На правах рукописи

КОЛЕСНИКОВ Павел Сергеевич

СТРОЕНИЕ АССОЦИАТИВНЫХ КОНФОРМНЫХ АЛГЕБР

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 2008

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Бокуть Леонид Аркадьевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Зубков Александр Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор
Копытов Валерий Матвеевич

доктор физико-математических наук, профессор
Михалёв Александр Александрович

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный университет

Защита диссертации состоится 26 июня 2008 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу:
630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан «___» мая 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Понятие конформной алгебры было предложено В. Г. Кацем в книге [16] (в работе М. Примса [25] эквивалентное понятие было названо вертексной алгеброй Ли) как инструмент исследования алгебр вертексных операторов (вертексных алгебр). Последние возникли как формальный язык для описания алгебраических свойств операторного разложения произведений (operator product expansion, OPE) в двумерной конформной теории поля, начало которой было положено в работе А. А. Белавина, А. М. Полякова и А. Б. Замолодчикова [4]. Строгое математическое изложение соответствующей теории было впервые предложено Р. Борчердсом [6] и впоследствии развито в работах различных авторов, например Ч. Донга, И. Френкеля, Дж. Леповски, А. Мейрмана, Х. Ш. Ли (см. [11, 12, 19]). В настоящее время теория алгебр вертексных операторов является одной из наиболее активно развивающихся областей теории представлений и математической физики. Связь между вертексными и конформными алгебрами во многом подобна связи обычных ассоциативных и лиевых алгебр, поэтому исследования конформных алгебр важны для теории вертексных алгебр и ее многочисленных приложений.

Основой классической теории конечномерных ассоциативных алгебр являются теоремы Веддерберна о строении простых и полупростых алгебр. В частности, над алгебраически замкнутым полем полупростая конечномерная алгебра изоморфна прямой сумме матричных алгебр над этим полем (для поля комплексных чисел соответствующая теорема была доказана Ф. Э. Молиным еще в 1893 г.). Теоремы Веддерберна тесно связаны с другим классическим результатом — теоремой Бернсайда о том, что если подалгебра S в алгебре линейных преобразований $\mathrm{End}_{\Bbbk} V$ конечномерного линейного пространства V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ действует неприводимо на этом пространстве, то $S = \mathrm{End}_{\Bbbk} V$.

Теоремы Веддерберна и Бернсайда играют важную роль в теории колец, теории представлений конечных групп и конечномерных алгебр Ли. Появление новых объектов — конформных и вертексных алгебр — потребовало распространения теоремы Бернсайда на случай линейных пространств бесконечной размерности. Разумеется, в общей постановке эта задача вряд ли будет решена в обозримой перспективе, поскольку она является даже более общей, чем задача классификации всех конечно-порожденных простых ассоциативных алгебр.

Но специфические свойства конформных алгебр позволяют выделить класс подалгебр алгебры линейных преобразований пространства счетной размерности, определенным образом связанных с так называемыми алгебрами конформных эндоморфизмов. Проблема описания объектов этого класса является задачей теории ассоциативных колец, непосредственно связанной с теорией конформных алгебр.

Приведем формальное алгебраическое определение конформной алгебры, следуя работам В. Г. Каца [17] и М. Ройтмана [28]. Линейное пространство C над полем $\Bbbk$ характеристики нуль, снабженное линейным преобразованием $D\colon C \to C$ и семейством билинейных операций $(\cdot \circ_n \cdot)$, где n принимает значения в множестве $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел, называется *конформной алгеброй*, если выполняются следующие условия:

(C1) для любых $a, b \in C$ существует $N \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $a \circ_n b = 0$ при $n \geq N$;

(C2) $D(a \circ_n b) = Da \circ_n b + a \circ_n Db$ и $Da \circ_n b = -na \circ_{n-1} b$ при $a, b \in C$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Правая часть последнего выражения считается равной нулю при $n = 0$.

Это определение является формальным описанием следующей конструкции. Рассмотрим обычную (не обязательно ассоциативную) алгебру A над полем $\Bbbk$, $\operatorname{char} \Bbbk = 0$. Пара (бесконечных в обе стороны) степенных рядов $a(z), b(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ называется *локальной*, если существует такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что $a(w)b(z)(w-z)^N = 0$ в пространстве $A[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$. Для любой локальной пары рядов $a(z)$, $b(z)$ произведение вида $a(w)b(z)$ может быть записано в виде конечного распределения по производным дельта-функции $\delta(w-z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} w^s z^{-s-1}$:

$$a(w)b(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z) \frac{1}{n!} \partial_z^n \delta(w-z), \quad c_n(z) \in A[[z, z^{-1}]],\ \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1)$$

Для случая $A = \mathrm{gl}(V)$ соотношение (1) известно как OPE-формула. Коэффициенты этого распределения $c_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, можно рассматривать как «n-произведения» рядов $a(z)$ и $b(z)$: $(a \circ_n b)(z) = c_n(z) = \operatorname{Res}_w a(w)b(z)(w-z)^n$, где $\operatorname{Res}_w f(w,z)$ означает вычет ряда $f(w,z)$ в точке $w = 0$ (коэффициент при w^{-1}). При этом, очевидно, выполнено свойство (C1). Если определить операцию D как обычное дифференцирование по z, то выполняется также свойство (C2). Таким образом, любое подпространство $C \subset A[[z, z^{-1}]]$, состоящее из попарно локальных рядов и замкнутое относительно операций $D = \frac{d}{dz}$ и $(\cdot \circ_n \cdot)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, является конформной алгеброй. Более того, любая конформная алгебра C может быть построена как некоторое подпространство в пространстве степенных рядов над подходящей алгеброй A относительно указанных операций. Если алгебра A может быть выбрана ассоциативной (коммутативной, лиевой и т. п.), то C называется ассоциативной (соответственно коммутативной, лиевой и т. п.) конформной алгеброй.

Для исследования представлений вертексных и конформных алгебр важнейшим объектом является алгебра конформных эндоморфизмов свободного конечно-порожденного модуля M над алгеброй многочленов $\Bbbk[T]$ [16, 17]. Именно, для $M = \Bbbk[T] \otimes \Bbbk^N$ через Cend_N обозначается множество таких отображений $a\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathrm{End}_{\Bbbk} M$, что выполнены следующие условия:

(i) для любого $v \in M$ существует $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $a(n)v = 0$ для всех $n \geq m$;

(ii) $[a(n), T] = a(n)T - Ta(n) = na(n-1)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Здесь, как и выше, $[a(0), T] = 0$. Множество Cend_N наделено естественной структурой ассоциативной конформной алгебры, которая является «конформным аналогом» алгебры линейных преобразований N-мерного пространства над полем $\Bbbk$. Конформную алгебру Cend_N можно отождествить с пространством матриц над алгеброй многочленов от двух переменных $\mathbb{M}_N(\Bbbk[D, x]) \simeq \Bbbk[D] \otimes \mathbb{M}_N(\Bbbk[x])$, на котором операции $(\cdot \circ_n \cdot)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, заданы правилом

$$X \circ_n Y = X \frac{d^n}{dx^n} Y, \quad X, Y \in \mathbb{M}_N(\Bbbk[x]).$$

Говорят, что подалгебра C в конформной алгебре Cend_N *неприводимая*, если M не содержит собственных ненулевых $\Bbbk[T]$-подмодулей, инвариантных относительно всех преобразований $a(n)$, $a \in C$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

В книге В. Г. Каца [16] были поставлены следующие задачи.

