На правах рукописи

Бутурлакин Александр Александрович

СПЕКТРЫ КОНЕЧНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск-2008

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Васильев Андрей Викторович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев Анатолий Семенович

кандидат физико-математических наук, доцент
Филиппов Константин Анатольевич

Ведущая организация:

Южно-Уральский государственный университет

Защита диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук состоится 26 июня 2008 г. в 16 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 22 мая 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Теорема о классификации конечных простых групп позволяет свести многие проблемы теории конечных групп к изучению простых групп. Этот переход основан на теореме Жордана — Гельдера, согласно которой любая конечная группа имеет субнормальный ряд с простыми факторами. В связи с этим изучение простых групп является одним из важнейших направлений современной теории конечных групп.

Одной из естественных характеристик конечной группы является ее спектр. *Спектром* $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов. Необходимость в информации о спектре группы возникает при решении многих задач теории групп. В частности, изучение спектров групп необходимо при решении проблемы распознаваемости группы по спектру. Конечная группа G называется распознаваемой по спектру, если для произвольной конечной группы H из равенства $\omega(G) = \omega(H)$ следует, что группа H изоморфна G. В [8] В. Дж. Ши заметил, что группа с нетривиальным разрешимым радикалом нераспознаваема по спектру. Поэтому вопрос о распознаваемости представляет наибольший интерес для простых и почти простых групп. Обзор результатов по проблеме распознаваемости можно найти в работах В. Д. Мазурова [1] и М. А. Гречкосеевой, А. В. Васильева, В. Дж. Ши [7].

Согласно классификационной теореме любая неабелева простая группа является либо знакопеременной группой, либо конечной простой группой лиева типа, либо одной из 26 спорадческих групп. Спектры спорадических групп известны (см., например, [6]). Поскольку любой элемент знакопеременной группы раскладывается в произведение независимых циклов, задача описания спектров этих групп не представляет особого труда. Группы лиева типа делятся на классические и исключительные группы лиева типа. Для исключительных групп есть описание классов сопряженных элементов, из которого может быть получено описание спектров этих групп. Нерешенной остается задача описания спектров групп из наиболее обширного класса простых групп — класса конечных простых классических групп лиева типа. Диссертация посвящена решению этой задачи.

Поскольку спектр группы G вместе с каждым своим элементом содержит все его делители, он однозначно задается множеством $\mu(G)$ своих максимальных по делимости элементов, а также любым множеством $\nu(G)$, для которого выполнены включения $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

Пусть G — конечная группа лиева типа над полем характеристики p. Спектр группы G может быть представлен как объединение трех подмножеств: подмножества $\omega_p(G)$ порядков всех унипотентных элементов, т. е. элементов, чей порядок является степенью числа p; множества $\omega_{p'}(G)$ порядков всех полупростых элементов, т. е. элементов, чей порядок взаимно прост с p; и множества $\omega_m(G)$ порядков элементов смешанного типа, т. е. элементов, чей порядок делится на p, но не является степенью числа p. Таким образом, задача описания спектра конечной группы лиева типа распадается на три подзадачи. Многие авторы изучали максимальные порядки унипотентных элементов. Итоговой в этом направлении является работа Д. Тестерман [9], в которой содержится арифметический критерий принадлежности степени числа p множеству $\omega_p(G)$ для всех конечных простых групп лиева типа.

Описание полупростой части спектра, изложенное в диссертации, основано на том, что любой полупростой элемент группы лиева типа содержится в подгруппе специального вида, называемой максимальным тором. Понятие максимального тора пришло в теорию конечных групп лиева типа из теории алгебраических групп. Пусть $\overline{G}$ — простая алгебраическая группа. Отображением Фробениуса группы $\overline{G}$ называется эндоморфизм σ группы $\overline{G}$ такой, что группа неподвижных точек $\overline{G}_\sigma$ конечна и $\ker\sigma = 1$. Пусть σ — некоторое отображение Фробениуса группы $\overline{G}$. Группа G, удовлетворяющая условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \subseteq G \subseteq \overline{G}_\sigma$, называется конечной группой лиева типа (здесь $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ обозначает минимальную нормальную подгруппу группы $\overline{G}_\sigma$ такую, что фактор-группа по ней является p'-группой). Максимальный тор в алгебраической группе — это максимальная связная диагонализируемая подгруппа. Максимальным тором конечной группы лиева типа G называется подгруппа $T = \overline{T}_\sigma \cap G$, где $\overline{T}$ — некоторый σ-инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}$. Поскольку максимальный тор группы G является конечной абелевой группой, он может быть представлен как прямое произведение циклических групп. Таким образом, для описания полупростой части спектра достаточно для каждого максимального тора данной группы G указать некоторое его разложение в произведение циклических групп.

