На правах рукописи

Курылева Ольга Александровна

СТРУКТУРНЫЕ И ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Алтайского государственного университета.

Научные руководители:

доктор физ.-мат. наук, профессор
Медведев Николай Яковлевич,

доктор физ.-мат. наук, профессор
Будкин Александр Иванович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Копытов Валерий Матвеевич

доктор физико-математических наук, профессор
Пономарев Константин Николаевич

Ведущая организация:

Иркутский государственный педагогический университет

Защита диссертации состоится 26.06.2008 г. в 15-30 час. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 16.05.2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Теория решеточно упорядоченных групп (l-групп) – одно из направлений современной алгебры. За последние 30 лет произошел расцвет в развитии теории l-групп. Наиболее полно теория l-групп изложена в монографиях В.М. Копытова [29], Г. Биркгофа [7], В.М. Копытова, Н.Я. Медведева [21], Л. Фукса [37], М.Р. Дарнела [10]. Современное состояние теории l-групп, ее перспективы и проблематика отражены в работе В.М. Копытова, Н.Я. Медведева [31].

Связи теории решеточно упорядоченных групп обнаружены со многими другими разделами математики, такими как логика, теория моделей, геометрия, функциональный анализ, теория групп, теория MV-алгебр и псевдо-MV-алгебр.

Все больше научных работ посвящено исследованиям на стыке теории решеточно упорядоченных групп с другими дисциплинами.

Диссертация посвящена исследованию элементарных теорий решеток идеалов свободных абелевых l-групп и свободных векторных решеток, доказательству неразрешимости этих теорий методом относительно элементарной определимости, изучению дискриминирующих l-групп, связи дискриминируемости и универсальной теории l-групп, решетки квазимногообразий псевдо-MV-алгебр.

Основные результаты диссертации.

1. Построена интерпретация модели $\mathbf{N}$ целых положительных чисел со сложением и умножением в решетке идеалов $\mathcal{LA}_n$ $(n = 2, 3)$ свободной абелевой l-группы с n порождающими. (Теорема 1.4.5. а) (результат получен совместно с Н.Я. Медведевым)

2. Построена интерпретация модели $\mathbf{N}$ целых

положительных чисел со сложением и умножением в решетке идеалов $\mathcal{LF}_n$ ($n \geq 2$) свободной векторной решетки с n порождающими. (Теорема 1.4.5. b) (результат для $n = 3$ доказан Н.Я. Медведевым)

3. Указан критерий дискриминируемости l-групп. (Теорема 2.1.1)

4. Установлена связь между дискриминируемостью и универсальной теорией l-групп.

5. Доказана дискриминируемость свободных абелевых l-групп ранга $n \geq 2$. (Теорема 2.4.2)

6. Построено вложение решетки квазимногообразий l-групп в решетку квазимногообразий псевдо-MV-алгебр.

Новизна и научная значимость работы. Все результаты диссертации являются новыми, носят теоретический характер и могут найти применение в дальнейших исследованиях решеток идеалов l-групп, универсальных теорий l-групп и квазимногообразий псевдо-MV-алгебр.

Методы исследования.

Методы, используемые автором для доказательства результатов опираются на абстрактную теорию групп, универсальную алгебру теорию моделей.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на XLIII международной конференции "Студент и научно-технический прогресс", (г. Новосибирск, 2005 г.), Восьмой региональной конференции по математике "МАК – 2005"(Барнаул, 2005 г.), Шестой международной конференции "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры"(Эрлагол, 2005 г.), Международной конференции "Мальцевские чтения", (г. Новосибирск, 2005 г.), Девятой региональной конференции по математике "МАК – 2006"(Барнаул, 2006 г.), Международной конференции "Мальцевские чтения", (г. Новосибирск, 2006 г.), семинаре "Алгебра и логика"ИМ СО РАН (г. Новосибирск, 2007 г.), Седьмой международной конференции "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры"(Эрлагол, 2007 г.)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в работах автора [41] – [43], и совместно с Н.Я. Медведевым в работе [46].

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит 63 страниц, состоит из введения, трех глав, содержащих 11 парграфов, и библиографии. Библиография включает 46 наименований.

Содержание диссертации

Напомним ряд определений и вспомогательных результатов, необходимых в дальнейшем.

Решеточно упорядоченной группой (l-группой) называется алгебраическая система сигнатуры $l =< \cdot,^{-1}, e, \vee, \wedge >$, совмещающая в себе структуру группы и решетки, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, \qquad x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Векторное пространство V над полем действительных чисел $\mathbf{R}$, являющееся решеткой относительно некоторого частичного порядка, называется *векторной решеткой*, если для всех $u, v, w \in V$

$$u+(v \vee w) = (u+v) \vee (u+w), \qquad u+(v \wedge w) = (u+v) \wedge (u+w).$$

Элементарной теорией $Th(\mathcal{K})$ класса $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры σ называется совокупность всех замкнутых формул сигнатуры σ прикладного исчисления предикатов

(ПИП), истинных на всех системах из класса $\mathcal{K}$. Элементарная теория класса $\mathcal{K}$ называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по произвольной замкнутой формуле ПИП сигнатуры σ определяет, принадлежит эта формула $Th(\mathcal{K})$ или нет. Если элементарная теория класса $\mathcal{K}$ не является разрешимой, то она называется *неразрешимой.* Теория называется *наследственно неразрешимой*, если любая ее подтеория той же сигнатуры неразрешима.

