

На правах рукописи

ДОЛГУНЦЕВА Ирина Александровна

**КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА  
АССОЦИАТИВНЫХ КОНФОРМНЫХ АЛГЕБР**

01.01.06 — математическая логика,  
алгебра и теория чисел

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2008

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

**Научные руководители:**

доктор физико-математических наук, профессор  
**Бокуть Леонид Аркадьевич**

кандидат физико-математических наук  
**Колесников Павел Сергеевич**

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор  
**Копытов Валерий Матвеевич**

доктор физико-математических наук, профессор  
**Мальцев Юрий Николаевич**

Ведущая организация:

Санкт-Петербургский государственный университет

Защита диссертации состоится 14 ноября 2008 г. в 17 ч. 00 мин.  
на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте  
математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу:  
630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института  
математики СО РАН.

Автореферат разослан «\_\_\_» октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук

А. Н. Ряскин

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы диссертации.** Структурная теория конформных алгебр — сравнительно новая и активно развивающаяся область алгебры. Интерес к этой теории обусловлен тем, что она связана с математической физикой. Одним из направлений изучения конформных алгебр является исследование расширений конформных алгебр. В данной диссертации рассматриваются расширения ассоциативных конформных алгебр.

Формальное определение конформной алгебры было сформулировано В.Г. Кацем в работе [9] как аксиоматическое описание сингулярной части разложения операторного произведения (operator product expansion, OPE) киральных полей в конформной теории поля. Киральные поля (или формальные распределения) представляют собой бесконечные в обе стороны ряды

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

с коэффициентами в некоторой алгебре  $A$  (обычно в качестве алгебры  $A$  рассматривают алгебру Ли  $\mathfrak{gl}(V)$  линейного пространства  $V$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ ). Произведение формальных распределений не всегда определено, так как может приводить к бесконечным суммам в коэффициентах. Для *взаимно локальных* формальных распределений вводится операция OPE, которая позволяет заменить умножение рядов счетным набором билинейных операций  $\circ_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Сингулярная часть операторного произведения описывает некоторые коммутационные соотношения взаимно локальных формальных распределений, которые приводят к понятию конформной алгебры Ли. Ассоциативные конформные алгебры возникают как модули конформных линейных отображений.

Другой подход в теории конформных алгебр связан с понятием псевдотензорной категории, которое было введено А.А. Бейлинсоном и В.Г. Дринфельдом в работе [3]: конформная алгебра — это алгебра в псевдотензорной категории  $\mathcal{M}(H)$ , ассоциированной с полиномиальной алгеброй  $H = \mathbb{k}[D]$  над полем  $\mathbb{k}$  характеристики 0 (см. [1]). Объектами в этой категории являются левые унитальные  $H$ -модули, и алгеброй в  $\mathcal{M}(H)$  называется модуль  $C \in \mathcal{M}(H)$  с  $H \otimes H$ -линейной операцией  $*: C \otimes C \rightarrow (H \otimes H) \otimes_H C$ . Преимуществом данного языка является то, что ассоциативность, коммутативность и другие тождества имеют

в нем естественную интерпретацию. Заметим, что обычная алгебра над полем  $\mathbb{k}$  — это алгебра в псевдотензорной категории  $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ .

Таким образом, последний подход представляется наиболее естественным для обобщения понятия алгебры линейных преобразований  $\text{End } U$  конечномерного линейного пространства  $U$ . А именно, если  $V$  — конечно-порожденный  $H$ -модуль, то все его конформные эндоморфизмы (см. [1, 6, 9]) образуют ассоциативную конформную алгебру, которую обозначают  $\text{Cend } V$ .

В работе А. д'Андреа и В.Г. Каца [6] были описаны простые и полу-простые линейные конформные алгебры конечного типа. В работе Е. Зельманова [17] был доказан аналог «основной» теоремы Веддерберна об отщеплении радикала для ассоциативных конформных алгебр конечного типа. В более широком классе ассоциативных конформных алгебр, имеющих точное представление конечного типа, аналоги структурных теорем были доказаны П.С. Колесниковым [10, 11].

Одним из главных результатов теории конечномерных алгебр является классическая теорема Веддерберна о строении сепарабельных алгебр.