Доказательство теорем о смешанной части спектра в значительной степени опирается на методы, разработанные Р. В. Картером в [2] и [3]. Поскольку произвольный элемент g группы лиева типа G может быть единственным образом представлен в виде произведения полупростого элемента $g_{p'}$ и унипотентного элемента g_p таких, что $g_p \in C_G(g_{p'})$, для

описания смешанной части спектра группы G достаточно для каждого полупростого элемента s найти максимальный элемент из $\omega_p(C_G(s))$. Пусть $\overline{G}$ — простая алгебраическая группа такая, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \subseteq G \subseteq \overline{G}_\sigma$. Рассмотрим централизатор $C_{\overline{G}}(s)$ элемента s в группе $\overline{G}$. Компонента связности единицы $C_{\overline{G}}(s)^0$ централизатора является редуктивной подгруппой группы $\overline{G}$ максимального ранга и содержит s, а также все унипотентные элементы из $C_{\overline{G}}(s)$. Определение редуктивной подгруппы переносится на конечные группы так же, как определение максимального тора. Таким образом, задача описания смешанной части спектра конечной группы G лиева типа сводится к следующей: для произвольной редуктивной подгруппы H группы G максимального ранга найти период центра $Z(H)$ и максимальный элемент из $\omega_p(H)$.

Основные результаты диссертации.

1. Получено описание циклического строения максимальных торов для всех конечных простых классических групп лиева типа, т. е. для произвольного тора получено разложение в произведение циклических групп, порядки которых указаны (теоремы 1.1–1.7).

2. Получено описание смешанной части спектров конечных простых линейных, унитарных, симплектических групп, а также конечных простых ортогональных групп нечетной размерности (теоремы 2.3, 2.7, 2.10, 2.13). Сформулированы явные описания спектров этих групп (теоремы 2.6, 2.9, 2.11, 2.15).

Новизна и научная значимость работы. Все основные результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для дальнейших исследований как вопроса распознаваемости групп по спектру, так и других проблем теории групп. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории групп: теория конечных простых групп, теория линейных алгебраических групп, а также элементы теории чисел.

Апробация работы. Результаты диссертации в период с 2005 по 2008 год были представлены на конференциях в Новосибирске, Екатеринбурге, Москве, Иркутске, Санкт-Петербурге (см. [13–19]). Результаты работы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Института математики СО РАН и НГУ.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликова-

ны в [10–19].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из 2 глав, введения и списка литературы. Она изложена на 64 страницах, библиография содержит 24 наименования.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Основные результаты глав сформулированы в виде теорем. Их нумерация двойная: первая цифра - номер главы, вторая - номер теоремы в главе. Вспомогательные утверждения (леммы и предложения) имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа в текущей главе, третья — номер утверждения в текущем параграфе.

Глава 1. В данной главе получено описание циклического строения максимальных торов в сериях конечных групп лиева типа, в частности во всех классических простых группах лиева типа. Основными результатами главы являются соответствующие теоремы для каждой серии классических простых групп.

Для формулировки дальнейших утверждений нам понадобятся некоторые предварительные сведения. Пусть $\overline{G}$ — простая алгебраическая группа и σ — отображение Фробениуса группы $\overline{G}$. Пусть $\overline{T}$ — некоторый σ-инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}$. Группой Вейля W называется фактор-группа нормализатора $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ тора $\overline{T}$ в группе $\overline{G}$ по $\overline{T}$ (поскольку любые два максимальных тора в алгебраической группе сопряжены, определение группы Вейля не зависит от выбора тора $\overline{T}$). Так как $\overline{T}$ инвариантен относительно σ, отображение σ действует на W. Элементы w_1 и w_2 из W называются σ-сопряженными, если существует такой элемент $w \in W$, что $w_1 = (w^{-1})^{\sigma} w_2 w$. Положим $G = \overline{G}_{\sigma}$. Известно, что классы сопряженных максимальных торов группы G находятся во взаимно однозначном соответствии с классами σ-сопряженных элементов группы W. Во всех рассматриваемых случаях классы σ-сопряженных элементов находятся в соответствии с классами сопряженных элементов групп Вейля. Группа Вейля W изоморфна симметрической группе в случае линейных и унитарных групп, изоморфна сплетению группы порядка два и симметрической группы в случае симплектических групп и ортогональных групп нечетной размерности и изоморфна подгруппе этого сплетения в случае ортогональных групп четной размерности. Классы сопряженных элементов сим-

