

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. Соболева

На правах рукописи

ПУЗЫНИНА Светлана Александровна

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ БЕСКОНЕЧНОЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

специальность 01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск, 2008

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО
РАН

Научные руководители: кандидат физико-математических наук,
С. В. Августинович.
Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
А. В. Кельманов,
кандидат физико-математических наук,
В. А. Аксенов.
Ведущая организация: Уральской государственный университет

Защита состоится "14" мая 2008 г. в 17 часов на заседании диссер-
тационного совета Д.003.015.01 в Институте математики им. С. Л. Со-
болева СО РАН по адресу: пр. Академика Коптюга, 4, 630090, г. Но-
восибирск.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института ма-
тематики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "14" апреля 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.003.015.01 при Институте
математики имени С.Л. Соболева СО РАН
доктор физико-математических наук

Шамардин Ю. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ¹

Актуальность темы. Объектом исследования настоящей диссертации являются проблемы алгебраической комбинаторики, теории кодирования и теории графов. Предмет исследования — совершенные раскраски, центрированные функции и другие обобщения совершенных кодов.

Рассмотрим произвольный граф G . Раскраска вершин графа G называется совершенной радиуса r , если цветовой состав всякого шара радиуса r однозначно определяется цветом центра этого шара. Числа a_{ij} , задающие количество вершин цвета j в шаре с центром цвета i , определяют матрицу параметров совершенной раскраски. Понятие совершенной раскраски естественным образом возникает в различных областях математики, поэтому оно было введено независимо в нескольких работах под разными названиями. В частности, в работах, близких к теории кодирования, такие раскраски назывались *partition designs* (схемы разбиения) или *equitable partitions* (равномерные разбиения). Также использовались термины *дистрибутивная, изотропная раскраска* и *A-допустимая раскраска*, где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Задача классификации совершенных раскрасок является актуальной проблемой теории кодирования и криптографии. Понятие совершенной раскраски обобщает понятие совершенного и некоторых других известных кодов, например, кодов Препараты, полностью регулярных и равномерно упакованных кодов. А именно, каждый из таких кодов может рассматриваться как множество вершин некоторого цвета в некоторой совершенной раскраске гиперкуба. Совершенные раскраски также имеют приложение в криптографии, так как тесно связаны с корреляционно-иммунными булевыми функциями, используемыми для построения криптосистем.

В диссертации также исследуется другое обобщение совершенных кодов — центрированные функции. Действительнозначная функция на вершинах графа называется *центрированной*

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-00248) и Фонда содействия отечественной науке.

радиуса r , если сумма ее значений в любом шаре радиуса r равна 0. Совершенный код может рассматриваться как частный случай центрированной функции. Это означает, что задача классификации совершенных раскрасок и центрированных функций не может быть проще, чем задача классификации совершенных кодов, которая остается нерешенной уже несколько десятилетий.

Актуальность исследования совершенных раскрасок обусловлена также их связью со структурой групп автоморфизмов графов. Основным способом построения совершенных раскрасок (в произвольных графах) является так называемый орбитный метод, суть которого выражается в следующем факте. Пусть G — произвольный обыкновенный граф с группой автоморфизмов H и H' — некоторая подгруппа группы H . Относительно H' множество вершин графа G разбивается на орбиты. Раскрашивая каждую из орбит своим цветом, получаем совершенную раскраску графа G . О группе автоморфизмов графа G можно сделать некоторые выводы по собственным значениям и собственным векторам графа, которые связаны с собственными значениями матрицы совершенной раскраски следующим образом: характеристический многочлен матрицы параметров совершенной раскраски делит характеристический многочлен матрицы смежности графа. В последнее время появляются публикации, в которых совершенные раскраски используются как инструмент в различных подходах к проблеме изоморфизма графов. Проблема распознавания того, являются ли два конечных графа изоморфными, является одной из наиболее важных нерешенных проблем современной теории сложности вычислений. Сложностной статус этой проблемы до сих пор не определен.

