На правах рукописи

ПОЖИДАЕВ Александр Петрович

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ЛИЕВА ТИПА

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 2010

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Шестаков Иван Павлович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Михалев Александр Александрович

доктор физико-математических наук, профессор
Пчелинцев Сергей Валентинович

доктор физико-математических наук
Сверчков Сергей Робертович

Ведущая организация:

Омский государственный университет

Защита диссертации состоится «17» июня 2010 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «__» мая 2010 г.

Учёный секретарь диссертационного совета Д.003.015.02

кандидат физико-математических наук А.Н.Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Данная работа посвящена изучению различных (но взаимосвязанных) классов алгебраических систем. Однако центральными объектами в ней являются некоммутативные йордановы и структуризуемые супералгебры, диалгебры, супералгебры Филиппова, а также n-арные алгебры Мальцева. Основные вопросы об этих системах, исследуемые в данной работе, — это вопросы простоты и специальности.

Проблема классификации простых алгебраических систем является одной из основных проблем в их структурной теории. Конечномерные простые ассоциативные супералгебры были классифицированы ещё в 1964 г. в работе С.Т.С.Волл [44]. Супералгебры Ли и йордановы супералгебры являются объектами, наиболее близкими к ассоциативным супералгебрам. Конечномерные простые супералгебры Ли характеристики 0 были классифицированы В.Кацем в 1977 г. [25]. Случай конечномерных простых йордановых супералгебр над алгебраически замкнутыми полями характеристики ноль был рассмотрен В.Кацем [26] и И.Кантором [2]. Изучение йордановых супералгебр положительной характеристики было инициировано И.Капланским. М.Расин и Е.Зельманов [37] классифицировали конечномерные простые йордановы супералгебры характеристики $\neq 2$ с полупростой чётной частью, а К.Мартинез и Е.Зельманов рассмотрели оставшийся случай, когда чётная часть не является полупростой [34]. Йордановы супералгебры тесно связаны с альтернативными и $(-1,1)$-супералгебрами. Для многообразий альтернативных супералгебр эта проблема была решена в работах И.П.Шестакова и Е.И.Зельманова [1, 13], а для $(-1,1)$-супералгебр и супералгебр Мальцева (обобщающих супералгебры Ли) — в работах И.П.Шестакова [12, 14].

Обобщением класса йордановых супералгебр являются классы некоммутативных йордановых супералгебр и структуризуемых супералгебр. В случае алгебр, класс структуризуемых алгебр пересекается, в частности, по классу йордановых алгебр с классом некоммутативных йордановых алгебр, введённым А.А.Албертом в 1948 г. [16]. Класс некоммутативных йордановых алгебр чрезвычайно обширен — кроме (коммутативных) йордановых алгебр он содержит также, например, все альтернативные и квазиассоциативные алгебры, эластичные квадратичные алгебры, а также антикоммутативные алгебры. Проблема классификации простых конечномерных некоммутативных йордановых алгебр, в некотором смысле, была решена Р.Шейфером [38] в случае характеристики 0, Р.Оемке [36] для эластичных алгебр со строго ассоциативными степенями в характеристике $\neq 2, 3$, К.МакКриммоном для некоммутативных йордановых алгебр степени > 2 [32, 33] и К.Смитом для степени два [41]; случай нодальных простых таких алгебр положительной характеристики в основном рассматривался Л.Кокорисом [27, 28]. Строго первичные некоммутативные йордановы алгебры описаны В.Г.Скосырским [7].

В суперслучае известна следующая

Проблема 1. Описать простые конечномерные супералгебры в классе некоммутативных йордановых супералгебр (не являющихся суперантикоммутативными) [11, Проблема 3.100 а)].