Одним из основных методов доказательства неразрешимости теории является метод относительно элементарной определимости [27]. Пусть $\mathcal{K}_0$ – класс моделей сигнатуры $\sigma_0 =< P_0^{n_0}, ..., P_k^{n_k} >$, класс $\mathcal{K}_1$ – класс моделей сигнатуры σ_1. Будем говорить, что класс $\mathcal{K}_0$ *относительно элементарно определим* в классе $\mathcal{K}_1$, если существуют такие формулы

$$\varphi(\overline{x}, \overline{y}), \qquad \psi(\overline{x}, \overline{y}^1, \overline{y}^2),$$

$$\xi_0(\overline{x}, \overline{y}^1, ...\overline{y}^{n_0}), ..., \xi_k(\overline{x}, \overline{y}^1, ..., \overline{y}^{n_k})$$

сигнатуры σ_1 (здесь и далее $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\overline{y}^i = (y_1^i, ..., y_m^i)$), что для любой модели $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_0$ найдутся модель $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_1$ и элементы $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{N}|$, удовлетворяющие условиям:

(1) множество $L = \{\overline{b} : \overline{b} \in |\mathcal{N}|^m, \mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}, \overline{b})\}$ не пусто;

(2) формула $\psi(\overline{a}, \overline{y}^1, \overline{y}^2)$ задает отношение конгруэнтности η на модели $\mathcal{L}$ сигнатуры σ_0, основное множество которой есть L, а предикаты P_i определены формулами $\xi_i(\overline{a}, \overline{y}^1, ..., \overline{y}^{n_i})$, $0 \leq i \leq k$;

(3) фактор-модель $\mathcal{L}/\eta$ изоморфна $\mathcal{M}$

Теорема 1. (Ершов Ю.Л. [27]) *Если класс $\mathcal{K}_0$ относительно элементарно определим в классе $\mathcal{K}_1$ и теория $Th(\mathcal{K}_0)$ наследственно неразрешима, то теория $Th(\mathcal{K}_1)$ также наследственно неразрешима.*

К наиболее известным моделям с наследственно неразрешимой элементарной теорией относятся модель целых положительных чисел со сложением и умножением [25], модель целых положительных чисел со сложением и предикатом делимости [27], модель двух эквивалентностей [27]. В Коуровской тетради [32] А.И. Кокориным поставлена проблема 5.20: Разрешима ли элементарная теория решеток идеалов свободных абелевых решеточно упорядоченных групп? В работах [35], [46] получено отрицательное решение данной проблемы.

Пусть X – частично упорядоченное множество и $Y \subseteq X$. Подмножество Y называется *выпуклым* в X, если из неравенства $y_1 \leq x \leq y_2$, где $y_1, y_2 \in Y$, следует, что $x \in Y$. Напомним, что выпуклую l-подгруппу абелевой l-группы называют *идеалом* абелевой l-группы, и выпуклое подпространство векторной решетки, являющееся подрешеткой, называют *идеалом* векторной решетки.

Будем говорить, что идеал P абелевой l-группы (векторной решетки) *спрямляющий*, если из того, что $P = I \cap J$, где I, J – идеалы, следует, что либо $P = I$, либо $P = J$.

Известно [29], что множество идеалов абелевой l-группы (векторной решетки) образуют решетку, и любой идеал абелевой l-группы (векторной решетки) есть пересечение содержащих его спрямляющих идеалов.

Описание спрямляющих идеалов свободных векторных решеток и свободных абелевых l-групп дано в работе Д. Панти [24].

Обозначим через $\|u\|$ евклидову норму вектора $u \in \mathbf{R}^n$, через U — единичную сферу пространства $\mathbf{R}^n$, $U = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$. Для любого ненулевого вектора $u \in \mathbf{R}^n$ положим:

$$C(u, \varepsilon) = \{v \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\} : \|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\| \leq \varepsilon\}.$$

$C(u,\varepsilon)$ называется *открытым конусом* с центром $u \neq 0$ и радиусом $\varepsilon > 0$. Для любого непустого подмножества M векторов пространства $\mathbf{R}^n$ положим $S(M) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | \alpha_i \in \mathbf{R}^+, v_i \in M, n \in N\}$. $S(M)$ называется *выпуклым конусом*, порожденным множеством M (или выпуклым конусом, натянутым на множество векторов M). Если $M = \{v_1, v_2, ..., v_t\}$, то $S(v_1, v_2, ..., v_t) = \mathbf{R}^+ v_1 + \mathbf{R}^+ v_2 + ... + \mathbf{R}^+ v_t$ называется *полиэдральным конусом*, натянутым на векторы $v_1, v_2, ..., v_t$.