Проблема 1. Описать неприводимые подалгебры в конформной алгебре Cend_N.

Проблема 2. Классифицировать (полу)простые подалгебры в Cend_N.

Ясно, что для решения этих проблем необходимо доказать аналоги теорем Бернсайда и Веддерберна для конформных алгебр.

Исследование этих задач проводилось в ряде работ различных авторов. В статье К. Бойаллиан, В. Г. Каца и Х. И. Либерати [7] получено наиболее существенное продвижение в решении проблемы 1: полностью рассмотрен случай $N = 1$, описаны неприводимые подалгебры конечного ранга над $\Bbbk[D]$, а также унитальные неприводимые подалгебры, т. е. содержащие отображение e, $e(n) = \dfrac{d^n}{dT^n}$, являющееся аналогом единицы в Cend_N. На основании этих результатов была выдвинута следующая

Гипотеза 1 [7]. *Неприводимая подалгебра в* Cend_N *либо изоморфна конформной алгебре петель (токов)* $\mathrm{Cur}_N = \mathbb{M}_N(\Bbbk[D])$, *либо равна*

$$\mathrm{Cend}_{N,Q} = \mathbb{M}_N(\Bbbk[D,x])Q(-D+x),$$

где Q *— матрица с полиномиальными коэффициентами*, $\det Q \neq 0$.

Е. И. Зельмановым [31] получено подтверждение гипотезы 1 для таких подалгебр в Cend_N, которые содержат лиеву подалгебру, изоморфную конформной алгебре петель над sl_2.

Из результатов работы А. Десоле и В. Г. Каца [10] вытекает, что для таких подалгебр в Cend_N, которые инвариантны относительно регулярного действия алгебры sl_2, ассоциированной с элементом типа Вирасоро из Cend_N, гипотеза 1 верна.

Понятие роста алгебраической системы (кольца, алгебры, группы и т. д.) введенное в работе И. М. Гельфанда и А. А. Кириллова [13], а также его логарифмическая численная характеристика (размерность Гельфанда — Кириллова, GKdim) широко используются в алгебре. Так, локально конечномерные алгебры имеют размерность Гельфанда — Кириллова, равную нулю, а все остальные алгебры — больше либо равную единице. Таким образом, конечно-порожденные алгебры размерности Гельфанда — Кириллова один являются следующим объектом изучения структурной теории после конечномерных алгебр. В работах Л. Смолла, Дж. Стаффорда и Р. Варфилда [29, 30] показано, что полупервичная конечно-порожденная ассоциативная алгебра линейного роста является конечно-порожденным модулем над своим центром.

В работе А. Ретаха [26] было предложено использовать понятие размерности Гельфанда — Кириллова конформных алгебр для изучения проблемы 2. Поскольку $\mathrm{GKdim}\,\mathrm{Cend}_N = 1$ (т. е. это конформная алгебра *линейного роста*), возникла новая (в явном виде сформулированная в [31]) задача.

Проблема 3. Классифицировать простые конечно-порожденные ассоциативные конформные алгебры линейного роста.

В работе [26] проблема 3 была решена в частном случае, когда конформная алгебра C унитальна, т. е. содержит элемент $e \in C$ такой, что $e \circ_0 a = a$ для любого $a \in C$ и $e \circ_n e = 0$ при $n \geq 1$. Заметим, что условие унитальности для конформных алгебр является гораздо более обременительным, чем для обычных алгебр; до сих пор неизвестно, можно ли любую ассоциативную конформную алгебру вложить в унитальную. В работе Е. И. Зельманова [31] результат [26] был распространен на конформные алгебры с идемпотентом, т. е. таким элементом e, что $e \circ_n e = \delta_{n,0} e$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В этой же работе была выдвинута

Гипотеза 2 [31]**.** *Любая конечно-порожденная простая ассоциативная конформная алгебра не более чем линейного роста (т. е. имеющая размерность Гельфанда — Кириллова не больше единицы) изоморфна неприводимой подалгебре в* Cend_N *для некоторого* $N \geq 1$.

Для случая конформных алгебр *конечного типа*, т. е. размерности Гельфанда — Кириллова нуль, справедливость гипотезы следует из работы А. д'Андреа и В. Г. Каца [9], которая, в свою очередь, опирается на глубокую теорему Картана — Гиймена [15].

Если понятие конформной алгебры имеет своими корнями конструкции математической физики, то *диалгебры*, введенные Ж.-Л. Лодеем и Т. Пирашвили [23], имеют чисто алгебраическое происхождение — они играют роль ассоциативных обертывающих алгебр для некоммутативных алгебр Ли, известных как алгебры Лейбница или алгебры Лодея. Именно, алгебры Лейбница, возникающие при исследовании когомологий алгебр Ли [21], представляют собой линейные пространства с билинейной операцией $[\cdot\,\cdot]$, удовлетворяющей (левому или правому) тождеству Лейбница:

$$[a[bc]] = [[ab]c] + [b[ac]] \quad \text{или} \quad [[ab]c] = [[ac]b] + [a[bc]].$$

Ассоциативной диалгеброй называется пространство, снабженное двумя билинейными операциями $(\cdot \dashv \cdot)$, $(\cdot \vdash \cdot)$, удовлетворяющими таким тождествам, что операция $[ab] = a \vdash b - b \dashv a$ превращает это пространство в левую алгебру Лейбница. Вложение алгебры Лейбница в ассоциативную диалгебру, исследованное в работах М. Аймона и П. Гривеля [1], Ж.-Л. Лодея [22], во многом подобно вложению алгебры Ли в ассоциативную алгебру. В частности, в этих работах доказан аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта для алгебр Лейбница.

Оставалось неизвестным, верен ли аналог другого фундаментального результата, касающегося вложения алгебр Ли в ассоциативные алгебры — теоремы Адо.

В работах Д. Лиу [20] и Ф. Шапотона [8] в качестве инструментов исследования алгебр Лейбница введены соответственно понятия альтернативной диалгебры и perm-алгебры (коммутативной диалгебры). Все упомянутые определения (ассоциативных, альтернативных и коммутативных) диалгебр являются апостериорными в том смысле, что основываются на некоммутативных аналогах конструкций, связывающих соответствующие многообразия обычных алгебр с алгебрами Ли. Для реализации систематического подхода к теории диалгебр необходимо выработать единую схему для нахождения определяющих тождеств многообразий диалгебр.