Задача исследования центрированных функций и совершенных раскрасок на бесконечных транзитивных решетках тесно связана также с теорией двумерных слов. Центрированные функции и совершенные раскраски могут рассматриваться как двумерные слова над конечным алфавитом цветов и значений функции соответственно. В диссертации разработан

метод R -продолжаемых слов для доказательства периодичности двумерных слов и используется для доказательства периодичности совершенных раскрасок и центрированных функций. Этот метод или его модификации могут быть использованы для решения различных вопросов о периодичности, которая является важным объектом исследования современной теории явыков. Например, много усилий прилагается исследователями для проверки гипотезы Нива о связи комбинаторной сложности и периодичности.

Таким образом, выявление нетривиальных свойств, а также построение новых совершенных раскрасок и центрированных функций является актуальной задачей, лежащей на стыке таких областей математики, как алгебраическая комбинаторика, теория кодирования и теория графов.

Цель работы состоит в исследовании свойств совершенных раскрасок, центрированных функций и других обобщений совершенных кодов на бесконечных транзитивных решетках.

Методика исследований. В диссертации использованы комбинаторные методы дискретного анализа. Предложен и обоснован метод R -продолжаемых слов.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Впервые исследована периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки: доказано, что любая совершенная раскраска радиуса $r > 1$ является периодической; в случае радиуса 1 существуют непериодические раскраски, но для любой совершенной раскраски существует периодическая раскраска с теми же параметрами. Впервые перечислены все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиуса 1 в 3 цвета. В диссертации введен новый метод R -продолжаемых слов для исследования периодичности двумерных слов с локальными условиями. Доказано, что любая ограниченная центрированная функция произвольного радиуса на бесконечной прямоугольной решетке является периодической. Аналогичные результаты получены для квазицентрированных функций, а также для бесконечной треугольной и гексагональной решеток.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных конференциях ALCOMA'05 (Algebraic Combinatorics and Applications) в Германии, CANT2006 (Combinatorics, Automata and Number Theory) в Бельгии, DM6 (6-я международная конференция "Дискретные модели в теории управляющих систем") в Москве, российской конференции ДАИО'04 (Дискретный Анализ и Исследование Операций) в Новосибирске, Шестой молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям в 2007 году в Москве, международной конференции "Математика в современном мире" в Новосибирске в 2007 году. Результаты докладывались на семинаре "Алгебраические системы" Уральского Государственного Университета, на семинаре Института Проблем Передачи Информации в Москве и семинарах "Теория кодирования", "Дискретный анализ", "Теория графов" и "Дискретно-экстремальные задачи" Института Математики СО РАН и Новосибирского Государственного Университета. Результаты кандидатской диссертации были отмечены дипломами Всероссийского конкурса дипломных работ в 2003 и 2005 году, дипломами Международной Студенческой Научной Конференции, грантом "Лучшие аспиранты", грантом "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект номер 82-87), стипендией Сибирско-Математического Журнала. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-00248),

Основные результаты диссертации.

1. Доказано, что для любой совершенной раскраски радиуса 1 существует периодическая совершенная раскраска с теми же параметрами.

2. Перечислены все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиуса 1 в 3 цвета.

3. Разработан метод доказательства периодичности двумерных слов с локальными условиями. С помощью этого метода получены следующие результаты:

3.1. Доказано, что всякая совершенная раскраска радиуса $r > 1$ графа $G(\mathbb{Z}^2)$ является периодической.

3.2. Доказано, что любая ограниченная целочисленная цен-

трированная функция произвольного радиуса на $G(\mathbb{Z}^2)$ является периодической. Аналогичные результаты получены для бесконечной треугольной и гексагональной решеток.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы, представленные в диссертации, могут быть использованы в теории кодирования для исследования различных кодов, а также могут иметь приложения в теории двумерных слов. Результаты включены в программу спецкурса "Совершенные структуры", читаемого на кафедре теоретической кибернетики НГУ.