$\mathbf{Z}$-*редуцированием* $\overline{u}$ (обозначение $red(\overline{u})$) называется ортонормированный набор, определяемый по индукции следующим образом [24]:

1) Если $t = 1$, то $red(\overline{u}) = \overline{u}$;

2) если $t > 1$ и $\overline{u} = \overline{v} * w$, представим w в виде $w = p + q$, где $p \in U_{\overline{v}}$ и $q \in U_{\overline{v}}^{\perp}$; если $q = 0$, положим $red(\overline{u}) = red(\overline{v})$, если $q \neq 0$, положим $red(\overline{u}) = red(\overline{v}) * (\frac{q}{\|q\|})$.

В данном случае операция $\overline{v} * w$ означает добавление к ортонормированному набору векторов $\overline{v}$ вектора w.

Если $red(\overline{u}) = \overline{u}$, будем говорить, что набор $\overline{u}$ – $\mathbf{Z}$-*редуцированный.*

Пусть $\mathcal{F}_n$ – свободная векторная решетка с n порождающими. Для любого набора $\overline{\varepsilon} = (1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_t)$ положительных действительных чисел, где $1 \leq t \leq n$, положим $S(\overline{u}, \overline{\varepsilon})$ равному полиэдральному конусу

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2, ..., u_1 + \varepsilon_2 u_2 + ... + \varepsilon_t u_t).$$

Тогда множество

$$G_{u_1 u_2 \dots u_t} = \{f \in \mathcal{F}_n : f = 0 \qquad \text{на } S(\overline{u}, \overline{\varepsilon})$$
$$\text{для некоторого } \overline{\varepsilon} (1 \leq t \leq n)\}$$

является спрямляющим идеалом свободной векторной решетки $\mathcal{F}_n$ для любого ортонормального набора векторов и любой системы положительных действительных чисел $\overline{\varepsilon}$, и любой спрямляющий идеал свободной векторной решетки совпадает с одним из таких идеалов [24].

Универсальной теорией $Th_{\forall}(\mathcal{K})$ класса $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры σ называется совокупность всех замкнутых $\forall$-формул сигнатуры σ прикладного исчисления предикатов (ПИП), истинных на всех системах из класса $\mathcal{K}$.

Как обычно, через $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ обозначим множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел, соответственно. *Модулем* элемента x решеточно упорядоченной группы G будем считать $|x| = x \vee x^{-1}$. Элементы x и y l-группы G называются *ортогональными*, если $|x| \wedge |y| = e$, и *ортогональным рангом* решеточно упорядоченной группы называется максимальное число попарно ортогональных элементов.

Одним из наиболее значимых результатов по универсальной теории абелевых решеточно упорядоченных групп является теорема Н.Г. Хисамиева:

Теорема 2. (Хисамиев Н.Г [38]) *Абелевы решеточно упорядоченные группы универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их ортогональные ранги.*

В 2001 г. Б. Файном, А.М. Гаглионе, А.Г. Мясниковым и Д. Спелльманом [12] определено понятие дискриминируемости групп, которое связано с классическим понятием дискриминируемости групп, введенным Х. Нейман [36], но не эквивалентно ему, и описана связь между универсальной теорией групп и дискриминируемостью.

Говорят, что группа H *отделяется* группой G, если для любого нетривиального элемента $h \in H$ существует гомоморфизм $\phi_h : H \longrightarrow G$, такой что $\phi_h(h) \neq e$ и группа H *дискриминируется* группой G, если для любого конечного множества $X \subset H$ нетривиальных элементов из H существует гомоморфизм $\phi_X : H \longrightarrow G$, такой что $\phi_X(h) \neq e$ для любого $h \in X$.

Группа G называется *дискриминирующей*, если любая группа H, которая отделяется группой G, дискриминируется группой G.

Авторами [12] рассматривалась дискриминируемость некоторых классов групп, построены примеры дискриминирующих групп. В частности, доказано, что абелевы группы без кручения являются дискриминирующими, а недискриминирующими – неабелевы свободные, неабелевы коммутативно-транзитивные, неабелевы свободные нильпотентные группы.

Связь решеточно упорядоченных групп установлена также с MV-алгебрами и псевдо-MV-алгебрами.

Теория MV-алгебр происходит из теории многозначных логик Лукасевича. В 1958 г. Ч. Чен [8], [9] рассмотрел алгебраическую версию логик Лукасевича. MV-алгебры соответствуют многозначным логикам Лукасевича так же, как Булева алгебра соответствует классической двузначной логике.

Псевдо-MV-алгебра — это некоммутативное расширение MV-алгебры, впервые рассмотренное Г. Георгеску и А. Иоргулеску [14]

Алгебра $\mathcal{A} =< A, \oplus, \neg, \sim, 1, 0 >$ типа $(2, 1, 1, 0, 0)$ называется *псевдо-MV-алгеброй*, если $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующим тождествам:

(A1) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

(A2) $x \oplus 0 = 0 \oplus x = 0$

(A3) $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$

(A4) $\sim 1 = 0, \ \neg 1 = 0$

(A5) $\sim (\neg x \oplus \neg y) = \neg(\sim x \oplus \sim y)$

(A6) $x \oplus \sim x \odot y = y \oplus \sim y \odot x = x \odot \neg y \oplus y = y \odot \neg x \oplus x$

(A7) $x \odot (\neg x \oplus y) = (x \oplus \sim y) \oplus y$

(A8) $\sim (\neg x) = x$,

где $x \odot y = \sim (\neg x \oplus \neg y)$

Напомним, что элемент u решеточно упорядоченной группы G называется *сильной единицей*, если для любого элемента $g \in G$ найдется натуральное число $n \in \mathbf{N}$, такое что $u^{-n} \leq g \leq u^n$.