*Пусть  $A$  — конечномерная ассоциативная алгебра с радикалом  $R = \text{Rad}(A)$ . Если  $A/\text{Rad}(A)$  — сепарабельная алгебра, то существует подалгебра  $S \subseteq A$  такая, что  $A$  равна прямой сумме пространств  $S \oplus \text{Rad}(A)$ .*

В 1945 г. Г. Хохшильд ввел понятие когомологий для ассоциативных алгебр и доказал теорему о тривиальности группы когомологий для (полу)простых алгебр этого класса [7]. Он также показал, что теорема Веддерберна является следствием тривиальности второй группы когомологий алгебры матриц над полем.

Подход к теории когомологий Хохшильда ассоциативных конформных алгебр был предложен Б. Бакаловым, В.Г. Кацем и А. Вороновым [2]. В определении когомологий авторы использовали так называемые  $\lambda$ -произведения. Однако этот подход не был развит в должной мере. Также в этой работе сформулирована задача вычисления группы когомологий Хохшильда конформной алгебры  $\text{Cend } V$ .

Таким образом, **основные цели** данной работы:

- разработка другого подхода к построению конформных когомологий Хохшильда, который использует язык псевдоалгебр;
- исследование связи между расширениями ассоциативных конформных алгебр и их второй группой когомологий;

- применение предложенного подхода к изучению расширений алгебры  $\text{Cend}_n$  конформных линейных преобразований свободного  $n$ -порожденного  $\mathbb{k}[D]$ -модуля.

**Методы исследования.** При получении основных результатов широко используются методы теории ассоциативных конформных алгебр и псевдоалгебр.

#### Основные результаты диссертации.

- (1) дано определение когомологий Хохшильда ассоциативных конформных алгебр;
- (2) получена теорема о связи элементов второй группы когомологий ассоциативной конформной алгебры и ее сингулярных расширений;
- (3) доказана тривиальность второй группы когомологий Хохшильда конформной алгебры Вейля  $\mathcal{W}$ .

**Научная новизна.** Все основные результаты являются новыми и получены автором лично.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа имеет теоретическое значение. Результаты могут быть использованы в дальнейшем изучении ассоциативных конформных алгебр и их когомологий Хохшильда, а также при чтении спецкурсов по структурной теории колец.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории колец им. А.И. Ширшова (ИМ СО РАН), семинаре “Алгебра и логика” (НГУ), Международной конференции “Мальцевские чтения” в 2005–2007 гг. (Новосибирск), Международной конференции “Алгебра и ее приложения” в 2007 г. (Красноярск), Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева в 2007 г. (Санкт-Петербург).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в форме статей [18]–[19], препринта [20] а также в материалах международных конференций [21]–[23].

**Структура работы.** Диссертация состоит из введения и 5 глав. Она изложена на 51 странице. Список литературы содержит из 17 наименований.

## Содержание диссертации

**Общая структура диссертации.** Каждая из глав диссертации подразделяется на параграфы. Нумерация утверждений (лемм, теорем, предложений, следствий), а также определений, примеров и замечаний сквозная. Каждый номер параграфа состоит из двух чисел: первое соответствует номеру главы, второе — порядковому номеру параграфа в данной главе (нумерация приведенных ниже утверждений отличается от использованной в диссертации).

**Глава 1.** В этой главе даны начальные сведения о конформных алгебрах. Вводится определение конформной алгебры на языке  $\circ_n$ -произведений,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , [9, 13] и в терминах  $\lambda$ -произведений [8]. Приведены основные тождества, определяющие многообразие ассоциативных конформных алгебр.

**Глава 2.** Данная глава посвящена псевдотензорным категориям и псевдоалгебрам. Псевдотензорные категории позволяют унифицировать понятия обычной алгебры и конформной алгебры.

В § 2.1 приведены основные сведения об алгебрах Хопфа, необходимые для дальнейшего изложения материала.

В § 2.2 дано понятие псевдотензорной категории. Первоначально понятие мультикатегории ввел Дж. Ламбек в [12]. Позднее этот объект А. Бейлинсон, В. Дринфельд назвали псевдотензорной категорией [3]. Также в этом параграфе дано определение псевдоалгебры, показана связь между псевдоалгебрами и конформными алгебрами.