метрической группы Sym_n задаются разбиениями числа n, при этом члены разбиения задают длины циклов в разложении элементов класса в произведение независимых циклов. Классы сопряженных элементов сплетения $\mathbb{Z}_2 \wr Sym_n$ задаются парами разбиений таких, что сумма всех членов обоих разбиений равна n, при этом члены первого разбиения задают длины положительных циклов, а члены второго — отрицательных. Соответствующее разбиение, или пара разбиений, называется циклическим типом элементов данного класса сопряженных элементов и обозначается через $(n_1)\dots(n_k)(\overline{n_{k+1}})\dots(\overline{n_s})$, где черта означает, что данное число является членом второго разбиения. Отметим также, что хотя в случае ортогональных групп четной размерности классы сопряженных элементов группы W не являются классами группы $\mathbb{Z}_2 \wr Sym_n$, можно считать, что структура торов задается некоторыми классами сопряженных элементов последней группы. В данной главе для каждого разбиения, или пары разбиений, задающего циклический тип в группе Вейля, получено разложение соответствующего тора в произведение циклических групп.

В §1.2 получены результаты, касающиеся линейных и унитарных групп. В формулировке следующей теоремы $SL_n^+(q)$ обозначает группу $SL_n(q)$, $SL_n^-(q)$ — группу $SU_n(q)$, аналогичным образом, $PSL_n^+(q)$ обозначает группу $PSL_n(q)$ и $PSL_n^-(q)$ — группу $PSU_n(q)$. Кроме того, в дальнейшем для натуральных чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$ будем обозначать через $\operatorname{lcm}\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ или $[m_1, m_2, \dots, m_s]$ их наименьшее общее кратное, а через $\gcd\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$, либо через $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ — их наибольший общий делитель. Через $m_{\{r\}}$, где m — целое число, а r — простое число, будем обозначать r-часть числа m, т. е. наибольшую степень r, делящую m.

Теорема 1.1. *Пусть $n \geqslant 2$, $(n_1, n_2, \dots, n_s)$— некоторое разбиение числа n и $\varepsilon \in \{+, -\}$. Пусть T — максимальный тор в группе $SL_n^\varepsilon(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_s)$. Для $1 \leqslant i \leqslant s$ положим*

$$d_i = \operatorname*{lcm}_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_i \leqslant s} \gcd\{q^{n_{j_1}} - (\varepsilon 1)^{n_{j_1}}, \dots, q^{n_{j_i}} - (\varepsilon 1)^{n_{j_i}}\}.$$

Тогда d_i делит $d_{i'}$ при $i > i'$ и

$$T \simeq d_1 \times d_2 \times \dots \times d_{s-1} \times \frac{d_s}{q - \varepsilon 1}.$$

Пусть $\widetilde{T}$ — образ тора T в $PSL_n(q)$. Положим $d = (n, q-\varepsilon 1)$ и $d' = (n/(n_1, \dots, n_s), q-\varepsilon 1)$. Тогда

$$\widetilde{T} \simeq \frac{d_1}{d(q-\varepsilon 1)}, \text{ если } s = 1,$$

$$\widetilde{T} \simeq d_1 \times d_2 \times \dots \times d_{s-2} \times \frac{d_{s-1}}{d'} \times \frac{d' d_s}{d(q-\varepsilon 1)}, \text{ если } s > 1.$$

В теореме 1.2 описано циклическое строение максимальных торов в группах $PGL_n^{\varepsilon}(q)$.

В §1.3 рассматриваются симплектические группы.