В 1986 г. Д. Мундичи [23] доказал, что существует взаимнооднозначное соответствие между абелевыми l-группами со сильной единицей и MV-алгебрами. Позднее в 2002 г. А. Двуреченкий [11] получил аналогичный результат для псевдо-MV-алгебр и решеточно упорядоченных групп.

Если G – решеточно упорядоченная группа со сильной единицей u, то пара (G, u) называется *унитальной l-группой*. Пусть (G, u) – унитальная l-группа. Положим A равное интервалу $[0, u]$ в G, и для $x, y \in A$ определим

$$x \oplus y = (x + y) \wedge u,$$

$$\neg x = u - x, \qquad \sim x = -x + u, \qquad 1 = u.$$

Нетрудно заметить, что алгебраическая система

$$\Gamma(G, u) = < A, \oplus, \neg, \sim, u, 0 >$$

является псевдо-MV-алгеброй. А. Двуреченский [11] доказал, что для любой псевдо-MV-алебры A существует единственная с точностью до изоморфизма унитальная l-группа G со сильной единицей u, такая что $\mathcal{A} = \Gamma(G, u)$.

В 2003 г. Я. Якубик [20], используя результат А. Двуреченского [11], рассмотрел решетку многообразий псевдо-MV-алгебр и построил вложение решетки многообразий l-групп в решетку многообразий псевдо-MV-алгебр.

Глава 1. Целью главы 1 является доказательство неразрешимости элементарных теорий решеток идеалов свободных абелевых l-групп и свободных векторных решеток. Для доказательства неразрешимости теории использован метод относительно элементарной определимости [27], в качестве модели с наследственно неразрешимой теорией – модель $\mathbf{N}$ целых положительных чисел со сложением и умножением, неразрешимость которой доказана А. Тарским [25]. В §1 даны основные понятия и сформулированы результаты, необходимые для построения интерпретации арифметики в решетках идеалов.

Во втором параграфе описаны спрямляющие идеалы свободной абелевой l-группы $\mathcal{A}_n$, где $n = 2, 3$ в соответствии с [24] и доказано, что решетка идеалов $\mathcal{L}\mathcal{A}_n$ для $n = 2, 3$ изоморфна решетке $\overline{\mathcal{G}}_n$ семейств всех наборов $(K_1, ..., K_n)$, $n = 2, 3$, где $K_i \subseteq U^i$ $(i \le n)$, удовлетворяющих определенным условиям. В частности, для $n = 3$ данные условия имеют вид:

$A_3 1)$ K_1 – замкнутое подмножество U.

$A_3 2)$ Если $(u_1, u_2) \in K_2$, $(u_1, u_2, u_3) \in K_3$, то наборы (u_1, u_2) и (u_1, u_2, u_3) – ортонормированы и $\mathbf{Z}$-редуцированные.

$A_3 3)$ Если $(u_1, u_2) \in K_2$, то $u_1 \in K_1$ и если $(u_1, u_2, u_3) \in K_3$, то $(u_1, u_2) \in K_2$.

$A_3 4)$ Пусть $u_1 \in K_1$, $dim(U_{u_1}) = 2$ и пусть $u_2 \in U$, такой что набор (u_1, u_2) – $\mathbf{Z}$-редуцированный. Пусть $a \in U_{u_1}$, такой что (u_1, a) – ортонормированный. Если для любых строго положительных действительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ множество

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 a, u_1 - \varepsilon_2 a, u_1 + \varepsilon_3 u_2) \backslash S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 a, u_1 - \varepsilon_2 a)$$

содержит вектор из K_1, тогда $(u_1, u_2) \in K_2$.

$A_3 5)$ Пусть $u_1 \in K_1$, $dim(U_{u_1}) = 1$ и пусть $u_2 \in U$ такой, что $dim(U_{u_2}) = 1$ и набор (u_1, u_2) ортонормированный и $\mathbf{Z}$-редуцированный. Пусть $u_3 \in U$ такой, что набор (u_1, u_2, u_3)

ортонормированный. Если для любых строго положительных действительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ множество

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2, u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3, u_1 + \varepsilon_2 u_2 - \varepsilon_3 u_3) \backslash S(u_1)$$

содержит вектор из K_1, тогда $(u_1, u_2) \in K_2$.