Цель работы. Данная работа посвящена решению проблем 1–3, относящихся к структурной теории ассоциативных конформных алгебр бесконечного типа. Понятия и техника, разработанные для решения этих проблем, далее применяются к теории диалгебр, что позволяет построить общую схему для нахождения определяющих тождеств многообразий диалгебр, соответствующих классическим многообразиям алгебр, и доказать аналог теоремы Адо для алгебр Лейбница.

Основные результаты диссертации. В формулировках результатов 2, 3 предполагается, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. Для результатов 1, 4 и 5 никаких дополнительных условий на поле $\Bbbk$ не требуется.

1. Введено понятие конформной алгебры над линейной алгебраической группой G. Обычные и конформные в смысле В. Г. Каца алгебры являются конформными алгебрами над тривиальной группой $G = \{e\}$ и аффинной прямой $G = \mathbb{A}^1$ соответственно.
2. Полностью описаны неприводимые подалгебры в конформной алгебре (над $\mathbb{A}^1$) Cend_N, $N \geq 1$. Доказаны аналоги структурных теорем Веддерберна для конформных алгебр с точным представлением конечного типа. Тем самым доказана гипотеза 1 и решены проблемы 1 и 2.
3. Доказано, что класс конечно-порожденных простых ассоциативных конформных алгебр над $\mathbb{A}^1$ не более чем линейного роста состоит из всех алгебр, изоморфных неприводимым подалгебрам в Cend_N, $N \geq 1$. Тем самым доказана гипотеза 2 и решена проблема 3.

4. Введено понятие конформного представления алгебры Лейбница и показано, что любая алгебра Лейбница имеет точное конформное представление. Для конечномерных алгебр Лейбница построено точное конформное представление конечного типа.
5. Показано, как при помощи теории конформных алгебр объединить в рамках единого подхода все встречающиеся в литературе многообразия диалгебр. Для любого однородного многообразия алгебр Var, заданного семейством полилинейных определяющих тождеств, доказано, что каждая диалгебра многообразия Var вкладывается в некоторую конформную алгебру многообразия Var.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований в области теории ассоциативных колец, конформных алгебр и диалгебр, а также для изучения представлений конформных и вертексных алгебр, играющих важную роль в теоретической физике. Они могут быть включены в специальные курсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. Используется общий категорный подход к определению конформных алгебр, основанный на понятиях мультикатегории (псевдотензорной категории) и операды. Введенное в работе понятие конформной алгебры над линейной алгебраической группой (результат 1), эквивалентное понятию алгебры в мультикатегории, ассоциированной с соответствующей координатной алгеброй Хопфа, является основным инструментом исследования наряду с классическими методами структурной теории колец: теоремой плотности Джекобсона, теоремами Голди, Капланского и др.

Апробация работы. Результаты диссертации в период с 2004 по 2008 гг. были представлены на международных конференциях в Новосибирске, Москве, Астане (Казахстан), Сан-Пауло (Бразилия), Сеуле (Южная Корея), Каире (Египет), Пекине и Гуанчжоу (КНР). В частности, на международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2004 и 2007 гг.), «Model Theory and Algebra» (Астана, 2005), «Cairo Algebra/Coalgebra Conference» (Каир, 2006), «2nd International

Congress in Algebra and Combinatorics» (Пекин, 2007), «International Workshop in Algebra and Applications» (Гуанчжоу, 2007) автором были сделаны пленарные доклады по теме диссертации. Результаты неоднократно докладывались на семинаре по теории колец им. А. И. Ширшова Института математики СО РАН, семинаре «Алгебра и логика» Новосибирского государственного университета, на математических семинарах Корейского института высших исследований (г. Сеул, Южная Корея) и на семинарах «Эварист Галуа» НГУ, Калифорнийского университета (г. Сан-Диего, США) и на общеинститутском семинаре Института математики СО РАН.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в форме статей в отечественных и зарубежных журналах [32]–[39], а также в материалах международных конференций [40]–[45].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из семи глав. Она изложена на 138 страницах текста, набранного в редакционно-издательской системе $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Список литературы, приведенный в конце работы, содержит 76 наименований.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Каждая из глав диссертации подразделяется на параграфы. Первому параграфу каждой главы предшествует краткая характеристика результатов данной главы. Нумерация утверждений (лемм, теорем, предложений, следствий), а также определений, примеров и замечаний сквозная внутри главы. Каждый номер состоит из двух чисел: первое соответствует номеру главы, второе — порядковому номеру утверждения в данной главе. Это же правило применяется к номерам параграфов и формул (нумерация приведенных ниже утверждений отличается от использованной в диссертации).

Глава 1. Первая глава носит вводный характер. Для работы с конформными алгебрами обычно используют один из трех языков: n-произведений (В. Г. Кац [16], М. Ройтман [28]), λ-произведений (В. Г. Кац [17]) или псевдопроизведений (Б. Бакалов, А. д'Андреа, В. Г. Кац [2]). Здесь мы приводим необходимые определения и конструкции, объясняем связи между ними и формулируем известные результаты, непосредственно относящиеся к теме диссертации.

Глава 2. Данная глава посвящена построению общей теории для обычных алгебр, конформных алгебр и псевдоалгебр, а также проверке того, что все введенные понятия и конструкции согласованы с уже известными. Это необходимо для обоснования использования введенной техники при доказательстве основных результатов диссертации.

В § 2.1 мы приводим известные понятия мультикатегории и операды. Первое введено Дж. Ламбеком [18] и, позднее, А. Бейлинсоном и В. Дринфельдом [3] под именем псевдотензорной категории, второе восходит к работе Дж. Мэя [24]. На самом деле, операда — это мультикатегория с единственным объектом. Мы используем специально разработанный язык, позволяющий в дальнейшем применить эти понятия к вопросам теории конформных алгебр и диалгебр. Также в этом параграфе приводятся необходимые примеры операд.

В § 2.2 мы применяем категорный подход В. Гинзбурга и М. Капранова [14] к теории псевдоалгебр над (ассоциативной) биалгеброй H. Именно, любую алгебру над полем $\Bbbk$ можно рассматривать как функтор из операды Alg бинарных деревьев в мультикатегорию $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ относительно полилинейных отображений. Если вместо поля $\Bbbk$ рассмотреть биалгебру H (например, биалгебру многочленов $\Bbbk[T]$, в которой T — примитивный элемент), то на классе H-mod левых H-модулей можно так задать структуру мультикатегории, что любой функтор из операды Alg в H-mod определяет псевдоалгебру над H (для $H = \Bbbk[T]$, $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$, — конформную алгебру). Категорный подход позволяет для любого однородного многообразия Var, заданного полилинейными тождествами, естественным образом определить, что есть псевдоалгебра (в частности, конформная алгебра) многообразия Var. Важно отметить, что класс псевдоалгебр (конформных алгебр) многообразия Var не является многообразием в обычном смысле Г. Биркгофа [5].

В § 2.3 вводится определение конформной алгебры над линейной алгебраической группой. Это понятие является основным инструментом, используемым в диссертации. Пусть G — линейная алгебраическая группа, $H = \Bbbk[G]$ — алгебра Хопфа регулярных функций на G.