Теорема 1.3. *Пусть $n \geqslant 2$ и $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ — произвольное разбиение числа n. Пусть T — максимальный тор в группе $Sp_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)\dots(n_k)(\overline{n_{k+1}})\dots(\overline{n_s})$, и $\widetilde{T}$ — образ тора T в $PSp_{2n}(q)$. Положим $\varepsilon_i = +$, если $i \leqslant k$, и $\varepsilon_i = -$ в противном случае.*

Пусть q четно. Тогда

$$\widetilde{T} \simeq (q^{n_1} - \varepsilon_1 1) \times (q^{n_2} - \varepsilon_2 1) \times \dots \times (q^{n_s} - \varepsilon_s 1).$$

Пусть q нечетно. Для $1 \leqslant i \leqslant s$ положим $m_i = (q^{n_i} - \varepsilon_i 1)_{\{2\}}$ и выберем j так, что m_j делит m_i для всех i. Тогда

$$\widetilde{T} \simeq (q^{n_1} - \varepsilon_1 1) \times \dots \times (q^{n_{j-1}} - \varepsilon_{j-1} 1) \times \frac{(q^{n_j} - \varepsilon_j 1)}{2} \times$$

$$\times (q^{n_{j+1}} - \varepsilon_{j+1} 1) \times \dots \times (q^{n_s} - \varepsilon_s 1).$$

В §1.4 изучаются ортогональные группы над полями нечетной характеристики.

Теорема 1.4. *Пусть $n \geqslant 2$, q нечетно и $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ — произвольное разбиение числа n. Пусть T — максимальный тор в группе $SO_{2n+1}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)\dots(n_k)(\overline{n_{k+1}})\ \dots(\overline{n_s})$. Пусть $\varepsilon_i = +$, если $i \leqslant k$, и $\varepsilon_i = -$ в противном случае. Для $1 \leqslant i \leqslant s$ положим $m_i = (q^{n_i} - \varepsilon_i 1)_{\{2\}}$ и выберем j так, что m_j делит m_i для всех i. Тогда*

$$T \cap \Omega_{2n+1}(q) \simeq \prod_{i \neq j} (q^{n_i} - \varepsilon_i 1) \times \frac{(q^{n_j} - \varepsilon_j 1)}{2}.$$

Теорема (1.5, 1.6). *Пусть $n \geqslant 4$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, q нечетно и $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ — произвольное разбиение числа n. Пусть T — максимальный тор в группе $SO^{\varepsilon}_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)\ldots(n_k)(\overline{n_{k+1}})\ldots(\overline{n_s})$, где $s-k$ четно, если $\varepsilon = +$, и нечетно, если $\varepsilon = -$. Положим $\varepsilon_i = +$ для $i \leqslant k$ и $\varepsilon_i = -$ для $i > k$. Для $1 \leqslant i \leqslant s$ положим $m_i = (q^{n_i} - \varepsilon_i 1)_{\{2\}}$ и выберем j так, что m_j делит m_i для всех i. Тогда*

$$T \cap \Omega^{\varepsilon}_{2n}(q) \simeq \prod_{i \neq j} (q^{n_i} - \varepsilon_i 1) \times \frac{(q^{n_j} - \varepsilon_j 1)}{2}.$$

Пусть $Z(\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)) \neq 1$ и $\widetilde{T}$ — образ группы $T \cap \Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$ в $P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$.

1. *Пусть $(m_1 + m_2 + \cdots + m_s)/m_j$ нечетно. Тогда m_j делится на 4 и*

$$\widetilde{T} \simeq \prod_{i \neq j} (q^{n_i} - \varepsilon_i 1) \times \frac{(q^{n_j} - \varepsilon_j 1)}{4}.$$

2. *Пусть $(m_1 + m_2 + \cdots + m_s)/m_j$ четно. Тогда $s \geqslant 2$. Выберем l так, что $l \neq j$ и m_l делит m_i для всех $i \neq j$. Тогда*

$$\widetilde{T} \simeq \prod_{i \neq j,\, l} (q^{n_i} - \varepsilon_i 1) \times \frac{(q^{n_j} - \varepsilon_j 1)}{2} \times \frac{(q^{n_l} - \varepsilon_l 1)}{2}.$$

В §1.5 рассматриваются ортогональные группы над полями характеристики 2.