$A_3 6)$ Пусть $u_1 \in K_1$, $dim(U_{u_1}) = 1$ и пусть $u_2 \in U$ такой, что $dim(U_{u_2}) = 1$ и набор (u_1, u_2) ортонормированный и **Z**-редуцированный. Пусть $u_3 \in U$ такой, что набор (u_1, u_2, u_3) ортонормированный. Если для любых строго положительных действительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ множество

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2, u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3, u_1 + \varepsilon_2 u_2 - \varepsilon_3 u_3) \backslash S(u_1)$$

содержит вектор из $S(u_1, u_1 + \delta v)$ для некоторого $(u_1, v) \in K_2$ и некоторого положительного действительного числа δ, тогда $(u_1, u_2) \in K_2$.

$A_3 7)$ Пусть $u_1 \in K_1$, $dim(U_{u_1}) = 1$ и пусть $u_2 \in U$ такой, что $dim(U_{u_2}) = 2$ и набор (u_1, u_2) ортонормированный и **Z**-редуцированный. Если для любых строго положительных действительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ множество

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2, u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 a, u_1 + \varepsilon_2 u_2 - \varepsilon_3 a) \backslash S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2),$$

где a – вектор из U_{u_2}, такой что набор (u_1, u_2, a) ортонормирован, содержит вектор из K_1, тогда $(u_1, u_2) \in K_2$.

$A_3 8)$ Пусть $u_1 \in K_1$, $dim(U_{u_1}) = 1$ и пусть $u_2 \in U$ такой, что $dim(U_{u_2}) = 2$ и набор (u_1, u_2) ортонормированный и **Z**-редуцированный. Если для любых строго положительных действительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ множество

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2, u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 a, u_1 + \varepsilon_2 u_2 - \varepsilon_3 a) \backslash S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2),$$

где a – вектор из U_{u_2}, такой что набор (u_1, u_2, a) ортонормированный, содержит вектора из $S(u_1, u_1 + \delta v)$ для некоторого δ и $(u_1, v) \in K_2$, тогда $(u_1, u_2) \in K_2$.

$A_3 9)$ Пусть $(u_1, u_2) \in K_2$, $dim(U_{u_1}) = dim(U_{u_2}) = 1$ и пусть $u_3 \in U$ такой, что набор (u_1, u_2, u_3) ортонормированный и $\mathbf{Z}$-редуцированный. Если для любых строго положительных действительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ множество

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2, u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3) \backslash S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2)$$

содержит вектора из K_1 тогда $(u_1, u_2, u_3) \in K_3$.

$A_3 10)$ Пусть $(u_1, u_2) \in K_2$, $dim(U_{u_1}) = dim(U_{u_2}) = 1$ и пусть $u_3 \in U$ такой, что набор (u_1, u_2, u_3) ортонормированный и $\mathbf{Z}$-редуцированный. Если для любых строго положтельных действительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ множество

$$S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2, u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3) \backslash S(u_1, u_1 + \varepsilon_2 u_2)$$

содержит вектора из $S(u_1, u_1 + \delta v)$ для некоторого $\delta > 0$ и $(u_1, v) \in K_2$, тогда $(u_1, u_2, u_3) \in K_3$.

В третьем параграфе по аналогии с §2 описаны спрямляющие идеалы свободной векторной решетки $\mathcal{LF}_n$ для $n \geq 2$, отдельно рассмотрены случаи для $n = 2, 3$.

В §4 построен ряд формул сигнатуры $\sigma =< \vee, \wedge, 1, 0 >$, позволяющих доказать относительно элементарную определимость модели $\mathbf{N}$ положительных чисел со сложением и умножением в моделях $\mathcal{LA}_n$ и $\mathcal{LF}_n$.

$$P(I) := (\forall J_1)(\forall J_2)(I \leq J_1 \& I \leq J_2 \Rightarrow J_1 \leq J_2 \vee J_2 \leq J_1),$$
$$M_1(I) := \neg(I = 1)\&(\forall C)(I \leq C \leq 1 \Rightarrow C = I \vee C = 1),$$
$$M_k(I) := P(I)\&(\exists C)(M_{k-1}(C)\&\neg(I = C)\&(I \leq C)\&$$
$$\&(\forall X)(I \leq X \leq C \Rightarrow X = I \vee X = C)),$$
$$A \approx B := (A = B) \vee (\neg(A = B)\&(\exists V)(\exists W)(\exists G)(Fin(V)\&Fin(W)\&$$
$$\&(V \vee (A \vee B) = 1\&(V \wedge (A \vee B)) = A)\&(W \vee (A \vee B) = 1\&(W \wedge (A \vee B)) = B)\&$$
$$\&(V \geq G)\&(W \geq G)\&(\forall D)((D)Cmp(G) \Rightarrow (M_1(D \vee V)\&M_1(D \vee W)))),$$
$$+(A, B, C) := (\exists D)(\exists E)(Fin(D)\&Fin(E)\&(C = D \wedge E)\&$$

$$\&(D \vee E = 1)\&(A \approx D)\&(B \approx E)),$$
$$\times(A, B, C) := (\exists D)(\exists F)(F \approx B)\&(F \geq D)\&(C \geq D)\&$$
$$\&(\forall E)((E)Cmp(D) \Rightarrow M_1(E \vee F)\&(E \vee C \approx A))).$$

Непосредственно из определения спрямляющего идеала следует, что формула $P(I)$ истинна в $\mathcal{LA}_n$ (для $n = 2, 3$) и $\mathcal{LF}_n$ (для $n \geq 2$) тогда и только тогда, когда идеал I является спрямляющим.