Хорошо известна и чрезвычайно полезна конструкция Титса-Кёхера-Кантора (ТКК), позволяющая по йордановой алгебре построить 3-градуированную алгебру Ли: если $\mathcal{A}$ — йорданова алгебра, то $Str(\mathcal{A}) = L_{\mathcal{A}} \oplus Der(\mathcal{A})$ образует алгебру Ли, называемую структурной алгеброй для $\mathcal{A}$, где L_a обозначает оператор левого умножения на a из $\mathcal{A}$ и $Der(\mathcal{A})$ — алгебра дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$. Конструкция Титса-Кёхера-Кантора наделяет векторное пространство $K(\mathcal{A}) = \tilde{\mathcal{A}} \oplus Str(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{A}$ структурой алгебры Ли, где $\tilde{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия $\mathcal{A}$. Свойства $K(\mathcal{A})$ тесно связаны со свойствами $\mathcal{A}$. ТКК-конструкция была применена, в частности, В.Г.Кацем при классификации простых конечномерных йордановых супералгебр характеристики 0 [26].

Б.Аллисон в 1978 г. [17] определил класс неассоциативных алгебр, содержащий класс йордановых алгебр и допускающий конструкцию структурной алгебры и конструкцию Титса-Кёхера-Кантора (конструкция Аллисона). Алгебры из этого класса, называемые *структуризуемыми*, являются унитальными алгебрами с инволюцией. Этот класс определяется тождеством степени 4 и включает альтернативные алгебры с инволюцией, йордановы алгебры (с тождественной инволюцией), тензорное произведение двух композиционных алгебр, 56-мерный модуль Фрейденталя для алгебры Ли E_7 с естественным бинарным произведением, и алгебры, строящиеся из эрмитовых форм способом, который является некоторым обобщением обычной конструкции йордановых алгебр квадратичных форм.

Однако, ещё в 1972 году И.Кантор обобщил ТКК-конструкцию, распространив её на более широкий класс алгебр, которые он назвал *консервативными*. Конструкция Кантора ставит в соответствие консервативной алгебре градуированную алгебру Ли. Говорят, что консервативная алгебра имеет *второй порядок*, если её алгебра Ли является $(-2, 2)$-градуированной. В той же самой статье И.Кантор классифицировал конечномерные простые консервативные алгебры второго порядка над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Существует взаимно однозначное соответствие между классом консервативных алгебр второго порядка с левой единицей и классом структуризуемых алгебр. При этом соответствии конструкция Кантора для консервативных алгебр переходит в конструкцию Аллисона для структуризуемых алгебр.

Алгебры Ли, получаемые из центральных простых структуризуемых алгебр при помощи конструкции Аллисона–Кантора, содержат все конечномерные центральные простые алгебры Ли над полем характеристики ноль, имеющие ненулевой ad-нильпотентный элемент.

Центральные простые конечномерные структуризуемые алгебры над полем характеристики ноль были классифицированы Б.Аллисоном [17]. Классификация простых конечномерных структуризуемых алгебр над полем ненулевой характеристики была получена О.Н.Смирновым [8]. Более того, при решении данной проблемы им был найден класс простых структуризуемых алгебр характеристики ноль, пропущенный Б.Аллисоном. В суперслучае известна

Проблема 2. Описать простые конечномерные супералгебры в классе структуризуемых супералгебр [11, Проблема 3.100 в)].

Простые структуризуемые супералгебры классического типа проклассифицировал недавно Дж.Фолкнер [23].

Понятие универсальной обёртывающей ассоциативной алгебры играет важную роль в теории алгебр Ли. Основное значение универсальной обёртывающей алгебры $U(L)$ состоит в возможности сведения теории представлений алгебры L к теории представлений алгебры $U(L)$. Более общо, функторы из одной алгебраической системы в другую играют важнейшую роль в математике. Примеров таких функторов очень много: стандартный функтор (коммутатор: $ab - ba$) из категории ассоциативных алгебр в категорию алгебр Ли; йорданово произведение $(ab + ba)$ — функтор из категории ассоциативных алгебр в категорию йордановых алгебр; конструкция Титса-Кёхера-Кантора — функтор из категории йордановых алгебр в категорию алгебр Ли и т.д. По теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта для любой алгебры Ли L существует ассоциативная алгебра A такая, что L изоморфна некоторой подалгебре алгебры Ли $A^{(-)}$. Мы приходим к так называемой проблеме специальности: если τ — функтор из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$ и $B \in \mathcal{B}$, то всегда ли существует объект $A \in \mathcal{A}$ такой, что B является подсистемой в $\tau(A)$? Положительный ответ на этот вопрос даётся известной теоремой Пуанкаре-Биркгофа-Витта для функтора коммутирования из категории ассоциативных алгебр в категорию алгебр Ли. Для функтора "йорданово произведение" из категории ассоциативных алгебр в категорию йордановых алгебр ответ оказывается уже отрицательным (контрпример: йорданова алгебра Алберта). Вопросы специальности изучены также для супералгебр Ли и йордановых супералгебр; более того, в лиевом случае эти вопросы изучены даже для ограниченных супералгебр Ли [5]. А в случае, например, алгебр Мальцева этот вопрос до сих пор остается открытым — известно положительное решение для полупервичных алгебр Мальцева и некоторых других подклассов, например, метабелевых [6] (обзор по "специальности" можно найти в [39, 40]).