Теорема 1.7. *Пусть $n \geqslant 3$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, q четно и $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ — произвольное разбиение числа n. Пусть T — максимальный тор группы $\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)\ldots(n_k)(\overline{n_{k+1}})\ldots(\overline{n_s})$, где $s-k$ четно, если $\varepsilon = +$, и нечетно в противном случае. Тогда*

$$T \simeq (q^{n_1}-1)\times(q^{n_2}-1)\times\cdots\times(q^{n_k}-1)\times(q^{n_{k+1}}+1)\times(q^{n_{k+2}}+1)\times\cdots\times(q^{n_s}+1).$$

При доказательстве перечисленных теорем используется подход, при котором конечные группы лиева типа рассматриваются как подгруппы групп неподвижных точек эндоморфизмов алгебраических групп.

Результаты главы получены в соавторстве с М.А. Гречкосеевой и опубликованы в [10].

Глава 2. Глава посвящена описанию спектров линейных, унитарных, симплектических групп, а также ортогональных групп нечетной размерности. Для завершения описания спектров этих групп остается описать порядки элементов смешанного типа. Определим множество $\mu_m(G)$ как пересечение множеств $\mu(G)$ и $\omega_m(G)$. Тогда для описания смешанной части спектра достаточно построить множество $\nu(G)$ такое, что $\mu_m(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$. Пусть η — функция из множества подгрупп данной группы в множество натуральных чисел, действующая по правилу: подгруппе H она сопоставляет произведение периода центра группы H и максимального элемента из $\omega_p(H)$. Тогда имеют место включения

$$\mu_m(G) \subseteq \left(\bigcup_{H \leqslant G} \{\eta(H)\} \right) \subseteq \omega(G),$$

где объединение берется по всем редуктивным подгруппам максимального ранга. Однако нет необходимости описывать числа $\eta(H)$ для всех редуктивных подгрупп максимального ранга. При доказательстве теорем этой главы мы выделяем редуктивные подгруппы специального вида и доказываем, что объединение множеств $\{\eta(H)\}$ по этим подгруппам содержит $\mu_m(G)$.

В § 2.2 содержатся результаты о линейных и унитарных группах. В теоремах 2.1 и 2.2 получены описания смешанной части спектров групп $SL_n^\varepsilon(q)$ и $PGL_n^\varepsilon(q)$. Мы приводим здесь результат, касающийся простых линейных и унитарных групп.

Теорема 2.3. *Пусть $G = PSL_n^\varepsilon(q)$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $n \geqslant 2$, и q — степень простого числа p. Положим $d = (n, q-1)$. Пусть для каждого натурального $k \geqslant 1$ такого, что $n_0 = p^{k-1} + 1 < n$, и для любого разбиения $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ числа $n - n_0$ множество $\nu(G)$ содержит число $p^k(q^{n_1} - (\varepsilon 1)^{n_1})/d$, если $s = 1$, содержит число*

$$p^k[q^{n_1} - (\varepsilon 1)^{n_1}, q^{n_2} - (\varepsilon 1)^{n_2}, \ldots, q^{n_s} - (\varepsilon 1)^{n_s}], \text{ если } s > 1,$$

и не содержит других элементов. Тогда $\mu_m(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

В теоремах 2.4–2.6 дано явное описание спектров групп $SL_n^\varepsilon(q)$, $PGL_n^\varepsilon(q)$, $PSL_n^\varepsilon(q)$ соответственно. Здесь мы приводим лишь результат о группах $PSL_n^\varepsilon(q)$.

Теорема 2.6. *Пусть $G = PSL_n^\varepsilon(q)$, где $n \geqslant 2$, q — степень простого числа p. Положим $d = (n, q - \varepsilon 1)$. Тогда $\omega(G)$ состоит из всех делителей следующих чисел:*

1) $\frac{q^n-(\varepsilon 1)^n}{d(q-\varepsilon 1)}$;

2) $\frac{[q^{n_1}-(\varepsilon 1)^{n_1}, q^{n_2}-(\varepsilon 1)^{n_2}]}{(n/(n_1,n_2),q-\varepsilon 1)}$ *для любых* $n_1, n_2 > 0$ *таких, что* $n_1+n_2 = n$;

3) $[q^{n_1} - (\varepsilon 1)^{n_1}, q^{n_2} - (\varepsilon 1)^{n_2}, \ldots, q^{n_s} - (\varepsilon 1)^{n_s}]$ *для любых* $s \geqslant 3$ *и* $n_1, n_2, \ldots, n_s > 0$ *таких, что* $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$;

4) $p^k \frac{q^{n_1}-(\varepsilon 1)^{n_1}}{d}$ *для любых* $k, n_1 > 0$ *таких, что* $p^{k-1} + 1 + n_1 = n$;

5) $p^k[q^{n_1} - (\varepsilon 1)^{n_1}, q^{n_2} - (\varepsilon 1)^{n_2}, \ldots, q^{n_s} - (\varepsilon 1)^{n_s}]$ *для любых* $s \geqslant 2$ *и* $k, n_1, n_2 \ldots, n_s > 0$ *таких, что* $p^{k-1} + 1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$;

6) p^k, *если* $p^{k-1} + 1 = n$ *для* $k > 0$.