Формула $M_1(I)$ истинна в $\mathcal{LA}_n$ (для $n = 2, 3$), $\mathcal{LF}_n$ (для $n \geq 2$) тогда и только тогда, когда I является максимальным собственным идеалом, в этом случае I является спрямляющим, и $I = \overline{G}_{u_1}$ для некоторого вектора $u_1 \in U$.

Формула $M_k(I)$ истинна в $\mathcal{LA}_n$ (для $n = 2, 3$), $\mathcal{LF}_n$ (для $n \geq 2$) тогда и только тогда, когда I является спрямляющим идеалом и в $\mathcal{LA}_n$ существует в точности k различных спрямляющих идеалов, содержащих I. В этом случае $I = \overline{G}_{u_1 u_2 \ldots u_k}$ для некоторого ортонормированного $\mathbf{Z}$-редуцированного набора $(u_1, u_2, ..., u_k) \in U^k$.

Формула $A \approx B$ истинна в $\mathcal{LA}_n$ $(n = 2, 3)$, в $\mathcal{LF}_n$ $(n \geq 2)$, если и только если конечные множества $K_{A(1)}$ и $K_{B(1)}$ содержат одинаковое число элементов.

Формула $+(A, B, C)$ истинна на $\mathcal{LA}_n$ $(n = 2, 3)$ и $\mathcal{LF}_n$ $(n \geq 2)$, если и только если $|K_{C(1)}| = |K_{A(1)}| + |K_{B(1)}|$.

Формула $\times(A, B, C)$ истинна в $\mathcal{LA}_n$ $(n = 2, 3)$, $\mathcal{LF}_n$ $(n \geq 2)$, если и только если $|K_{C(1)}| = |K_{A(1)}| \cdot |K_{B(1)}|$.

Таким образом,

1) Множество L непусто;

2) Формула $A \approx B$ задает отношение конгруэнтности на модели $\mathcal{L}$, основное множество которой есть L, а предикаты определены с помощью формул $+(A, B, C)$ и $\times(A, B, C)$;

3) Фактор-модель $\mathcal{L}/\approx$ изоморфна модели $\mathbf{N}$ целых положительных чисел со сложением и умножением.

Теорема 1.4.5. *a) Модель* $\mathbf{N}$ *целых положительных чисел со сложенеим и умножением относительно элементарно интерпретируется в решетке идеалов* $\mathcal{LA}_n$ $(n = 2, 3)$ *свободной абелевой* l*-группы* $\mathcal{A}_n$.

Элементарная теория решеток идеалов свободных абелевых l*-групп наследственно неразрешима.*

b) Модель $\mathbf{N}$ *целых положительных чисел со сложенеим и умножением относительно элементарно интерпретируется в решетке идеалов* $\mathcal{LF}_n$ $(n \geq 2)$ *свободной векторной решетки* $\mathcal{F}_n$.

Глава 2. Во второй главе рассматривается адаптация к понятию l-группы понятия дискриминируемости групп, введенного Б. Файном, А. Гаглионе, А.С. Мясниковым и Д.Спеллманом [12], которое тесно связано с классическим определением дискриминируемости [36], но не совпадает с ним. В §1 определены основные понятия и доказан критерий дискриминируемости l-групп.

Будем говорить, что решеточно упорядоченная группа H *отделяется* l-группой G, если для любого нетривиального $h \in H$ существует l-гомоморфизм $\phi_h : H \longrightarrow G$, такой что $\phi_h(h) \neq e$.

Решеточно упорядоченная группа H *дискриминируется* l-группой G, если для любого конечного множества $X \subset H$ нетривиальных элементов из H существует l-гомоморфизм $\phi_X : H \longrightarrow G$, такой что $\phi_X(h) \neq e$ для любого $h \in X$.

Решеточно упорядоченную группу G назовем *дискриминирующей*, если любая l-группа H, которая отделяется l-группой G, дискриминируется l-группой G.

Теорема 2.1.1. *Решеточно упорядоченная группа* G *является дискриминирующей* l*-группой тогда и только тогда, когда* l*-группа* $G \times G$ *дискриминируется* G.

В §2 построен ряд примеров, показывающих, что класс дискриминируемых l-групп не пуст. В частности, установлено, что группа Томпсона, группа Длаба, декартова сумма счетного числа групп целых чисел со стандартным решеточным порядком являются дискриминирующими. Кроме того, доказано, что любая l-группа конечного ортогонального ранга не является дискриминирующей.

В третьем параграфе рассматривается связь между дискриминируемостью и универсальной теорией l-групп.

Теорема 2.3.1. *Если G - дискриминирующая l-группа, то любая декартова степень G^{α} универсально эквивалентна G.*

Следствие 2.3.2. Если G – дискриминирующая l-группа, то $Th_{\forall}(G) = Th_{\forall}(G \times G)$.