На защиту выносятся совокупность результатов о свойствах совершенных раскрасок и центрированных функций на бесконечных транзитивных решетках.

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы работы [29]-[37].

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы из 49 наименований. Общий объем работы — 79 страниц, включая 31 рисунок и 1 таблицу.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во **введении** даются необходимые определения, приводится краткий обзор полученных результатов. Коротко излагается содержание диссертационной работы. Основные понятия и определения даются в первой главе диссертации, некоторые вспомогательные определения и обозначения приведены в начале каждой главы. Пусть $G = (V, E)$ — граф, $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n , $r \geq 1$. Рассмотрим раскраску графа G в n цветов и произвольную вершину x цвета i . Если количество вершин цвета j (отличных от x) на расстоянии не более r от вершины x не зависит от выбора вершины x и равно a_{ij} , то раскраска называется *совершенной радиуса r* с матрицей A . Ранее совершенные раскраски изучались в различных контекстах и имели различные названия.

Понятие совершенной раскраски является обобщением понятия совершенного кода. Легко понять, что вершины цвета 1 совершенной раскраски регулярного графа степени n с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$ образуют совершенный код с расстоянием 3.

Понятие совершенной раскраски также связано с важными в теории кодирования понятиями полностью регулярного и равномерно упакованного кода. А именно, такие коды могут рассматриваться как совершенные раскраски гиперкуба с подходящей матрицей параметров. Понятие полностью регулярного кода было введено Дельсартом в 1973 году [7]. Определение полностью регулярного кода может быть дано в терминах совершенных раскрасок. Пусть C — некоторое подмножество вершин в n -мерном кубе E^n , рассмотрим дистанционную раскраску вершин гиперкуба относительно этого множества: вершины из C красим в цвет 1, если расстояние от вершины x до ближайшей вершины из C равно i , то x красится в цвет $i + 1$. Если дистанционная раскраска вершин гиперкуба относительно C является совершенной, то C является вполне регулярным кодом.

Понятие вполне регулярного кода очень близко к понятию равномерно упакованного кода [26], а именно, равномерно упакованный код является вполне регулярным кодом, а вполне регулярный код является совершенной раскраской с трехдиагональной матрицей.

Одним из известных примеров вполне регулярного кода является код Препараты (оптимальный код расстоянием 5) [15]. Вершинами кода Препараты являются вершины цвета 1 совершенной раскраски радиуса 1 гиперкуба в 4 цвета. Для длины $n = 2^m - 1$ (при четном $m \geq 2$) соответствующая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & n & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 2 & n-3 & 1 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{pmatrix}.$$

Вершины цветов 1 и 4 образуют совершенный код, то есть если объединить цвета 1 и 4 в один цвет и 2 и 3 в другой, то получится матрица совершенной рас-

краски совершенного кода.

Понятие совершенной раскраски графа является весьма популярным объектом исследования в теории кодирования и криптографии. До последнего времени список конструкций совершенных раскрасок гиперкуба в 2 цвета исчерпывался тривиальными сериями и одним спорадическим примером Таранникова в 6-й размерности. Фон-дер-Флаасс рассматривает вопрос существования совершенных раскрасок в два цвета радиуса 1 гиперкубов с заданными параметрами. Он доказал ряд необходимых условий на матрицу параметров совершенных раскрасок гиперкуба и построил рекурсивную конструкцию таких раскрасок, дающую бесконечную серию совершенных раскрасок, раскраски с ранее не встречавшимися параметрами, и, в частности, все множества параметров, для которых такие раскраски были ранее известны [27]. Совершенные раскраски также имеют приложение в криптографии: самое сильное необходимое условие существования совершенных раскрасок в булевом кубе получено с помощью новой оценки на корреляционную иммунность непостоянных несбалансированных булевых функций, установлена связь между корреляционно-иммунными функциями, достигающими новой границы корреляционной иммунности, и совершенными раскрасками [9]. Полного описания всех матриц совершенных раскрасок гиперкуба пока не найдено даже для случая двух цветов.