Ж.-Л.Лодэй нашел универсальную обёртывающую для алгебры Лейбница [30]. Роль таких обёртывающих играют ассоциативные диалгебры — алгебраические системы с двумя ассоциативными операциями согласованными между собой. П.С.Колесниковым недавно было показано, что любая ассоциативная диалгебра в свою очередь может быть получена из некоторой ассоциативной конформной алгебры [3], в этой же работе П.С.Колесников ввёл понятие многообразия диалгебр. М.Агуиар [15] в 2000 г. впервые установил функториальную связь между алгебрами Рота-Бакстера и дендриформными алгебрами и показал, что алгебра Рота-Бакстера веса $\lambda = 0$ имеет структуру дендриформной алгебры. Далее связь с дендриформными триалгебрами была установлена в работе [21]. Функторы между категориями алгебр Рота-Бакстера и категориями дендриформных диалгебр и триалгебр были исследованы в [24]. Функтор между классом триалгебр и классом тернарных алгебр Лейбница был найден в работе [19].

Вопрос о нахождении надлежащего обобщения алгебр Ли на случай n-арной операции был поставлен ещё А.Г.Курошем в 1969 г. В качестве возможного такого обобщения он предлагал n-арную операцию, заданную на ассоциативной алгебре правилом:

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma 1} \ldots x_{\sigma n}.$$

Однако свойства таких алгебр несколько далеки от свойств алгебр Ли.

Более удачное обобщение было сделано В.Т.Филипповым в 1984 г. [9], где n-арная операция $[\cdot,\ldots,\cdot]$ предполагается кососимметричной по всем аргументам и такой, что операторы правого умножения являются дифференцированиями:

$$[\,[x_1,\ldots,x_n],y_2,\ldots,y_n] = \sum_{i=1}^{n}[\,x_1,\ldots,[\,x_i,y_2,\ldots,y_n],\ldots,x_n].$$

Данные n-арные алгебры были названы им n-лиевыми алгебрами, а в настоящее время они носят название алгебр Филиппова. Удачность данного обобщения подтверждается тем, что впоследствии эти алгебры возникали независимо в работах многих математиков и физиков. Мы упомянем два таких случая: 1) при $n = 3$ они (под названием — кососимметричные тройные системы) появились в работе Дж.Фолкнера [22] в 1985 г. при классификации тождеств в тройных системах; 2) под названием Намбу-Лиевы "гебры" (алгебры) они появились в статье Л.А.Тахтаджяна [43] в 1994 г. — в этот раз источником их возникновения стала механика Намбу, предложенная Й.Намбу [35] как обобщение Гамильтоновой механики.

Класс алгебр Филиппова содержит такие объекты как векторную алгебру $(n+1)$-мерного пространства и алгебру якобианов ассоциативной коммутативной алгебры A над полем. Любая n-арная алгебра Филиппова определяет бесконечное семейство "производных" алгебр Филиппова арности $2 \le k < n$, включающее в себя семейство алгебр Ли. Также известна связь алгебр Филиппова с алгебрами Сейгла, а именно, ассоциированная тройная система алгебры Сейгла является тернарной алгеброй Филиппова, при этом простым алгебрам Сейгла соответствуют простые алгебры Филиппова.