Следующее утверждение является следствием теорем 2.4 и 2.5.

Следствие. *Пусть q — степень простого числа p и n — нечетное простое число. Если $n \neq p^l + 1$ и n делит $q - \varepsilon 1$, то группа $PGL_n^{\varepsilon}(q)$ нераспознаваема по спектру.*

Результаты этого параграфа опубликованы в [11].

В § 2.3 получено описание смешанной части спектров симплектических групп. В следующих теоремах для разбиения $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ через $|a|$ обозначается сумма $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Теорема 2.7. *Пусть $G \in \{Sp_{2n}(q), PSp_{2n}(q)\}$, где $n \geqslant 2$ и q — степень нечетного простого числа p. Пусть для каждого натурального числа k такого, что $2n_0 = p^{k-1} + 1 < 2n$, и для любой пары разбиений $a = (a_1, a_2, \ldots, a_\alpha)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_\beta)$ таких, что $n - n_0 = |a| + |b|$, множество $\nu(G)$ содержит число*

$$p^k[q^{a_1} - 1, q^{a_2} - 1, \ldots, q^{a_\alpha} - 1, q^{b_1} + 1, q^{b_2} + 1, \ldots, q^{b_\beta} + 1],$$

и не содержит других чисел. Тогда $\mu_m(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

В теоремах 2.8 и 2.9 дается полное описание спектров групп $Sp_{2n}(q)$ и $PSp_{2n}(q)$ для нечетных значений q. В теоремах 2.10 и 2.11 рассматриваются симплектические группы над полями характеристики 2. Теоремы 2.9 и 2.11 будут сформулированы ниже вместе с теоремой 2.15.

В § 2.4 описана смешанная часть спектров ортогональных групп над полями нечетной характеристики. В теореме 2.12 получено описание смешанной части спектров групп $SO_{2n+1}(q)$.

Теорема 2.13. *Пусть $G = \Omega_{2n+1}(q)$, где $n \geqslant 3$ и q — степень нечетного простого числа p. Пусть для каждого натурального числа k такого, что $2n_0 = p^{k-1} + 1 < 2n$, и для любой пары разбиений $a = (a_1, a_2, \ldots, a_\alpha)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_\beta)$ таких, что $n - n_0 = |a| + |b|$, множество $\nu(G)$ содержит число*

$$p^k[q^{a_1} - 1, q^{a_2} - 1, \ldots, q^{a_\alpha} - 1, q^{b_1} + 1, q^{b_2} + 1, \ldots, q^{b_\beta} + 1],$$

если $\alpha + \beta \geqslant 2$, содержит число $p^k(q^{a_1} - 1)/2$, если $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, содержит число $p^k(q^{b_1} + 1)/2$, если $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, и не содержит других элементов. Тогда $\mu_m(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

Теорема 2.14 содержит полное описание спектров групп $SO_{2n+1}(q)$. Следующая теорема дает полное описание спектров простых симплектических групп и ортогональных групп нечетной размерности.

Теорема (2.9, 2.11, 2.15). *Пусть $G = PSp_{2n}(q)$ или $G = \Omega_{2n+1}(q)$, где $n \geqslant 2$ и q — степень простого числа p. Если $G = \Omega_{2n+1}(q)$, q нечетно и $n > 2$, положим $d = 2$; в остальных случаях положим $d = 1$. Тогда $\omega(G)$ состоит из всех делителей следующих чисел:*

1) $\frac{q^n \pm 1}{(2, q-1)}$;

2) $[q^{n_1} \pm 1, q^{n_2} \pm 1, \ldots, q^{n_s} \pm 1]$ *для всех $s \geqslant 2$ и $n_1, n_2, \ldots, n_s > 0$ таких, что $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$;*

3) $p^k \frac{q^{n_1} \pm 1}{d}$ *для всех $k, n_1 > 0$ таких, что $p^{k-1} + 1 + 2n_1 = 2n$;*