В § 2.3 рассмотрена псевдотензорная категория  $\mathcal{M}(H)$ , ассоциированная с полиномиальной алгеброй Хопфа  $H = \mathbb{k}[D]$ . Показано, что пространство всех полилинейных отображений изоморфно пространству локально регулярных, трансляционно инвариантных функций на  $\mathbb{k}$ .

В § 2.4 приведено понятие псевдолинейного отображения. Пространство всех полилинейных отображений  $\text{Chom}(U, V)$  из  $H$ -модуля  $U$  в  $H$ -модуль  $V$  наделено структурой  $H$ -модуля. Если  $U$  — конечно-порожденный  $H$ -модуль, то для любых  $\phi \in \text{Chom}(V, W)$ ,  $\psi \in \text{Chom}(U, V)$  определена композиция  $\phi \circ \psi$ , которая является локально регулярным и трансляционно инвариантным отображением.

**Глава 3.** В этой главе вводится понятие конформного линейного отображения. Пространство конформных линейных отображений из  $H$ -модуля  $U$  в  $H$ -модуль  $V$  также обозначается  $\text{Chom}(U, V)$ . Если  $U = V$ ,

то  $\text{Chom}(U, U)$  обозначается  $\text{Cend } U$ . Из результатов предыдущей главы следует, что для конечно-порожденного  $H$ -модуля  $U$   $\text{Cend } U$  является ассоциативной конформной алгеброй относительно композиции конформных линейных преобразований.

В § 3.2 приводятся наиболее важные примеры алгебр конформных линейных преобразований: алгебра  $\text{Cend}_n$  конформных линейных преобразований свободного конечно-порожденного  $H$ -модуля  $U = H \otimes \mathbb{k}^n$  и ее подалгебра  $\text{Cir}_n$ .

В работах [8, 10, 13] доказано, что алгебры  $\text{Cend}_n$  и  $H \otimes M_n(\mathbb{k}[v])$  изоморфны (здесь  $v$  — формальная переменная). Поэтому каждый элемент  $a \in \text{Cend}_n$  представляется в виде

$$a = \sum_{s \geq 0} (-D)^{(s)} \otimes A_s(v) \in H \otimes M_n(\mathbb{k}[v]).$$

При этом конформные операции  $\circ_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ , заданы правилом

$$(1 \otimes A) \circ_m (1 \otimes B) = 1 \otimes A \partial_v^m (B),$$

где  $A, B \in M_n(\mathbb{k}[v])$ ,  $\partial_v^m = \partial^m / \partial v^m$ .

Обозначим  $x = 1 \otimes v E$ , где  $E$  — единичная матрица в  $M_n(\mathbb{k})$ . Алгебра  $\text{Cend}_n$  (как конформная алгебра) порождается элементами  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , и  $x$ , которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$e_{ij} \circ_m e_{kl} = \delta_{m,0} \delta_{j,k} e_{il}, \quad m \geq 0, \quad (1)$$

$$e_{ij} \circ_0 x = x \circ_0 e_{ij}, \quad (2)$$

$$e_{ij} \circ_1 x = e_{ij}, \quad e_{ij} \circ_m x = 0, \quad m \geq 2, \quad (3)$$

$$x \circ_m e_{ij} = 0, \quad m \geq 1, \quad (4)$$

$$\sum_i e_{ii} \circ_0 x = \sum_i x \circ_0 e_{ii} = x. \quad (5)$$

Доказано

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Соотношения (1)–(5) составляют полную систему соотношений в  $\text{Cend}_n$ .

В §3.3 дано определение правого (левого) модуля, бимодуля над ассоциативной конформной алгеброй на языке  $\circ_n$ -произведений,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda$ -произведения и псевдопроизведения. Доказан аналог леммы Донга для модулей.

**Глава 4.** В данной главе мы вводим основные понятия теории когомологий ассоциативных конформных алгебр. Используя результаты

главы 3, разрабатываем технику изучения расширений ассоциативных конформных алгебр.