По аналогии с алгебрами Ли, возникает естественный вопрос о существовании n-арных систем, играющих роль универсальных обёртывающих для алгебр Филиппова. Вопрос об обёртывающих алгебрах для 3-лиевых алгебр был поднят В.Т.Филипповым уже в 1988 г. [10]. Можно отметить, что подобный вопрос интересовал и А.Г.Куроша (см. выше).

Как отмечалось выше, одна из важнейших проблем для алгебр Филиппова состоит в классификации простых таких конечномерных алгебр. Первые примеры простых конечномерных n-лиевых алгебр характеристики 0 были построены В.Т.Филипповым в 1984 г. Над алгебраически замкнутым полем любая $(n+1)$-мерная простая такая алгебра изоморфна A_{n+1} с базисом $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ и таблицей умножения: $[e_1,\ldots,\overset{\wedge}{e_i},\ldots,e_{n+1}] = (-1)^{n+1+i}e_i$. В 1993 г. У.Лин [29] доказал, что с точностью до изоморфизма простая конечномерная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 только одна — алгебра A_{n+1}. Однако аналогичная проблема в модулярном случае (характеристики $p > 0$) до сих пор открыта и является довольно сложной: как подтверждение этого служит тот факт, что полная классификация простых конечномерных алгебр Ли характеристики $p > 3$ над алгебраически замкнутым полем была получена совсем недавно. В теории модулярных алгебр Филиппова пока есть только некоторые серии простых таких алгебр, которые были построены в работах автора [49]. Дальнейшее развитие теория таких алгебр получила в работах автора [45, 46, 47, 48].

Теории модулярных алгебр и супералгебр характеристики 0 имеют между собой очень много похожего. Понятие n-арной супералгебры Филиппова было введено в [20] под именем супералгебры Намбу. Однако до сих неизвестно ни одного нетривиального примера простой такой супералгебры. И.П.Шестаковым была поставлена следующая

Проблема 3. Классифицировать простые конечномерные супералгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Простейшие подслучаи данной проблемы — это случай тривиальной нечётной части супералгебры (алгебры Филиппова) и случай тривиальной чётной части супералгебры:

Проблема 4. Классифицировать простые конечномерные коммутативные n-арные алгебры Лейбница над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Вопрос о нахождении надлежащего обобщения других классов алгебр на n-арный случай также привлекает большое внимание. Так, множество попыток было сделано в направлении обобщения ассоциативных алгебр на случай n-арной операции. Наиболее известные такие обобщения — это ассоциативные пары и классически ассоциативные тройные системы. В неассоциативном случае — это альтернативные и йордановы пары и тройные ситемы.

Общие лиевы тройные системы, близкие к алгебрам Филиппова, играют важную роль в современной дифференциальной геометрии и используются, например, при изучении некоторых обобщений симметрических пространств. Неассоциативные n-арные алгебры возникают в математической биологии [42]. Тройные системы служат, в частности, для построения и изучения простых бинарных алгебр. Так, Е.Н.Кузьмин применил теорию тройных лиевых систем к изучению простых алгебр Мальцева [4]. С.Окубо применил алгебры Филиппова для нахождения новых решений уравнения Янга-Бакстера. Различные тройные системы применяются для реализации исключительных простых алгебр Ли.

Основные результаты диссертации.

1. Получена (совместно с И.П.Шестаковым) классификация простых конечномерных некоммутативных йордановых супералгебр степени > 2 над полем характеристики 0. Доказан аналог теоремы Р.Оемке и координатизационная теорема для некоммутативных йордановых супералгебр.

2. Построены четыре серии простых структуризуемых супералгебр. Классифицированы (совместно с И.П.Шестаковым) простые конечномерные структуризуемые супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

3. Введено понятие n-арной алгебры Лейбница и доказана разрешимость (см. определение ниже) таких конечномерных коммутативных n-арных алгебр характеристики 0, что является частным случаем классификации простых супералгебр Филиппова.

4. Введено понятие n-арной алгебры Мальцева и дана характеризация алгебр векторного произведения в терминах n-арных алгебр Мальцева.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, изложенные в диссертации, имеют теоретическое значение и закладывают основы для дальнейшего построения структурной теории конечномерных некоммутативных йордановых и структуризуемых супералгебр, диалгебр, а также супералгебр Филиппова и n-арных алгебр Мальцева. Результаты полезны для дальнейшего изучения самых разнообразных алгебраических систем, в частности, sp-алгебр различных многообразий и n-арных алгебр. Результаты диссертации могут найти свое применение в дифференциальной геометрии, механике Намбу и при изучении многообразий Намбу-Пуассона, а также могут быть использованы для проведения спецкурсов по близким тематикам в высших учебных заведениях России.

