебры лиева типа // Мат. V конф. молодых ученых, посв. М. А. Лаврентьеву, ч. I. Новосибирск. 2007 г. С. 11–15.

[86] *Ревин Д. О.* Две D_π-теоремы для одного класса конечных групп. Препр. №40. Новосибирск: ИДМИ. 1999.

[87] *Vdovin E. P., Revin D. O.* Hall subgroups of finite groups, Препр. №134. Новосибирск: ИМ СО РАН. 2004.

[88] *Ревин Д. О.* Холловы подгруппы неразрешимых конечных групп. Диссертация на соискание уч. ст. кандидата физ.-мат. наук. Новосибирск. 1999.

[89] *Ревин Д. О.* Холловы подгруппы неразрешимых конечных групп. автореферат диссертации на соискание уч. ст. кандидата физ.-мат. наук. Новосибирск. 1999.

[90] *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп // IV Межд. алгебр. конф., Новосибирск, авг. 2000 г. С. 46–48.

[91] *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of odd order of finite groups // Wisla, Poland. June 6–10 2000. C. 46–47.

[92] *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы свойства E_π и D_π в случае, когда $3 \notin \pi$ // Межд. сем. по теории групп, посв. 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н.Ф. Сесекина, тез. докл. Екатеринбург, 17–21 дек. 2001 г. С. 49.

[93] *Ревин Д. О.* Суперлокалы в симметрических и знакопеременных группах // Межд. сем. по теории групп, посв. 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н.Ф. Сесекина, тез. докл. Екатеринбург, 17–21 дек. 2001 г. С. 195–197.

[94] *Ревин Д. О.* Характеризация конечных D_π-групп // «Алгебра и логика», мат. российско-китайск. сем., Иркутск, 6–11 авг. 2007 г. С. 89–93.

[95] *Ревин Д. О.* Свойство D_π конечных групп // Межд. конф. «Алгебра и ее приложения», посв. 75-летию В. П. Шункова, Красноярск, 12–18 авг. 2007 г., тез. докл. С. 111.

[96] *Ревин Д. О.* Вокруг гипотезы Ф. Холла // Межд. конф. «Алгебра и ее приложения», посв. 75-летию В. П. Шункова, Красноярск, 12–18 авг. 2007 г., тез. докл. С. 111.

[97] *Ревин Д. О.* Холловы свойства конечных групп // Российская конф. «Математика в современном мире», посв. 50-летию Ин-та матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 17–23 сент. 2007 г., тез. докл. С. 37.

[98] *Ревин Д. О.* Группы со свойством D_π // Межд. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева, С.-Пб., 24–29 сент. 2007 г., тез. докл. С. 57–61.

[99] *Revin D. O., Vdovin E. P.* Existence and conjugacy of Hall subgroups in finite groups // Межд. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, М., 28 мая – 3 июня 2008 г., тез. докл. С. 343–344.

[100] *Revin D. O.* Generalizations of Sylow's Theorem // Межд. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, М., 28 мая – 3 июня 2008 г., тез. докл., С. 344–345.

Ревин Данила Олегович

Холловы подгруппы конечных групп

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать _._._.	Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. __. Уч.-изд. л. __.	Тираж ___ экз. Заказ №__

Отпечанатно в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирска, пр. Лаврентьева, 6