Определение 1. Левый H-модуль C, снабженный семейством билинейных операций $(\cdot \circ_g \cdot)\colon C \times C \to C$, $g \in G$, называется *конформной алгеброй над* G, если выполняются следующие условия:

- для любых $a, b \in C$ отображение $g \mapsto (a \circ_g b)$ является регулярной C-значной функцией на G;
- $(ha \circ_g b) = h(g^{-1})(a \circ_g b)$ и $(a \circ_g hb) = \sum\limits_{(h)} h_{(1)}(g)h_{(2)}(a \circ_g b)$ для любого $h \in H$.

Здесь $\sum\limits_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \Delta(h)$, $\Delta\colon H \to H \otimes H$ — коумножение на алгебре регулярных функций.

Гомоморфизм конформных алгебр C_1 и C_2 — это такое H-линейное отображение $\varphi\colon C_1 \to C_2$, что $\varphi(a \circ_g b) = (\varphi(a) \circ_g \varphi(b))$ для любых $a, b \in C_1$, $g \in G$.

Доказано, что категории конформных алгебр над G и псевдоалгебр над $H = \Bbbk[G]$ совпадают. В частности, конформные алгебры в смысле В. Г. Каца [16] можно рассматривать как конформные алгебры над аффинной прямой $G = \mathbb{A}^1$ в смысле определения 1.

В § 2.4 показано, что определение многообразия конформных алгебр из § 2.2 для случая, когда $G = \mathbb{A}^1$, эквивалентно предложенному в работе М. Ройтмана [28] определению, использующему понятие алгебры коэффициентов. Мы доказываем эквивалентность этих определений при помощи построения функтора Coeff из мультикатегории H-mod, $H = \Bbbk[T]$, в мультикатегорию $\mathrm{Vec}_\Bbbk$.

Результаты этой главы опубликованы в [35, 38]; докладывались на международных конференциях в Сан-Пауло («Lie and Jordan Algebras, Their Representations and Applications, II», 3–8 мая 2004 г.) [40], Каире («Cairo Algebra/Coalgebra Conference», 25–30 марта 2006 г.) [43] и Гуанчжоу («International Workshop in Algebra and Applications», 2–4 июля 2007 г.) [44], на семинарах Института математики СО РАН в Новосибирске и Корейского института высших исследований в Сеуле.

Глава 3. В этой главе исследуется один из наиболее важных примеров ассоциативных конформных алгебр. Пусть G — линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, непрерывно действующая слева на замкнутом подмножестве V аффинного пространства (относительно топологии Зариского). Обозначим через H и A алгебры регулярных функций на G и V соответственно.

В § 3.1 вводятся и исследуются понятия локальной регулярности и трансляционной инвариантности. Алгебраическая замкнутость поля $\Bbbk$ не существенна для определений, но используется в доказательствах большинства утверждений этой главы.

Определение 2. Отображение $a : G \to \operatorname{End}_\Bbbk M$, где M — левый A-модуль, называется *локально регулярным*, если для любого $u \in M$ функция $a(\cdot)u : g \mapsto a(g)u$, $g \in G$, является регулярной. Отображение a называется *трансляционно инвариантным*, если $a(g)(fu) = (L_g f)a(g)u$, где $(L_g f)(x) = f(gx)$, для любых $g \in G$, $f \in A$, $u \in M$.

Эти свойства обобщают аксиомы (C1) и (C2) конформной алгебры, выражая их на языке свойств операторно-значных функций на G. Показано, что множество $\mathrm{Cend}^{G,V} M$ всех локально регулярных трансляционно инвариантных отображений $G \to \mathrm{End}_{\Bbbk} M$ конечно-порожденного A-модуля M является конформной алгеброй над G.

В § 3.2 доказано, что если M — свободный n-порожденный A-модуль, то конформная алгебра $\mathrm{Cend}_n^{G,V} = \mathrm{Cend}^{G,V} M$ изоморфна дифференциальной конформной алгебре, т. е. свободному H-модулю $H \otimes \mathrm{End}_A M$ с операциями

$$(h \otimes \varphi) \circ_g (f \otimes \psi) = h(g^{-1})(L_g f) \otimes \varphi(L_g \psi),$$

$h, f \in H$, $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_A M$, $g \in G$, где $(L_g \psi)u = L_g(\psi(L_{g^{-1}} u))$ для $u \in M$. Всюду далее мы отождествляем $\mathrm{Cend}_n^{G,V}$ и $H \otimes \mathrm{End}_A M$.

Полностью описаны левые, правые и двусторонние идеалы в конформной алгебре $\mathrm{Cend}_n^{G,V}$. В частности, эта конформная алгебра является простой тогда и только тогда, когда G действует на множестве V неприводимо.

В § 3.3 вводится и исследуется основной инструмент изучения конформной алгебры $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$ над линейной алгебраической группой G (здесь мы рассматриваем действие G на себе операторами левого умножения, при этом $A = H = \Bbbk[G]$). Этим инструментом является (обычная) алгебра $W_n(G) \subseteq \mathrm{End}_{\Bbbk} M$, $M \simeq H \otimes \Bbbk^n$, которая строится следующим образом:

$$W_n(G) = \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{a(g) \mid a \in \mathrm{Cend}_n,\ g \in G\},$$

при этом

$$a(g)b(z) = (a \circ_g b)(zg), \quad a, b \in \mathrm{Cend}_n^{G,G}, \quad g, z \in G.$$

Мы рассматриваем $W_n(G)$ как топологическую алгебру над $\Bbbk$ относительно индуцированной конечной топологии. Именно, последовательность элементов $\{\alpha_k\}_{k \geq 0}$, $\alpha_k \in W_n(G)$, сходится к нулю тогда и только тогда, когда для любого конечного множества $u_1, \ldots, u_m \in M$ существует $N \geq 1$ такое, что $\alpha_k u_i = 0$ для всех $k \geq N$, $i = 1, \ldots, m$.

Ключевыми результатами являются следующие утверждения.

Лемма 1. (i) *Алгебра $W_n(G)$ является топологическим левым H-модулем относительно дискретной топологии на H.*

(ii) *Конформная алгебра $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$ является топологическим левым $W_n(G)$-модулем относительно дискретной топологии на Cend_n.*

Важно отметить, что по аксиоме трансляционной инвариантности алгебра $W_n(G)$ замкнута относительно умножения слева и справа на операторы Γ_h, $h \in H$, где $\Gamma_h : u \mapsto hu$ для $u \in M$. Это умножение отличается от модульного действия из леммы 1(i): последнее выражается формулой

$$h \cdot \alpha = \sum_{(h)} \Gamma_{h_{(1)}} \alpha \Gamma_{h_{(-2)}}, \quad h \in H, \ \alpha \in W_n(G).$$

Теорема 1. *Если $S \subseteq W_n(G)$ — подалгебра, действующая неприводимо на M, причем $\Gamma_h S, S\Gamma_h \subseteq S$ для любого $h \in H$, то S является плотной подалгеброй в $\operatorname{End}_{\Bbbk} M$ относительно конечной топологии.*

Также в этом параграфе показано, что группа автоморфизмов конформной алгебры $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$ изоморфна группе топологических автоморфизмов алгебры $W_n(G)$.