Другим обобщением совершенных кодов, исследуемым в диссертации, являются центрированные функции. Действительнозначная функция на вершинах графа называется *центрированной радиуса r* , если сумма ее значений в любом шаре радиуса r равна 0. Пусть множество значений некоторой центрированной функции радиуса 1 в n -мерном кубе состоит из двух чисел: n и -1 . Легко видеть, что вершины, в которых функция принимает значение n , образуют совершенный код с расстоянием три. Это означает, что задача классификации совершенных раскрасок и центрированных функций не может быть проще, чем задача классификации совершенных кодов, которая остается нерешенной уже несколько десятилетий.

Совершенная раскраска графа тесно связана со структурой группы автоморфизмов графа. Основным способом построения совершенных раскрасок (в произвольных графах) является так называемый орбитный метод, суть которого выражается в следующем факте (см., например, [28]). Пусть G — произвольный обыкновенный граф с группой автоморфизмов H и H' — некоторая подгруппа группы H . Относительно H' множество вершин графа G разбивается на орбиты. Раскрашивая каждую из орбит своим цветом, получим совершенную раскраску графа G . В [10], [11] Годсил использует совершенные раскраски (equitable partitions) для изучения схем отношений и групп автоморфизмов графов. О группе автоморфизмов графа можно сделать некоторые выводы по собственным значениям и собственным векторам графа, которые связаны с собственными значениями матрицы совершенной раскраски следующим образом: характеристический многочлен матрицы совершенной раскраски делит характеристический многочлен матрицы смежности графа [28].

Ранее изучались совершенные раскраски в два цвета некоторых графов и семейств графов: n -мерного двоичного куба [27], графа бесконечной прямоугольной решетки [3], плоских триангуляций минимальной степени пять [19], графа Джонсона [25].

Голомб и Уэлш рассматривали совершенные коды в $\mathbb{Z}^n$ [12]. Они доказали, что для всякой длины n существуют совершенные коды, исправляющие одну ошибку, в метрике Ли. Такие коды могут рассматриваться либо как регулярные периодические замощения евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ сферами Ли радиуса 1 или как периодические замощения решетки $\mathbb{Z}^n$ шарами радиуса 1. Также рассматривались совершенные коды радиусов больше 1 и были получены некоторые результаты о несуществовании таких кодов.

Задача исследования центрированных функций и совершенных раскрасок на бесконечных транзитивных решетках также связана с теорией двумерных слов. Центрированные функции и совершенные раскраски могут рассматриваться как двумерные

слова над конечным алфавитом слов и значений функции соответственно. В диссертации вводится понятие R -продолжаемого слова и используется для доказательства периодичности центрированных функций и совершенных раскрасок. Этот метод или его модификации могут быть использованы для изучения периодичности других двумерных слов. Периодичность двумерных слов ранее уже изучалась. Следующая гипотеза о связи комбинаторной сложности и периодичности известна как гипотеза Нива (Nivat's conjecture) [13]: если существует пара целых чисел (n, m) , такая что функция комбинаторной сложности $p_w(n, m)$ двумерного слова w удовлетворяет условию $p_w(n, m) \leq mn$, то w имеет по крайней мере один вектор периодичности. Слабые формы этой гипотезы для $p_w(n, m) \leq mn/144$ и для $p_w(n, m) \leq mn/16$ были доказаны в [8] и [16], соответственно.

Первая глава диссертации посвящена периодичности совершенных раскрасок радиуса 1 плоской бесконечной прямоугольной решетки.