В § 4.1 мы вводим ключевые понятия теории когомологий ассоциативных конформных алгебр: понятие  $n$ -коцепи, дифференциала, конформных когомологий Хохшильда.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть  $V$  — бимодуль над ассоциативной конформной алгеброй  $C$ . Отображение

$$\varphi: C^{\otimes n} \rightarrow (H^{\otimes n}) \otimes_H V,$$

называется  $n$ -коцепью алгебры  $C$  с коэффициентами в  $V$ , если оно  $H$ -полилинейно, то есть  $\varphi(h_1 a_1 \otimes \dots \otimes h_n a_n) = (h_1 \otimes \dots \otimes h_n \otimes_H 1)\varphi(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Отображение  $\delta_n: C^n(C, V) \rightarrow C^{n+1}(C, V)$ , определенное по правилу

$$\begin{aligned} (\delta_n \varphi)(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_1 * \varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n (-1)^i \varphi(a_1, \dots, a_i * a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) + \\ &\quad (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \dots, a_n) * a_{n+1}, \end{aligned}$$

называется *дифференциалом*.

Доказано, что  $\delta_{n+1} \delta_n = 0$ .

Понятия  $n$ -коцикла,  $n$ -кограницы определяются также, как в теории когомологий обычных алгебр:  $n$ -коцепь  $\varphi$  называется  $n$ -коциклом, если  $\delta_n \varphi = 0$ , и называется  $n$ -кограницей, если существует  $(n - 1)$ -коцепь  $\psi$  такая, что  $\varphi = \delta_{n-1} \psi$ . Множество  $n$ -коцепей обозначается  $C^n(C, V)$ ,  $n$ -коциклов —  $Z^n(C, V)$ , множество  $n$ -кограниц —  $B^n(C, V)$ . Тогда  $Z^n(C, V) = \ker \delta_n$ ,  $B^n(C, V) = \text{Im } \delta_{n-1}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.**  $n$ -ой группой когомологий Хохшильда алгебры  $C$  со значениями в бимодуле  $V$  называется  $H$ -модуль

$$H^n(C, V) = Z^n(C, V)/B^n(C, V).$$

Если  $\varphi \in C^2(C, V)$ , то в силу результатов предыдущей главы для любых  $a, b \in C$  элемент  $\varphi(a, b)$  единственным образом записывается в виде

$$\varphi(a, b) = \sum_{s \geq 0} ((-D)^{(s)} \otimes 1) \otimes_H \varphi_s(a, b),$$

где  $\varphi_s(a, b) \in V$ .

Дано описание 1- и 2-коциклов в терминах  $\circ_n$ -произведений.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Пусть  $C$  — ассоциативная конформная алгебра,  $V$  —  $C$ -бимодуль. Если  $\varphi \in Z^1(C, V)$ , то для всех  $a, b \in C$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  выполняется равенство

$$\varphi(a \circ_n b) = a \circ_n \varphi(b) + \varphi(a) \circ_n b.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Пусть  $C$  — ассоциативная конформная алгебра,  $V$  —  $C$ -бимодуль. Если  $\varphi \in Z^2(C, V)$ , то для всех  $a, b, c \in C$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}_+$  выполняется равенство

$$a \circ_m \varphi_n(b, c) + \varphi_m(a, b \circ_n c) = \sum_{s \geq 0} \binom{m}{s} (\varphi_{n+s}(a \circ_{m-s} b, c) + \varphi_{m-s}(a, b) \circ_{n+s} c).$$

В § 3.2 исследуется связь между второй группой когомологий и расширениями ассоциативной конформной алгебры.

Мы называем *расширением* конформной алгебры  $C$  пару  $(B, \sigma)$ , где  $B$  — конформная алгебра,  $\sigma: B \rightarrow C$  — эпиморфизм конформных алгебр. Расширение  $(B, \sigma)$  называется *сингулярным*, если ядро расширения  $\ker \sigma$  удовлетворяет равенству  $\ker \sigma \circ_\omega \ker \sigma = 0$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $C$  — ассоциативная конформная алгебра, являющаяся проективным  $H$ -модулем, и  $M$  — некоторый  $C$ -бимодуль. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами второй группы когомологий  $H^2(C, M)$  и классами изоморфных сингулярных расширений алгебры  $C$ , ядра которых изоморфны  $M$ .