4) $p^k[q^{n_1} \pm 1, q^{n_2} \pm 1, \ldots, q^{n_s} \pm 1]$ *для всех $s \geqslant 2$ и $k, n_1, n_2, \ldots, n_s > 0$ таких, что $p^{k-1} + 1 + 2n_1 + 2n_2 + \cdots + 2n_s = 2n$;*

5) p^k, *если $2n = p^{k-1} + 1$ для некоторого $k > 0$.*

В этой теореме в каждом месте, где стоит символ $\pm$, знаки $+$ и $-$ могут выбираться независимо, например, выражение $[q \pm 1, q^2 \pm 1]$ равно либо $[q+1, q^2+1]$, либо $[q+1, q^2-1]$, либо $[q-1, q^2+1]$, либо $[q-1, q^2-1]$.

Результаты о симплектических и ортогональных группах опубликованы в [12] и [19].

Я глубоко признателен своему научному руководителю А. В. Васильеву. Его вклад в мое становление как математика неоценим. Я благодарен М. А. Гречкосеевой и Е. П. Вдовину за замечания и предложения по форме и содержанию диссертации. Я благодарен В. Д. Мазурову за неизменное внимание и поддержку.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–01–00322 и 06–01–39001) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-344.2008.1).

Литература

[1] *Мазуров В.Д.* Группы с заданным спектром, Изв. Урал. гос. ун-та, Математика и механика, **36**, вып.7 (2005), 119–138.

[2] *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in the finite classical group, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., **42**, No. 1 (1981), 1–41.

[3] *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in the finite groups of Lie type, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., **37**, No. 3 (1978), 491–507.

[4] *Carter R. W.* Finite groups of Lie type: Conjugacy classes and complex characters, London: John Wiley & Sons, 1985.

[5] *Carter R. W.* Simple groups of Lie type, London: John Wiley & Sons, 1972.

[6] *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups, Oxford, Clarendon Press, 1985.

[7] *Grechkoseeva M. A., Shi W., Vasilev A. V.* Recognition by spectrum of finite simple groups of Lie type, Front. Math. China, **3**, No. 2 (2008), 275–285.

[8] *Shi W.* The characterization of the sporadic simple groups by their element orders, Algebra Colloq., **1**, N 2 (1994), 159–166.

[9] *Testerman D. M.* A_1-Type overgroups of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups, J. Algebra, **177**, No. 1 (1995), 34–76.

Работы автора по теме диссертации

[10] *Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А.* Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах, Алгебра и логика, **46**, № 2 (2007), 129–156.

[11] *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп, Алгебра и логика, **47**, № 2 (2008), 138–160.

[12] *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных симплектических и ортогональных групп, ИМ СО РАН, препринт № 204 (2008).

[13] *Бутурлакин А. А.* Циклическое строение максимальных торов в конечных проективных специальных линейных группах, Труды XXXVI Региональной молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 2005, 7–11.

[14] *Бутурлакин А. А.* Максимальные торы в конечных линейных и унитарных группах, Материалы XLIII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика, Новосиб. гос. ун-т, Новосибирск, 2005, с. 4.

[15] *Buturlakin A. A., Grechkoseeva M. A.* The spectra of maximal tori of the finite classical groups, Алгебра и логика: Материалы российско-китайского семинара, Иркутск, Издательство Иркут. гос. пед. ун-та, 2007, 115-116.

[16] *Buturlakin A. A.* The spectra of the finite simple linear groups, Алгебра и логика: Материалы российско-китайского семинара, Иркутск, Издательство Иркут. гос. пед. ун-та, 2007, 114-115.

[17] *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных проективных специальных линейных групп, Математика в современном мире. Российская конференция, посвященная 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН: Тез. Докладов, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2007, с. 22 (http://math.nsc.ru/conference/conf50/Abstracts.pdf).

[18] *Buturlakin A. A.* The spectra of the finite simple classical groups, Тезисы докладов международной алгебраической конференции, Санкт-Петербург, 2007, 99-100.

[19] *Бутурлакин А. А.* О спектрах конечных простых классических групп, Материалы XLVI международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика, НГУ, Новосибирск, 2008, 3–4.

Подписано в печать
Формат 60 x 84
Уч.-изд. л.
Заказ № Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул.Пирогова, 2