Основной результат этой главы сформулирован в теореме 1, в которой утверждается, что для любой допустимой матрицы радиуса 1 существует периодическая совершенная раскраска. Матрица называется допустимой, если существует совершенная раскраска бесконечной прямоугольной решетки с такой матрицей. Для того, чтобы доказать эту теорему, предварительно доказываются восемь вспомогательных предложений (предложения 1-8). Кроме того, доказано, что периодическая раскраска может быть получена из непериодической специальными операциями, называемыми сдвигами бинарных диагоналей. Бинарная диагональ — это диагональ, состоящая из двух чередующихся цветов, под сдвигом бинарной диагонали подразумевается перестановка цветов внутри диагонали. В случае существования непериодической совершенной раскраски с данной матрицей для этой матрицы существует бесконечное число (континуум) совершенных раскрасок. Метод получения периодических раскрасок сдвигами бинарных диагоналей согласуется с известным в теории кодирования методом свитчинга, используемого для получения новых кодов из известных ра-

нее. Основная идея метода свитчинга состоит в следующем: в произвольном двоичном коде C длины n рассмотрим некоторое подмножество M кодовых слов. Если найдется в E^n подмножество M' , отличное от множества M , причем множество $C' = (C \setminus M) \cup M'$ является двоичным кодом с теми же параметрами, что и у кода C , то будем говорить, что код C' получен из кода C *свитчингом* множества M , см. [18]. Впервые свитчинговый способ построения 1-совершенных кодов был предложен Васильевым [21]. Далее свитчинговый метод развивался в работах Моллара, Августиновича и Соловьевой [1], [2], Малогиной [24], Кротова [23].

В качестве следствия из Теоремы 1 получается, что для любой совершенной раскраски бесконечной прямоугольной решетки существует совершенная раскраска некоторого тороидального графа (Следствие 1). Отсюда вытекает, что мы можем использовать свойства совершенных раскрасок конечных графов для доказательства недопустимости матриц.

Граф бесконечной прямоугольной решетки является очень популярным объектом при изучении различных комбинаторных конструкций, в частности, упаковок, покрытий и замощений [17, 14]. Довольно часто при этом возникают следующий вопрос: если некоторая конструкция на графе $G(\mathbb{Z}^2)$ существует, то следует ли отсюда существование конструкции с теми же параметрами, обладающей свойством периодичности? Ответ на этот вопрос не всегда оказывается положительным. Например, в работах [17] и [14] рассматривались замощения плоскости плитками. Оказалось, что для некоторого набора плиток замощение существует, но все такие замощения оказываются непериодическими.

Во **второй главе** диссертации описываются параметры совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки в три цвета.

Ранее в [3] Аксенович перечислила все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиуса 1 в 2 цвета. Основным результатом второй главы диссертации является Теорема 2, в кото-

рой утверждается, что всякая совершенная раскраска радиуса 1 бесконечной плоской прямоугольной решетки в три цвета имеет одну из перечисленных в этой теореме матриц (с точностью до перестановки строк и столбцов, соответствующей некоторому переобозначению цветов). Таких матриц оказалось 21. Для каждой матрицы приведены примеры соответствующих раскрасок. Матрица совершенной раскраски называется допустимой, если существует совершенная раскраска бесконечной прямоугольной решетки с этой матрицей. Из 21 допустимой матрицы для пять матриц порождают непериодические совершенные раскраски.

Для доказательства Теоремы 2 было доказано 12 предложений о необходимых условиях допустимости матрицы, которые имеют самостоятельную ценность, так как выполняются для произвольного числа цветов, а некоторые не только для бесконечной прямоугольной решетки, но и для других широких классов графов.

В **третьей главе** рассматриваются совершенные раскраски радиуса больше 1 на бесконечной прямоугольной решетке.