В ходе доказательства теоремы 1 показано, что для ассоциативной конформной алгебры  $C$ , являющейся проективным  $H$ -модулем, и ее сингулярного расширения  $(B, \sigma)$  с ядром  $\ker \sigma = M$  можно определить  $H$ -линейное отображение  $\rho: C \rightarrow B$  такое, что

$$\sigma \rho = \text{id}.$$

Тогда отображение  $\varphi_\rho: C \times C \rightarrow M$ , определенное правилом

$$\varphi_\rho(a, b) = \rho(a) * \rho(b) - (\text{id} \otimes \text{id} \otimes_H \rho)(a * b), \quad a, b \in C,$$

является 2-коциклом, т. е.  $\varphi_\rho \in Z^2(C, M)$ .

Для бимодуля  $M$  над ассоциативной конформной алгеброй  $C$  и коцикла  $\varphi \in C^2(C, M)$  построено сингулярное расширение  $B$  алгебры  $C$  с помощью бимодуля  $M$ , равное прямой сумме  $C \oplus M$  как  $H$ -модулей.

Расширение  $B$  является конформной алгеброй относительно операции  $*$ , заданной равенством

$$(a_1 + u_1) * (a_2 + u_2) = a_1 * a_2 + a_1 * u_2 + u_1 * a_2 + \varphi(a_1, a_2),$$

где  $a_1 + u_1, a_2 + u_2 \in B$ . Построенное расширение обозначается через  $(C; M, \varphi)$ .

**ЛЕММА 1.** *Если  $\varphi \in Z^2(C, M)$ , то  $B = (C; M, \varphi)$  — ассоциативная конформная алгебра.*

**ТЕОРЕМА 2.** Конформная алгебра  $C$  отщепляема в сингулярном расширении  $(B, \sigma)$  тогда и только тогда, когда коцикл  $\varphi_\rho$  тривиален в  $H^2(C, \ker \sigma)$ .

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Если  $H^2(C, M) = 0$  для любого  $C$ -бимодуля  $M$ , то конформная алгебра  $C$  отщепляема в любом расширении с нильпотентным ядром.*

**Глава 5.** В этой главе мы применяем полученные выше результаты для вычисления второй группы когомологий ассоциативных конформных алгебр  $\text{Cend}_n$  и  $\text{Cur}_n$ .

Напомним определение идемпотента и (конформной) единицы конформной алгебры [16]. Элемент  $e \in C$  называется *идемпотентом* конформной алгебры  $C$ , если выполнены условия:

$$e \circ_0 e = e, \quad e \circ_n e = 0 \text{ для всех } n \geq 1.$$

Идемпотент  $e \in C$  называется *(конформной) единицей*, если  $e \circ_0 a = a$  для всех  $a \in C$ .

Заметим, что конформные алгебры  $\text{Cend}_n$  и  $\text{Cur}_n$  содержат каноническую (конформную) единицу  $e = \sum_{i=1}^n e_{ii}$ , причем

$$e_{ii} \circ_m e_{jj} = \{e_{ii} \circ_m e_{jj}\} = \delta_{m,0} \delta_{ij} e_{ii}.$$

В § 5.1 доказывается ряд вспомогательных утверждений для ассоциативных конформных алгебр, содержащих элементы специального вида.

**ЛЕММА 2.** *Пусть  $C$  — конформная алгебра, являющаяся проективным  $H$ -модулем,  $M$  — произвольный  $C$ -бимодуль,  $\varphi \in Z^2(C, M)$ . Если  $e' \in C$  — (конформная) единица, то расширение  $B = (C; M, \varphi)$  алгебры  $C$  содержит (конформный) идемпотент  $e$  такой, что  $\sigma(e) = e'$ .*

**ЛЕММА 3.** Пусть  $C$  — конформная алгебра, являющаяся проективным  $H$ -модулем,  $M$  — произвольный  $C$ -бимодуль,  $\varphi \in Z^2(C, M)$ . Пусть расширение  $B = (C; M, \varphi)$  алгебры  $C$  содержит (конформную) единицу  $e$  и существует  $x' \in C$  такой, что  $x' \circ_0 e' = x'$ ,  $e' \circ_1 x' = e'$ , где  $e' = \sigma(e)$ . Тогда  $B$  содержит элемент  $x$  такой, что  $\sigma(x) = x'$ ,  $x \circ_0 e = x$ ,  $e \circ_1 x = e$ .