В § 3.4 получен основной результат главы, относящийся к описанию неприводимых подалгебр конформной алгебры $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$ над линейной алгебраической группой G. Напомним, что поле $\Bbbk$ предполагается алгебраически замкнутым.

Определение 3. Подалгебра $C \subseteq \mathrm{Cend}_n^{G,G}$ называется *неприводимой*, если M не содержит ненулевых собственных H-подмодулей, инвариантных относительно всех операторов вида $a(g)$, $a \in C$, $g \in G$.

Теорема 2. *Подалгебра $C \subseteq \mathrm{Cend}_n^{G,G}$ неприводима тогда и только тогда, когда $\{(1\otimes\Gamma_h)C \mid h \in H\}$ является существенным левым идеалом в $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$.*

Последняя теорема еще не является окончательным описанием неприводимых подалгебр в $\mathrm{Cend}_n^{G,G}$. Построение такого описания для произвольной линейной алгебраической группы представляет собой, по-видимому, весьма сложную задачу. В случае $G = \{e\}$ теорема 2 совпадает с классической теоремой Бернсайда, а случаю $G = \mathbb{A}^1$ посвящена следующая глава.

Результаты этой главы докладывались на международных конференциях в Новосибирске («Мальцевские чтения», 13–15 ноября 2007 г.) и Пекине («2nd International Congress in Algebra and Combinatorics», 6–11 июля 2007 г.), на семинаре по теории колец им. А. И. Ширшова Института математики СО РАН и семинаре «Алгебра и логика» в Новосибирском государственном университете.

Глава 4. В этой главе мы используем результаты главы 3 для получения полного описания неприводимых подалгебр в конформной алгебре $\mathrm{Cend}_n = \mathrm{Cend}_n^{G,G}$ для $G = \mathbb{A}^1 \simeq (\Bbbk, +)$, $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$, т. е. для случая конформных алгебр в смысле В. Г. Каца [16] над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.

В § 4.1 техника, разработанная в главе 3, адаптируется для исследования конформных алгебр над аффинной прямой. Вводится алгебра $S(\mathrm{Cend}_n)$, порожденная операторами $a(m) \in \mathrm{End}_\Bbbk M$, $a \in \mathrm{Cend}_n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, где M — свободный n-порожденный левый модуль над $\Bbbk[\mathbb{A}^1]$. Связь между преобразованиями вида $a(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{A}^1$, и $a(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, описывается соотношением

$$a(\lambda) = \sum_{s\geq 0} \frac{\lambda^s}{s!} a(s), \quad a \in \mathrm{Cend}_n .$$

Все основные результаты главы 3, относящиеся к свойствам алгебры $W_n(\mathbb{A}^1)$, переносятся на $S(\mathrm{Cend}_n)$. В частности, $S(\mathrm{Cend}_n)$ является плотной подалгеброй в $\mathrm{End}_\Bbbk M$ относительно конечной топологии.

Мы показываем, что $S(\mathrm{Cend}_n)$ топологически изоморфна матричной алгебре $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$, где $\mathfrak{A}_1 = \Bbbk\langle p, q \mid qp - pq = 1\rangle$ — первая алгебра Вейля, рассматриваемая относительно q-адической топологии. Это позволяет свести многие проблемы, касающиеся конформной алгебры Cend_n, к изучению алгебры $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$.

Для любой подалгебры (или одностороннего идеала) C конформной алгебры Cend_n множество операторов $S(C) = \{a(m) \mid a \in C, m \in \mathbb{Z}_+\}$ образует подалгебру (или односторонний идеал) в $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$; любой автоморфизм конформной алгебры Cend_n индуцирует автоморфизм алгебры $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$. Все подалгебры вида $S(C)$ инвариантны относительно операции $[\cdot, p]$, которая представляет собой формальное дифференцирование по переменной q; любой автоморфизм алгебры $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$, индуцированный автоморфизмом конформной алгебры Cend_n, коммутирует с операцией $[\cdot, p]$ и является непрерывным относительно q-адической топологии.

Следующее утверждение существенно используется ниже при доказательстве основного результата главы, но оно также представляет самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть θ — автоморфизм алгебры $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$, коммутирующий с операцией $[\cdot, p]$. Тогда*

$$\theta = \theta_{\alpha,P,h} : a(p,q) \mapsto P^{-1}(p) a(p+\alpha, q - h(p)) P(p)$$

для подходящих $\alpha \in \Bbbk$, $h(p) \in \Bbbk[p]$, $P, P^{-1} \in \mathbb{M}_n(\Bbbk[p])$.

Автоморфизм вида $\theta_{\alpha,P,h}$ является непрерывным тогда и только тогда, когда $h(p) = 0$.

В качестве элементарного следствия теоремы 3 получаем описание автоморфизмов конформной алгебры Cend_n из [7].

В § 4.2 собраны результаты технического характера, необходимые для полного описания неприводимых подалгебр в Cend_n. Здесь исследованы подалгебры $S \subseteq \mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$, которые имеют вид $S = S(C)$, где C — некоторая конформная подалгебра в Cend_n, удовлетворяющие условию

$$\bigoplus_{m\geq 0} p^m S = \mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1). \tag{2}$$

В частности, размерность Гельфанда — Кириллова таких алгебр равна единице. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 4. *Если $S = S(C)$ для некоторой подалгебры $C \subset \mathrm{Cend}_n$ и S удовлетворяет условию* (2), *то существует автоморфизм Θ конформной алгебры Cend_n такой, что $\Theta(C) = \mathrm{Cur}_n$.*

В § 4.3 завершается описание неприводимых подалгебр в Cend_n. Из теоремы 2, примененной к случаю $G = \mathbb{A}^1$, вытекает, что для любой неприводимой подалгебры $C \subseteq \mathrm{Cend}_n$ подалгебра $S(C) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)$ обладает следующим свойством:

$$\sum_{m\geq 0} p^m S(C) = \mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)Q(p), \tag{3}$$

где $Q(p) \in \mathbb{M}_n(\Bbbk[p])$, $\det Q \neq 0$. Рассматриваются следующие три случая.

1. Сумма (3) прямая.
2. Пространства $S(C)$ и $pS(C)$ имеют ненулевое пересечение.
3. Сумма (3) не прямая, но $S(C) \cap pS(C) = 0$.

Мы показываем, что в случае 1 матрица Q имеет определитель, равный ненулевой константе. Поэтому без ограничения общности можно считать, что Q — единичная матрица. Из теоремы 4 следует, что $C = \Theta(\mathrm{Cur}_n)$, где Θ — автоморфизм конформной алгебры Cend_n. При этом $S(C) = \theta_{0,P,0}(\mathbb{M}_n(\Bbbk[q]))$, где $\theta_{0,P,0}$ — автоморфизм из теоремы 3.