Теорема 2.3.3. *Пусть G – конечно определенная l-группа. Тогда G является дискриминирующей тогда и только тогда, когда G – квадратоподобна.*

С использованием полученных результатов установлено, что класс квадратоподобных абелевых l-групп совпадает с классом абелевых l-групп бесконечного ортогонального ранга, и этот класс аксиоматизируем.

В §4 доказан следующий результат.

Теорема 2.4.2. *Свободная абелева l-группы A_n, где n – число свободных порождающих и $n \geq 2$, является дискриминирующей l-группой.*

Глава 3. В третьей главе построено инъективное отображение φ из решетки Υ_2 квазимногообразий l-групп в решетку Υ_1 квазимногообразий псевдо-MV-алгебр, такое что для любых квазимногообразий l-групп Z_1, Z_2 имеем

$$Z_1 \subseteq Z_2 \Leftrightarrow \varphi(Z_1) \subseteq \varphi(Z_2) \qquad (*)$$

В §1 представлено описание решетки квазимногообразий псевдо-MV-алгебр в соответствии с описанием решетки квазимногообразий l-групп [22]. Доказаны следующие вспомогательные результаты.

Предложение 3.1.2. Конъюнкция конечного числа квазитождеств сигнатуры σ эквивалентна одному квазитождеству в классе всех псевдо-MV-алгебр. В частности, если $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, то

$$\forall \mathbf{x}(\&_{k=1}^{m} w_k(\mathbf{x}) = 0 \Longrightarrow w(\mathbf{x}) = 0)$$

эквивалентно квазитождеству

$$\forall \mathbf{x}((\bigvee_{k=1}^{m} w_k(\mathbf{x}) = 0) \Longrightarrow w(\mathbf{x}) = 0)$$

Следствие 3.1.3. *Если квазимногообразие псевдо-MV-алгебр X имеет конечный базис квазитождеств, то X может быть определено одним квазитождеством.*

Множество Λ всех квазимногообразий псевдо-MV-алгебр является решеткой, где решеточная операция пересечения совпадает с теоретико-множественным пересечением:

$$X \bigwedge^{\Lambda} Y = X \bigcap Y,$$

а решеточная операция объединения есть теоретико-множественное пересечение всех квазимногообразий псевдо-MV-алгебр, содержащих X и Y:

$$X \bigvee_{\Lambda} Y = \bigcap \{W : X \cup Y \subseteq W\}$$

В §2 дано определение квазирегулярного класса унитальных l-групп и построен изоморфизм частично упорядоченного множества Υ_1 в частично упорядоченное множество $\mathcal{U}$ классов унитальных решеточно упорядоченных групп.

В третьем параграфе главы 3 построено вложение $\varphi : \Upsilon_2 \longrightarrow \Upsilon_1$, обладающее свойством $(*)$ и доказано, что решетка Λ всех квазимногообразий псевдо-MV-алгебр не модулярна и, следовательно, не дистрибутивна.

Автор безмерно благодарен своему научному руководителю профессору Н.Я. Медведеву за ценные обсуждения и внимание к работе.

Литература

[1] Baker K. Free vector lattices // Canadian J. Math. 1968. № 20. P. 58–56.

[2] Bayanova N.V., Medvedev N. Ya. Vector lattices with two generators // Algebra and Logik. 2002. № 41. P. 217–227.

[3] Belegradek O. Discriminating and square-like groups // J. Group Theory. 2004. № 7. P. 521–532.

[4] Belluce L.P., Grigolia R., Lettieri A. Representation of monadic MV-algebras // Studia Logica. 2005 № 81. P. 123–144.

[5] Beynon W.M. Duality theorems for finitely generated vector lattices // Proc.London Math. Soc. 1975. № 31. P. 114–128.

[6] Beynon W.M.: Applicatins of duality in the theory of finitely generated lattice-ordered groups // Canadian J. Math. 1977. № 29. P. 243 – 254.

[7] Birkhoff G. On the structure abstract algebra // Proc.Cambridge Phil. Soc. 1935. № 31. P. 433–454.

[8] Chang C.C. Algebraic analysis of infinite valued logic // Tranc. Amer. Math. Soc. 1958. № 88. P. 467–490.

[9] Chang C.C. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms // Tranc. Amer. Math. Soc. 1959. № 93. P. 74–90.

[10] Darnel M.R. Theory of lattice-ordered groups // Marcel Dekker Inc., New York – Basel – Hong Kong. 1995.

[11] Dvurečenskij A. Pseudo MV-algebras are intervals in l-groups // J.Austral.Math.Soc. Ser A. 2002. № 72. P. 427–445.

[12] Fine B., Gaglione A.M., Myasnikov A.G., Spellman D. Discriminating groups // J.Group Theory. 2001. № 4. P. 467–479.

[13] Fine B., Gaglione A.M., Myasnikov A.G., Spellman D. Groups whose universal theory is axiomatizable by quasi-identities // J.Group Theory. 2002. № 5. P. 365–381.