Методы исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры, комбинаторной алгебры и теории неассоциативных колец, в частности, (супер)алгебр Ли и их представлений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международной алгебраической конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2002, 2004, 2007, 2009; в том числе — два пленарных доклада); на международной конференции "Алгебры Ли и йордановы алгебры, их представления и приложения", Бразилия (2002, 2009 — пленарный); также приглашенные доклады были сделаны на конференциях: Международная алгебраическая конференция, посвящённая столетию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, 2005, Екатеринбург; "Второй международный конгресс по алгебре и комбинаторике", посвящён 70-летию Л.А.Бокутя, Китай, 2007; Вторая международная научная конференция "Финслеровы обобщения теории относительности" Египет, 2006; доклады на конференциях: "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение", приурочена к 85-летию академика Л.В.Овсянникова, Новосибирск, 2004; "Модули и комодули", посвящена Р.Висбауэру, Португалия, 2006; "Пограничные вопросы универсальной алгебры", Эрлагол, 2007; "Алгебра и её приложения", посвящена 75-летию профессора В.П.Шункова, Красноярск, 2007. Результаты также неоднократно докладывались на научных семинарах им. А.И.Ширшова "Теория колец" (ИМ СО РАН) и "Алгебра и логика" (НГУ), а также на семинарах "Алгебры Ли и йордановы алгебры и их представления" (Университет Сан-Пауло, Бразилия), "Групповой анализ дифференциальных уравнений" (ИГиЛ СО РАН) и "Общеинститутский математический семинар" (ИМ СО РАН).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в форме статей в ведущих отечественных и зарубежных журналах [51],[53]-[59],[63],[66]-[68], входящих в список ВАК ведущих рецензируемых научных изданий и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора наук. Список всех работ автора по теме диссертации приведён в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, списка обозначений, предметного указателя и списка литературы. Список литературы содержит 127 наименований. Диссертация изложена на 230 страницах текста, набранного на компьютере в редакционно-издательской системе $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Содержание диссертации.

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Нумерация всех утверждений тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая — номер параграфа, а третья — порядковый номер результата. Нумерация формул двойная: первая цифра — номер главы, вторая — порядковый номер внутри главы.

Введение

Во введении формулируется постановка задачи, обосновывается актуальность проблематики, приводится общая характеристика и формулировка результатов, даются некоторые обозначения.

Глава 1. Некоммутативные йордановы супералгебры

Супералгебра $U = U_0 \oplus U_1$ называется *некоммутативной йордановой супералгеброй*, если в U выполняются следующие операторные тождества:

$$[R_{x\circ y}, L_z] + (-1)^{x(y+z)}[R_{y\circ z}, L_x] + (-1)^{z(x+y)}[R_{z\circ x}, L_y] = 0,$$
$$[R_x, L_y] = [L_x, R_y],$$

где $x, y, z \in U_0 \cup U_1$, $(-1)^{xy}$ означает $(-1)^{p(x)p(y)}$, а $p(x)$ — чётность x, т.е. $p(x) = i$, если $x \in U_{\bar{i}}$.

В первой главе мы, во-первых, доказываем аналог координатизационной теоремы К.МакКриммона [32]:

Теорема 1.1.13. *Если U — строго некоммутативная йорданова супералгебра с $n \geq 3$ связанными ортогональными идемпотентами, то $U = \mathcal{D}_n^{(\lambda)}$ — расщепляемая квазиассоциативная супералгебра, определённая супералгеброй $\mathcal{D}_n$ матриц порядка $n \times n$ над ассоциативной супералгеброй $\mathcal{D}$.*

В доказательстве мы используем некоторые деформации супералгебры и основного поля с целью сведения теоремы к специальному случаю, когда “индикатор” ϕ равен $\frac{1}{4}$ или 0, а затем используем разложение Пирса, чтобы получить коммутативность или ассоциативность, соответственно.