В случае 2 получаем равенство $S(C) = \mathbb{M}_n(\mathfrak{A}_1)Q(p)$ и, следовательно, $C = \mathrm{Cend}_{n,Q}$. Наконец, показываем, что случай 3 невозможен. Таким образом, доказан основной результат главы.

Теорема 5. *Пусть C — неприводимая подалгебра в* Cend_n. *Тогда либо* $C = \mathrm{Cend}_{n,Q}$, $\det Q \neq 0$, *либо существует такой автоморфизм* Θ *конформной алгебры* Cend_n, *что* $C = \Theta(\mathrm{Cur}_n)$.

Результаты этой главы опубликованы в [32, 34]; докладывались на международных конференциях в Сан-Пауло («Lie and Jordan Algebras, Their Representations and Applications, II», 3–8 мая 2004 г.) [40], и Новосибирске («Мальцевские чтения», 16–18 ноября, 2004 г.), на семинарах Института математики СО РАН в Новосибирске, Калифорнийского университета в Сан-Диего и Корейского института высших исследований в Сеуле.

Глава 5. В этой главе мы применяем полученные выше результаты для построения структурной теории ассоциативных конформных алгебр над аффинной прямой с точным представлением конечного типа, т. е. таких, которые могут быть вложены в алгебру конформных эндоморфизмов конечно-порожденного модуля над алгеброй многочленов. Как и в предыдущей главе, поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$. В частности, мы обобщаем результаты работ [9, 17, 31], относящиеся к ассоциативным конформным алгебрам конечного типа.

Напомним, что если ассоциативная конформная алгебра C имеет точное представление конечного типа, то C является подалгеброй в конформной алгебре $\mathrm{Cend}\,M$, где M — конечно-порожденный модуль над алгеброй многочленов $H = \Bbbk[T]$.

В § 5.1 решена проблема 2: доказан следующий аналог структурных теорем Веддерберна.

Теорема 6. *Пусть C — ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа Тогда:*

(i) *существует наибольший нильпотентный идеал* $\mathfrak{N}(C)$ *в* C*;*

(ii) *если C проста, то C изоморфна либо* Cur_n, *либо* $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $n \geq 1$, $\det Q \neq 0$*;*

(iii) *если C полупроста, т. е. не имеет ненулевых нильпотентных идеалов, то* $C = \bigoplus\limits_{s=1}^{N} I_s$, *где* I_s, $s = 1, \ldots, N$, *— простые конформные алгебры, являющиеся идеалами в* C, *описанные в пункте* (ii).

Естественный вопрос, верен ли аналог теоремы об отщеплении радикала для данного класса конформных алгебр, рассмотрен в § 5.2. Ответ на этот вопрос оказывается более сложным, чем в классическом случае.

Теорема 7. *Пусть C — подалгебра в* $\mathrm{Cend}\, M$, *и пусть* $R = \mathfrak{N}(C)$ — *наибольший нильпотентный идеал в* C. *Если* C/R *унитальна, т. е. содержит конформную единицу в смысле* [26], *то существует полупростая подалгебра* S *в* C *такая, что* $C = S \oplus R$.

Условие унитальности полупростой конформной алгебры эквивалентно тому, что в представлении теоремы 6(iii) все слагаемые I_s изоморфны либо Cur_{n_s}, либо Cend_{n_s}, $n_s \geq 1$.

В заключение параграфа мы приводим пример, показывающий, что без условия унитальности теорема 7 неверна.

В § 5.3 рассматривается приложение результатов § 5.1, 5.2 к структурной теории алгебр дифференциальных операторов. Мы приводим аксиоматическое описание класса алгебр, которые естественным образом связаны с конформными алгебрами, имеющими точное представление конечного типа. Непосредственные следствия теорем 5–7 позволяют определить структуру таких алгебр.

Результаты этой главы опубликованы в [34, 36, 37]; докладывались на международных конференциях в Сан-Пауло («Lie and Jordan Algebras, Their Representations and Applications, II», 3–8 мая 2004 г.) [40], Сеуле («Seventh Asian Symposium on Computer Mathematics», 8–10 декабря 2005 г.) [42], Каире («Cairo Algebra/Coalgebra Conference», 25–30 марта 2006 г.) [43] и Пекине («2nd International Congress in Algebra and Combinatorics», 6–11 июля 2007 г.), на семинарах Института математики СО РАН в Новосибирске, Калифорнийского университета в Сан-Диего и Корейского института высших исследований в Сеуле.

Глава 6. Данная глава посвящена решению проблемы 3, которая возникла в рамках одного из подходов к решению проблем 1 и 2 [26, 27, 31]. Априорная связь между классами конформных алгебр из проблем 1 и 3 не очевидна. Несмотря на это, удается показать, что любая конечно-порожденная простая ассоциативная конформная алгебра линейного роста имеет точное неприводимое представление конечного типа. Как и в предыдущей главе, поле $\Bbbk$ предполагается алгебраически замкнутым, $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$.

В § 6.1 мы вводим понятие размерности Гельфанда — Кириллова (GKdim) для модулей над ассоциативной конформной алгеброй. Для регулярного (левого или правого) модуля это число совпадает с размерностью Гельфанда — Кириллова конформной алгебры из [26]. Основные свойства этого понятия во многом аналогичны свойствам размерности Гельфанда — Кириллова обычных алгебр.

В этом же параграфе доказывается ключевое утверждение технического характера (здесь мы приводим его в несколько меньшей общности).

Предложение 1. *Пусть C — конечно-порожденная конформная алгебра такая, что $C \circ_\omega C = C$, и пусть $a \in C$. Рассмотрим*

$$I_a := a \circ_0 C + \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ker}_C (a \circ_0 \cdot)^n \subseteq C.$$

Если $I_a \neq C$, то существует неприводимый конечно-порожденный правый C-модуль V такой, что

$$\mathrm{GKdim}_C V \leq \mathrm{GKdim}\, C - 1.$$

В § 6.2 рассматривается важный инструмент исследования конформной алгебры C в данной главе: алгебра A_0 операторов 0-умножения $a(0) = (a \circ_0 \cdot) \in \mathrm{End}_\Bbbk C$, $a \in C$. Показано, в частности, что $\mathrm{GKdim}\, A_0 \leq \mathrm{GKdim}\, C$.

Основные результаты главы получены в § 6.3. Из предложения 1 следует, что если C — простая конечно-порожденная ассоциативная конформная алгебра и $\mathrm{GKdim}\, C = 1$, то либо C имеет точный модуль V конечного типа ($\mathrm{GKdim}_C V = 0$), либо для любого $a \in C$ выполняется равенство $I_a = C$. В первом случае C удовлетворяет условиям теоремы 6(ii), во втором случае соответствующая алгебра $A = A_0$ обладает следующим свойством: для любого $a \in C$ существует $n \geq 0$ такое, что

$$a(0)A + \mathrm{Ann}_A\, a(0)^n = A. \tag{4}$$

Следующее утверждение играет в нашей работе вспомогательную роль, но представляет самостоятельный интерес для теории колец и алгебр.