**ЛЕММА 4.** Пусть  $C$  — ассоциативная конформная алгебра с единицей  $e'$ ,  $M$  — произвольный  $C$ -бимодуль,  $\varphi \in Z^2(C, M)$  и пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  — семейство попарно ортогональных идеалов (<т.e.  $e'_i \circ_m e'_j = \delta_{m,0} \delta_{ij} e'_j$ ) таких, что  $\{e'_i \circ_0 e'\} = e'_i$ . Тогда существуют попарно ортогональные идеалы  $e_1, \dots, e_n$  в расширении  $B = (C; M, \varphi)$  такие, что  $\sigma(e_i) = e'_i$ .

**ЛЕММА 5.** Пусть  $C = \text{Cur}_n$  ( $n > 1$ ),  $M$  — произвольный  $C$ -бимодуль,  $\varphi \in Z^2(C, M)$  и пусть  $e'_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , — система (конформных) матричных единиц  $C$  (<т.e.  $e'_{ij} \circ_m e'_{kl} = \delta_{m,0} \delta_{jk} e'_{il}$ ). Тогда существуют попарно ортогональные идеалы  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , в расширении  $B = (C; M, \varphi)$  такие, что  $\sigma(e_{ij}) = e'_{ij}$ .

В §5.2 доказываются основные теоремы для конформных алгебр  $\text{Cend}_n$  и  $\text{Cur}_n$ . Показано, что вторая группа когомологий этих алгебр тривиальна. В качестве следствия доказана отщепляемость конформных алгебр  $\text{Cend}_n$ ,  $\text{Cur}_n$  в любом расширении с нильпотентным ядром.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $C = \text{Cur}_n$  ( $n \geq 1$ ),  $M$  — произвольный  $C$ -бимодуль. Тогда вторая группа когомологий  $H^2(C, M)$  тривиальна.

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $C = \text{Cend}_n$  ( $n \geq 1$ ),  $M$  — произвольный  $C$ -бимодуль. Тогда вторая группа когомологий  $H^2(C, M)$  тривиальна.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Конформная алгебра  $\text{Cur}_n$  отщепляема в любом расширении с нильпотентным ядром.

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Конформная алгебра  $\text{Cend}_n$  отщепляема в любом расширении с нильпотентным ядром.

Как следствие получен аналог теоремы Веддерберна для ассоциативных конформных алгебр.

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Пусть  $C$  — ассоциативная конформная алгебра, содержащая нильпотентный идеал  $M$  такой, что  $C/M \cong C_1 \oplus \dots \oplus C_m$ , где  $C_i = \text{Cend}_{n_i}$  или  $C_i = \text{Cur}_{n_i}$ ,  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда  $C \cong \overline{C} \oplus M$ , где  $\overline{C}$  — подалгебра в  $C$ , изоморфная  $C/M$ .

Если конформная алгебра не содержит (конформной) единицы, то существуют нетривиальные 2-коциклы, т. е. существуют такие расширения конформной алгебры  $C$ , в которых она неотщепляема.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Пусть  $C = t^2 \text{Cend}_1 \cong \text{Cend}_1(t - D)^2$  — подалгебра конформной алгебры  $\text{Cend}_1 \subseteq \text{Cend}_n$  (здесь изоморфизм задан правилом  $\theta : t^2 f(t) \rightarrow f(t)(t - D)^2$ ). Тогда существует расширение алгебры  $C$ , в котором  $C$  неотщепляема.

В заключение показано приложение полученных результатов к структурной теории конформных алгебр. А именно, если  $\mathbb{k}$  — алgebraически замкнутое поле, то из следствия 4 вытекает основной результат работы [11].

Я благодарна своему научному руководителю Л. А. Бокутю за постоянное внимание к моей работе, активное обсуждение возможных направлений исследования и полученных результатов. Также я выражают свою благодарность П. С. Колесникову за постановку задачи, ее плодотворное обсуждение. Я признательна всем сотрудникам лаборатории теории колец, кафедры алгебры и логики Новосибирского государственного университета, Сибирскому фонду алгебры и логики за проявленное внимание к этой работе, оказанную моральную и материальную помощь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00230, и Сибирского отделения РАН, интеграционный грант 1.9.