[14] Georgescu G., Iorgulescu A. Pseudo MV-algebras: A non-commutative existantion of MV-algebras // INFOREC Printing House. Bucharest. 1999. P. 961–968.

[15] Glass A.M.W. Generating varieties of lattice-ordered groups: approximating wreath products // Illinois journal of mathematics. 2001. № 3. P. 138–151.

[16] Glass A.M.W. Partially ordered groups //, World Sci. Pub. Co., Singapore. 1999.

[17] Grzegorczyk A. Undecidability of some topological theories // Fund. Math. 1951. № 38. P. 137–152.

[18] Grzegorczyk A. Undecidability without ariphmatization / / Studia Logica. 2005. № 79. P. 163–230.

[19] Jakubik J. On product MV-algebras // Czech. Math. J. 2002. V. 127. № 52. P. 797–810.

[20] Jakubik J. On varieties of pseudo MV-algebras // Czech. Math. J. 2003. V. 128. № 53. P. 1021–1038.

[21] Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. The Theory of Lattice-Ordered Groups. Dordrecht-Boston-London.: Kluwer Academic Publishers. 1994. 400 p.

[22] Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. Quasivarieties and Varieties Lattice-Ordered groups. – Ordered groups and Infinite Permutation Groups // Edited by W.C. Holland. Kluwer Academic Publishers. 1996. P. 1–29.

[23] Mundici D. Interpretation of AF C*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus // Journal of functional analysis. 1986. № 65. P. 15–63.

[24] Panti G. Prime ideals in free l-groups and free vector lattices // J. Algebra. 1999. № 219. P. 173–200.

[25] Tarski A. Undecidable theories. Amsterdam, North-Holland publishing company. 1971.

[26] Weil H. Elementary Theorie der konvexen Polyhedra // Comm. Math. Helv. 1935. P. 290–306.

[27] Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

[28] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.

[29] Копытов, В.М. Решеточно упорядоченные группы. М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984.

[30] Копытов В.М., Медведев Н.Я. Правоупорядоченные группы. Новосибирск: Научная книга. 1996.

[31] Копытов, В.М., $\boxed{\text{Медведев Н.Я.}}$ Упорядоченные группы: итоги, перспективы, проблемы // Избранные вопросы алгебры: сборник статей, посвященный памяти Н.Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та. 2007.

[32] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп), ред. В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро, Издание четырнадцатое. Институт математики СО РАН, Новосибирск, 1999.

[33] Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука 1970.

[34] Медведев Н.Я. Сплетения и многообразия решеточно упорядоченных групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та. 1990.

[35] Медведев Н.Я. Элементарная теория решеток l-идеалов абелевых l-групп // Алгебра и логика. 2005. № 5. С. 540–559.

[36] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Наука. 1968.

[37] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир. 1965.

[38] Хисамиев Н.Г. Универсальная теория структурно упорядоченных абелевых групп // Алгебра и логика. 1966. Т.5 № 3 С. 71–76.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

[39] Курылева О.А. Дискриминирующие l-группы // Седьмая региональная конференции по математике "МАК - 2004". Тез. докладов. Барнаул: Изд-во Алт. Ун-та. 2004.

[40] Курылева О.А. Интерпретация арифметики в решетке идеалов $\mathcal{LF}_n$ // Девятая региональная конференции по математике "МАК - 2006". Тез. докладов. Барнаул: Изд-во Алт. Ун-та. 2006.

[41] Курылева О.А. Дискриминирующие l-группы // Избранные вопросы алгебры: сборник статей, посвященный

памяти Н.Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та. 2007. с. 143–157.

[42] Курылева О.А. Интерпретация арифметики в решетке идеалов свободной векторной решетки $\mathcal{LF}_n$. // Алгебра и логика. 2008. Т. 47 , № 1. С. 71–82.

[43] Курылева, О.А. О квазимногообразиях псевдо-MV-алгебр // Сиб. мат. ж. 2008. Т. , № . С.

[44] Медведев Н.Я., Курылева О.А. Интерпретация арифметики в решетке идеалов свободной абелевой l-группы с тремя порождающими // Восьмая региональная конференции по математике "МАК - 2005". Тез. докладов. Барнаул: Изд-во Алт. Ун-та. 2005

[45] Медведев Н.Я., Курылева О.А. Интерпретация арифметики в решетке идеалов свободной абелевой l-группы с тремя порождающими // XLIII международная научная конференция "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Тез. докладов. Новосибирск: Новосиб.гос.ун-т. 2005.

[46] Медведев Н.Я., Курылева О.А. Интерпретация арифметики в решетке идеалов свободной абелевой l-группы с тремя порождающими // Algebra and Models Theory 5. Collection of papers edited by A.G. Pinus and K.N. Ponomarev. Novosibirsk State Technical University. 2005.

Курылева Ольга Александровна

Структурные и теоретико-модельные аспекты теории решеточно упорядоченных групп

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

———————————————————————————

Подписано в печать . . . Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Тираж 100 экз. Заказ №

———————————————————————————

Отпечатано в ООО Издательство Алтайского государственного университета
656099, г. Барнаул, ул.Димитрова, 66.