Предложение 2. *Если A — конечно-порожденная алгебра такая, что $\mathrm{GKdim}\, A \leq 1$ и для любого $\alpha \in A$ существует $n \geq 0$, при котором $\alpha A + \mathrm{Ann}_A\, \alpha^n = A$, то A является конечномерной.*

В оставшейся части параграфа доказано, что для конечно-порожденной простой ассоциативной конформной алгебры C такой, что $\mathrm{GKdim}\, C \leq 1$, алгебра 0-умножений $A = A_0$ обладает свойством (4) тогда и только тогда, когда $\mathrm{GKdim}\, C = 0$, т. е. это конформная алгебра конечного типа. В этом случае $C \simeq \mathrm{Cur}_N$ по теореме 6, что доказывает гипотезу 2.

Теорема 8. *Пусть C — конечно-порожденная простая ассоциативная конформная алгебра такая, что* $\mathrm{GKdim}\, C = 1$. *Тогда* $C \simeq \mathrm{Cend}_{N,Q}$, $N \geq 1$, $\det Q \neq 0$.

Следует отметить, что в наше доказательство не использует частичные результаты, полученные в работах [26, 31]. Теорема 8 позволяет классифицировать конечно-порожденные простые ассоциативные конформные алгебры с точностью до изоморфизма. Действительно, в [7] было показано, что $\mathrm{Cend}_{N_1,Q_1} \simeq \mathrm{Cend}_{N_2,Q_2}$ тогда и только тогда, когда $N_1 = N_2$ и существует такой скаляр $\alpha \in \Bbbk$, что матрицы $Q_1(x)$ и $Q_2(x+\alpha)$ имеют одинаковую каноническую диагональную форму.

Результаты этой главы опубликованы в [34, 33]; докладывались на международных конференциях в Астане («Model Theory and Algebra», 18–22 июля 2005 г.) [41], Новосибирске («Мальцевские чтения», 13–15 ноября 2007 г.) и Пекине («2nd International Congress in Algebra and Combinatorics», 6–11 июля 2007 г.), на семинарах Института математики СО РАН в Новосибирске и Корейского института высших исследований в Сеуле.

Глава 7. В данной главе мы применим технику, разработанную в главах 2 и 3, к теории диалгебр. Оказывается, что такие классы алгебраических систем, как конформные алгебры (псевдоалгебры) и диалгебры, тесно связаны между собой, несмотря на совершенно различное происхождение.

Напомним, что диалгеброй называют линейное пространство над полем $\Bbbk$ с двумя билинейными операциями $\vdash$ и $\dashv$. По любой конформной алгебре (псевдоалгебре) C можно каноническим образом построить диалгебру, обозначаемую через $C^{(0)}$.

В § 7.1 мы строим операду Dialg, которая является аналогом опрады Alg. Любую диалгебру можно рассматривать как функтор из Dialg в мультикатегорию $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$.

Все встречающиеся в литературе классы диалгебр (коммутативные, ассоциативные и альтернативные, введенные в работах [8], [23] и [20] соответственно) удовлетворяют следующим тождествам:

$$(x_1 \dashv x_2) \vdash x_3 = (x_1 \vdash x_2) \vdash x_3, \quad x_1 \dashv (x_2 \vdash x_3) = x_1 \dashv (x_2 \dashv x_3). \qquad (5)$$

Нами установлено, что эти тождества определяют многообразие всех диалгебр, вложимых в конформные алгебры (псевдоалгебры).

Этот факт используется в § 7.2 для того, чтобы ввести общее определение Var-диалгебры для произвольного однородного многообразия алгебр Var, определенного семейством полилинейных тождеств Σ. Найден способ, позволяющий в явном виде выписать определяющие тождества многообразия Var-диалгебр. Для многообразий ассоциативных, альтернативных и коммутативных алгебр полученные тождества эквивалентны введенным ранее в [23], [20] и [8]. Понятие диалгебры Ли оказывается эквивалентным понятию алгебры Лейбница.

В § 7.3 доказан первый из основных результатов главы.

Теорема 9. *Для любой* Var*-псевдоалгебры C диалгебра $C^{(0)}$ принадлежит многообразию* Var. *Для любой* Var*-диалгебры A существует* Var*-псевдоалгебра $C_{\mathrm{Var}}(A)$ такая, что $A \subseteq C_{\mathrm{Var}}(A)^{(0)}$.*

Этот результат развит в § 7.4, где вводится понятие конформного представления для алгебр Лейбница и ассоциативных диалгебр. Вторым основным результатом главы является аналог теоремы Адо для алгебр Лейбница.

Определение 4. *Конформным представлением* левой алгебры Лейбница L над линейной алгебраической группой G называется линейное отображение $\rho : L \to \mathrm{Cend}\, M^{(0)}$, где M — левый модуль над $H = \Bbbk[G]$, такое, что $\rho([ab]) = \rho(a) \vdash \rho(b) - \rho(b) \dashv \rho(a)$ для всех $a, b \in L$. Если M является конечно-порожденным H-модулем, то ρ называется представлением *конечного типа.*

Теорема 10. *Если G — такая линейная алгебраическая группа, что $H = \Bbbk[G]$ содержит примитивный элемент, то любая (конечномерная) алгебра Лейбница имеет точное конформное представление (конечного типа) над G.*

Результаты этой главы опубликованы в [38, 39]; докладывались на международных конференциях в Новосибирске («Мальцевские чтения», 14–16 ноября 2006 г. и 13–15 ноября 2007 г.), Гуанчжоу («International Workshop in Algebra and Applications», 2–4 июля 2007 г.) [44] и Москве («Transformation Groups», 17–22 декабря 2007 г.) [45], а также на семинарах Института математики СО РАН в Новосибирске и Новосибирского государственного университета.

Я благодарен своему научному консультанту Л. А. Бокутю за его постоянное внимание к моей работе и стимулирующие обсуждения возможных направлений исследования. Я весьма признателен Е. И. Зельманову и А. П. Пожидаеву, чье влияние инициировало мои исследования по теме диссертации, а также всем сотрудникам лаборатории теории колец и в целом отдела алгебры Института математики СО РАН, в особенности В. Н. Желябину, В. Д. Мазурову и И. П. Шестакову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01–01–0063 и 05–01–00230), СО РАН (Комплексная интеграционная программа 2006–1.9 и грант № 26 для молодых ученых) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-2269.2003). Также я выражаю признательность за финансовую поддержку фонду П. Делиня.

Часть работы была выполнена во время моей стажировки в Корейском институте высших исследований (Korea Institute for Advanced Study) в г. Сеуле (Ю. Корея) и я благодарен сотрудникам математического департамента этого института, в особенности Х. Мюонгу и С. Ж. Кангу.