Доказано, что любая совершенная раскраска радиуса $r > 1$ является периодической (Теорема 3), в отличие от случая $r = 1$, в котором существуют также непериодические раскраски. Получена верхняя граница на период, то есть по существу доказана конечность числа совершенных раскрасок фиксированного радиуса больше 1. Приведены некоторые конструкции и примеры совершенных раскрасок произвольных графов и графа бесконечной прямоугольной решетки. Найден общий способ получения всех совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки заданного радиуса, большего 1, в заданное число цветов. Для доказательства периодичности используется метод R -продолжаемых слов, который заключается в следующем. Будем говорить, что двумерное слово ω является R -продолжаемым, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$ равенство $\omega|_{B_R(\mathbf{x})} = \omega|_{B_R(\mathbf{z})}$ влечет $\omega|_{B_{R+1}(\mathbf{x})} = \omega|_{B_{R+1}(\mathbf{z})}$. Здесь равенство $\omega|_{B_R(\mathbf{x})} = \omega|_{B_R(\mathbf{z})}$ означает, что $\omega(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{z} + \mathbf{y})$ для любых $\mathbf{y}$, таких что $\|\mathbf{y}\| \leq R$. Лемма 2 гласит, что если двумерное слово ω над ко-

нечным алфавитом является R -продолжаемым для некоторого $R \geq 0$, то ω периодическое. Таким образом, вместо периодичности можно доказывать R -продолжаемость для некоторого R ; в некоторых случаях это оказывается удобным.

Четвертая глава посвящена центрированным и квазицентрированным функциям.

Метод R -продолжаемых слов оказался полезным при доказательстве следующего результата: любая ограниченная целочисленная центрированная функция любого радиуса на $G(\mathbb{Z}^2)$ является периодической (теорема 4). Функция на вершинах графа называется квазицентрированной радиуса r , если сумма ее значений по любой сфере радиуса r равна нулю. Доказано, что квазицентрированные функции четного радиуса периодические, для нечетных радиусов существуют как периодические, так и непериодические квазицентрированные функции (теорема 5). В разделе 4.2 приведены конструкции непериодических центрированных функций радиуса 1 в $G(\mathbb{Z}^n)$ (лемма 3). Аналогичные результаты получены для бесконечной треугольной и гексагональной решеток (теоремы 6, 7, 8).

В заключении приводится перечень основных результатов диссертации и некоторые нерешенные проблемы.

Список литературы

- [1] Avgustinovich S. V., Solov'eva F. I. Construction of perfect binary codes by sequential translations of the i -components, Proc. of Fifth Int. Workshop on Algebraic and Comb. Coding Theory. Sozopol, Bulgaria. June (1996) 9-14.
- [2] Avgustinovich S. V., Solov'eva F. I. Construction of perfect binary codes by sequential translations of an α -components, // Problems of Inform. Transm. 33 (3) (1997) 202-207.
- [3] Axenovich M. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius. // Discrete Mathematics, 268 2003, p. 31–49.

- [4] Brouwer A. E. A note on completely regular codes. // Discrete mathematics, 1990, V. 82, P. 115-117.
- [5] Berthe V., Vuillon L. Tilings and rotations: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences // Discrete Math., 223 (2000), p. 27-53.
- [6] Camion P., Courteau B., Delsarte Ph. On r -partition designs in Hamming spaces // Appl. Algebra in Engrg., Comm. Compt. (AAECC). 1992. V. 2. P. 147-162.
- [7] Delsarte P. An algebraic approach to the association schemes of coding theory // Philips Research Reports Supplements, Vol. 10, 1973.
- [8] Epifanio C., Koskas M., Mignosi F. On a conjecture on bidimensional words // Theoretical Computer Science, v.299 n.1-3, p.123-150, 2003.
- [9] Fon-Der-Flaass D.G. A bound on correlation immunity // Siberian Electronic Mathematical Reports 4 (2007) 133-135.
- [10] Godsil C. Equitable partitions. // Combinatorics, Paul Erdős is Eighty Vol. 1. Budapest , 1993. P. 173-192.
- [11] Godsil C. D., Martin W. J. Quotients of association schemes // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 69, N 2. P. 185-199.
- [12] Golomb W., Welch L. R. Perfect codes in the Lee metric and the packing of polyominoes // SIAM J. Appl. Math. 18 (1970) 302-317.
- [13] Nivat M., Invited talk at ICALP'97.
- [14] Penrose R. The role of aesthetics in pure and applied mathematical reserch. // Bull. Inst. Math. Appl. 1974. V. 10. P. 266-271.
- [15] Preparata F. P. A Class of optimum nonlinear double-error-correcting codes // Inform. and Control. 1968. V. 13, N 5. P. 378-400.