## Литература

- [1] Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G. Theory of finite pseudoalgebras // *Adv. Math.* 2001. V. 162, N. 1. P. 1–140.
- [2] Bakalov B., Kac V. G., Voronov A. Cohomology of conformal algebras // *Comm. Math. Phys.* 1999. V. 200. P. 561–589.
- [3] Beilinson A., Drinfeld V. Chiral algebras. Providence, RI: AMS, 2004. (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 51).
- [4] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F. Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras // *J. Algebra.* 2004. V. 272, N. 2. P. 739–774.
- [5] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F., Kolesnikov P. S., Gröbner and Gröbner-Shirshov bases in algebra and conformal algebras (Russian) // *Fundam. Prikl. Mat.* 2000. V. 6, N. 3. P. 669–706.
- [6] D'Andrea A., Kac V. G. Structure theory of finite conformal algebras // *Selecta Math. New Ser.* 1998. V. 4. P. 377–418.
- [7] Hochschild G. On the cohomology groups of an associative algebra // *Ann. of Math.* 1945. V. 46, N. 1. P. 58–67.
- [8] Kac V. G. Formal distribution algebras and conformal algebras // Proc. / XIIth International Congress in Mathematical Physics. Brisbane, 1997 / Cambridge, MA: Internat. Press, 1999. P. 80–97.
- [9] Kac V. G. Vertex algebras for beginners. Second edition. Providence, RI: AMS, 1998. (University Lecture Series, vol. 10).
- [10] Kolesnikov P. S. Associative conformal algebras with finite faithful representation // *Adv. Math.* 2006. V. 202, N. 2. P. 602–637.
- [11] Kolesnikov P. S. On the Wedderburn principal theorem for conformal algebras // *J. Algebra Appl.* 2007. V. 6, N. 1. P. 119–134.
- [12] Lambek J. Deductive systems and categories. II // Standard constructions and closed categories. Berlin: Springer-Verl., 1969. P. 76–122. (Lecture Notes Math., vol. 86).
- [13] Retakh A. Associative conformal algebras of linear growth // *J. Algebra.* 2001. V. 237, N. 2. P. 769–788.
- [14] Roitman M. On free conformal and vertex algebras // *J. Algebra.* 1999. V. 217, N. 2. P. 496–527.
- [15] Sweedler M. E., Hopf algebras. New York: W.A. Benjamin, Inc. 1969.
- [16] Zelmanov E. I. Idempotents in conformal algebras // Proc. / Third Internat. Alg. Conf. in Taiwan. June 16–July 1, 2002. / Ed. by Y. Fong et al. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 257–266.
- [17] Zelmanov E. I. On the structure of conformal algebras // International Conference on Combinatorial and Computational Algebra, May 24–29, 1999, Hong Kong, China. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Cont. Math. 2000. V. 264. P. 139–153.

## **Работы автора по теме диссертации**

- [18] Долгунцева И. А. Когомологии Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 688–706.
- [19] Долгунцева И. А. Тривиальность второй группы когомологий конформных алгебр  $Cend_n$  и  $Curg_n$  // Алгебра и анализ. 2008. (Принято к печати).
- [20] Долгунцева И. А. Тривиальность второй группы когомологий конформных алгебр  $Cend_n$  и  $Curg_n$ . Новосибирск, 2008. 13 с. (Препринт / РАН. Институт математики; №213).
- [21] Долгунцева И. А. О тривиальности второй группы когомологий конформной алгебры Вейля // Материалы XLV Международной студенческой конференции «Студент и начно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 2007. С. 8–9.
- [22] Долгунцева И. А. О тривиальности второй группы когомологий конформной алгебры Вейля // Международная конференция "Алгебра и ее приложения". Красноярск, 12–18 августа 2007 года. Красноярск, 2007. С. 49–50.
- [23] Долгунцева И. А. О тривиальности второй группы когомологий конформной алгебры Вейля // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева. Санкт-Петербург, 24–29 сентября 2007 года. Санкт-Петербург, 2007. С. 26–27.

Долгунцева Ирина Александровна

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА  
АССОЦИАТИВНЫХ КОНФОРМНЫХ АЛГЕБР

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

---

Подписано в печать 26.09.2008 г. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 0,87. Тираж 100 экз. Заказ № 366.

---

Редакционно-издательский центр НГУ  
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2