Литература

[1] Aymon M., Grivel P.-P. Un théorème de Poincaré—Birkhoff—Witt pour les algèbres de Leibniz // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N. 2. P. 527–544.

[2] Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G. Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. 2001. V. 162, N. 1. P. 1–140.

[3] Beilinson A. A., Drinfeld V. G. Chiral algebras. Providence, RI: AMS, 2004. (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 51).

[4] Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.

[5] Birkhoff G. On the structure of abstract algebras // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1935. V. 31. P. 433–454.

[6] Borcherds R. E. Vertex algebras, Kac—Moody algebras, and the Monster // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1986. V. 83. P. 3068–3071.

[7] Boyallian C., Kac V. G., Liberati J. I. On the classification of subalgebras of Cend_N and gc_N // J. Algebra. 2003. V. 260, N. 1. P. 32–63.

[8] Chapoton F. Un endofoncteur de la catégorie des opérades // Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. P. 105–110. (Lectures Notes in Mathematics, vol. 1763).

[9] D'Andrea A., Kac V. G. Structure theory of finite conformal algebras // Sel. Math., New Ser. 1998. V. 4. P. 377–418.

[10] De Sole A., Kac V. G. Subalgebras of gc_N and Jacobi polynomials // Canad. Math. Bull. 2002. V. 45, N. 4. P. 567–605.

[11] Dong C., Lepowski J. Generalized vertex algebras and relative vertex operators. Boston: Birkhauser, 1993. (Progress in Math., vol. 112).

[12] Frenkel I. B., Lepowsky J., Meurman A. Vertex operator algebras and the Monster. New York: Academic Press, 1998. (Pure and Applied Math., vol. 134).

[13] Gelfand I. M., Kirillov A. A. Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie // Publ. Math. IHES. 1966. P. 5–19.

[14] Ginzburg V., Kapranov M. Kozul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76, N. 1. P. 203–272.

[15] Guillemin V. A Jordan—Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras // J. Diff. Geom. 1968. V. 2. P. 313–345.

[16] Kac V. G. Vertex algebras for beginners. Second edition. Providence, RI: AMS, 1998. (University Lecture Series, vol. 10).

[17] Kac V. G. Formal distribution algebras and conformal algebras // Proc. / XIIth International Congress in Mathematical Physics. Brisbane, 1997 / Cambridge, MA: Internat. Press, 1999. P. 80–97.

[18] Lambek J. Deductive systems and categories. II // Standard constructions and closed categories. Berlin: Springer-Verl., 1969. P. 76–122. (Lecture Notes Math., vol. 86).

[19] Li H.-S. Local systems of vertex operators, vertex superalgebras, and modules // J. Pure Appl. Algebra. 1996. V. 109. P. 143–195.

[20] Liu D. Steinberg—Leibniz algebras and superalgebras // J. Algebra. 2005. V. 283, N. 1. P. 199–221.

[21] Loday J.-L. Une version non commutative des alg‘ebres de Lie: les alg‘ebres de Leibniz // Enseign. Math. 1993. V. 39. 269–293.

[22] Loday J.-L. Dialgebras // Dialgebras and Related Operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. P. 7–66. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1763).

[23] Loday J.-L., Pirashvili T. Universal envelopping algebras of Leibniz algebras and homology // Math. Ann. 1993. V. 296. P. 139–158.

[24] May J. P. Geometry of iterated loop spaces. New York: Springer-Verl., 1972. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 271).

[25] Primc M. Vertex algebras generated by Lie algebras // J. Pure Appl. Algebra. 1999. V. 135, N. 3. P. 253–293.

[26] Retakh A. Associative conformal algebras of linear growth // J. Algebra. 2001. V. 237, N. 2. P. 769–788.

[27] Retakh A. On associative conformal algebras of linear growth II // J. Algebra. 2006. V. 304, N. 1. P. 543-556.

[28] Roitman M. On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. 1999. V. 217, N. 2. P. 496–527.

[29] Small L. W., Warfield R. B. Jr. Prime affine algebras of Gel'fand—Kirillov dimension one // J. Algebra. 1984. V. 91, N. 2. P. 386–389.

[30] Small L. W., Stafford J. T., Warfield R. B. Jr. Affine algebras of Gel'fand–Kirillov dimension one are PI // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1985. V. 97, N. 3. P. 407–414.

[31] Zelmanov E. I. Idempotents in conformal algebras // Proc. / Third Internat. Alg. Conf., Tainan, Taiwan. June 16–July 1, 2002. / Ed. by Y. Fong et al. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 257–266.

Работы автора по теме диссертации

[32] Kolesnikov P. S. Irreducible conformal subalgebras of Cend_N and gc_N // Resenhas IME USP. 2004. V. 6, N. 2/3. P. 241–248.

[33] Kolesnikov P. S. Simple associative conformal algebras of linear growth // J. Algebra. 2006. V. 295, N. 1. P. 247–268.

[34] Kolesnikov P. S. Associative conformal algebras with finite faithful representation // Adv. Math. 2006. V. 202, N. 2. P. 602–637.

[35] Kolesnikov P. S. Identities of conformal algebras and pseudoalgebras // Comm. Algebra. 2006. V. 34, N. 6. P. 1965–1979.

[36] Kolesnikov P. S. On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras // Journal of Algebra and Its Applications. 2007. V. 6, N. 1. P. 119–134.

[37] Kolesnikov P. S. Associative algebras related to conformal algebras // Applied Categorical Structures. doi: 10.1007/s10485-007-9077-4.

[38] Колесников П. С. Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 323–340.

[39] Колесников П. С. Конформные представления алгебр Лейбница // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3.

[40] Kolesnikov P. S. Irreducible conformal subalgebras of Cend_N and gc_N // Intern. Conf. «Lie and Jordan Algebras, Their Representations and Applications, II», Guarujá (Brasil), May 3–8, 2004. Sao Paulo, 2004. P. 31–33.

[41] Kolesnikov P. S. Associative conformal algebras of linear growth // France-Kazakhstan Conference «Model Theory and Algebra», Astana (Kazakhstan), July 18–22, 2005. Astana, 2005. P. 37–40.

[42] Kolesnikov P. S. Calculations in conformal Lie superalgebras // Proc. Seventh Asian Symposium on Computer Mathematics. Seoul, Korea. December 8–10, 2005. / Ed. by S. Pae, H. Park. Seoul: Korea Institute for Advanced Study, 2005. P. 169–172.

[43] Kolesnikov P. S. Associative algebras related to conformal algebras // Intern. Conf. «Cairo Algebra/Coalgebra Conference», Cairo (Egypt), March 25–30, 2006. Cairo, 2006. P. 26.

[44] Kolesnikov P. S. Varieties of dialgebras and conformal algebras // International Workshop in Algebra and Applications, Guangzhou (China), July 2–4, 2007. Guangzhou, 2006. P. 14.

[45] Kolesnikov P. S. Varieties of dialgebras and conformal algebras // Intern. Conf. «Transformation Groups», Moscow, December 17–22, 2007. Moscow, 2007. P. 59–62.