- [16] Quas A., Zamboni L. Periodicity and local complexity // Theoretical Computer Science, v. 319, Issue 1-3, p. 229 - 240, 2004.
- [17] Robinson R. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. // Inventiones Math. 1971. V. 12. P. 177–209.
- [18] Solov'eva F. I. On perfect codes and related topics // Com2Mac Lecture Note Series 13, Pohang 2004.
- [19] Августинovich С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э. Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5. // Дискретный анализ и исследование операций. 2001. Т.8, № 3. С. 3–16.
- [20] Августинovich С. В., Васильева А. Ю. Восстановление центрированной функции по ее значениям на двух средних слоях гиперкуба // Дискр. анализ и исслед. операций, Т. 10, N. 2, 2003, P.3–16.
- [21] Васильев Ю. Л. О негрупповых кодах // Проблемы кибернетики. М, Наука, 1962. Вып. 8. С. 337-339.
- [22] Визинг В. Г. Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 3–12.
- [23] Кротов Д. С. Нижние границы на число m -квазигрупп порядка 4 и число совершенных двоичных кодов, // Дискр. анализ и исслед. опер., 1 (7) 2 (2000) 47–53.
- [24] Малюгин С. А. О нижней границе на число совершенных двоичных кодов // Дискр. анализ и исслед. опер., 1 (6) 4 (1999) 44–48.
- [25] Могильных И. Ю. О регулярности совершенных раскрасок графа Джонсона в два цвета // Проблемы передачи информации, 2007, т. 43, вып. 4, с. 37–44.

- [26] Семаков Н. В., Зайцев Г. В., Зиновьев В. А. Равномерно упакованные коды // Проблемы передачи информации, том VII, Вып.1, 1971, стр. 38–50.
- [27] Фон-Дер-Флаасс Д. Г. Совершенные 2-раскраски гиперкуба. // Сиб. мат. журнал, 48:4 (2007), 923–930.
- [28] Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Киев, Наукова думка, 1984. С. 121–138.

Публикации автора по теме диссертации

- [29] Puzynina S. A. Perfect colorings of the infinite rectangular grid // Bayreuther Mathematischen Schriften, Heft 74, 2005, p. 317-331.
- [30] Puzynina S. A., Avgustinovich S. V. On periodicity of two-dimensional words // CANT2006: EMS Summer School, International School and Conference on Combinatorics, Automata and Number Theory, Preproceedings.
- [31] Puzynina S. A., Avgustinovich S. V. On periodicity of two-dimensional words, Theoretical Computer Science 391 (2008), p. 178-187.
- [32] Пузынина С. А. Периодичность совершенных раскрасок радиуса $r > 1$ бесконечной прямоугольной решетки, Материалы VI молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16-21 апреля 2007г.). Часть II. Под редакцией А.В.Чашкина. 2007. С.29-35
- [33] Пузынина С. А. Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004 Т. 11, №1. С. 79-92.
- [34] Пузынина С. А. Совершенные раскраски вершин графа $G(Z^2)$ в три цвета. //Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2005 Т. 12, №1. С. 37-54.

- [35] Пузынина С. А. Совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки. Труды VI международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем", 2004, с. 209.
- [36] Puzynina S. A. On perfect colorings of the infinite rectangular grid. Материалы российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций", 2004, с. 97.
- [37] Пузынина С. А. Обзор по совершенным раскраскам и другим обобщениям совершенных кодов на бесконечных транзитивных решетках. // Материалы международной конференции "Математика в современном мире", 2007, с. 279-280.

Пузынина Светлана Александровна

Совершенные раскраски бесконечной
прямоугольной решетки

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 02.04.2008. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,1. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 59.

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
630090 Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6.