В следующем параграфе мы рассматриваем проблему классификации простых конечномерных некоммутативных йордановых супералгебр.

Теорема 1.2.4. *Конечномерная центральная простая некоммутативная йорданова супералгебра характеристики* 0 *является одной из следующих*:

1) *степени* ≤ 2;
2) *квазиассоциативной супералгеброй*;
3) *йордановой супералгеброй.*

Далее мы доказываем аналог теоремы Р.Оемке в характеристике 0 [36]:

Теорема 1.3.7. *Пусть* U — *простая конечномерная некоммутативная йорданова супералгебра характеристики* 0 *и степени* > 1. *Тогда* $U^{(+)}$ *является простой.*

В заключительной части мы строим новые примеры простых некоммутативных йордановых супералгебр, а также даём описание некоммутативных йордановых супералгебр характеристики 0 и степени 2. По модулю некоторого "нодального" случая (супералгебры Грассмана Γ_n или супералгебры $\Gamma(n)$ скобок Пуассона-Грассмана), мы классифицируем центральные простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 (решение проблемы 1 в характеристике 0).

Теорема 1.5.1. *Пусть* U — *конечномерная центральная простая некоммутативная йорданова супералгебра над полем* Φ *характеристики* 0, *которая не является ни квазиассоциативной, ни суперкоммутативной. Тогда либо выполняется одно из следующих условий*:

i) $U \cong K_3^q, M_2^q, osp(1,2)^q, P(2)^q, Q(2)^q$;
ii) $U^{(+)} \cong \Gamma(n), \Gamma_n$,

либо существует расширение P *поля* Φ *степени 1 или 2 такое, что* $U \otimes_\Phi P$ *изоморфна как супералгебра над* P *одной из следующих супералгебр*:

iii) D_t^q;
iv) $U(V, f, \star)$.

Результаты первой главы получены в неразделимом соавторстве с И.П.Шестаковым и опубликованы в [65]-[67].

Глава 2. Структуризуемые супералгебры

Пусть $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ — унитальная супералгебра с суперинволюцией $^-$ над полем характеристики 0. Тогда $A = H \oplus S$, где $H = \{a \in A : \bar{a} = a\}$, $S = \{s \in A : \bar{s} = -s\}$. Супералгебра $(A, ^-)$ называется *структуризуемой*, если

$$[T_z, V_{x,y}] \quad = \quad V_{T_z(x),y} - (-1)^{xz} V_{x,T_{\bar{z}}(y)},$$

где

$$T_x(z) = xz + (-1)^{xz} z(x - \bar{x}),$$
$$V_{x,y}(z) = (x\bar{y})z + (-1)^{xy+xz+yz}(z\bar{y})x - (-1)^{xz+yz}(z\bar{x})y.$$

Как и в случае алгебр, супераналог конструкции Аллисона-Кантора связывает с каждой структуризуемой супералгеброй A некоторую простую супералгебру Ли, в зависимости от типа которой A называют супералгеброй *классического* или *картановского* типа. Простые структуризуемые супералгебры классического типа проклассифицировал недавно Дж.Фолкнер [23]. Во второй главе мы обобщаем ТКК-конструкцию на случай структуризуемых супералгебр, описываем простые супералгебры Ли, возникающие из унитальных структуризуемых супералгебр характеристики 0, строим четыре серии простых структуризуемых супералгебр $\mathcal{AW}(n), \mathcal{AS}(n), \mathcal{A}\tilde{\mathcal{S}}(n)$, $\mathcal{AH}(n)$ и классифицируем простые структуризуемые супералгебры картановского типа, что решает проблему 2 (в характеристике 0).

Теорема 2.4.2. *Пусть A — простая конечномерная структуризуемая супералгебра картановского типа над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0*, не являющаяся йордановой супералгеброй. Тогда чётная часть A является прямой суммой простой структуризуемой алгебры эрмитовой формы и разрешимого идеала, A обладает естественной фильтрацией, и A изоморфна одной из супералгебр $\mathcal{AW}(n), \mathcal{AS}(n), \mathcal{A}\tilde{\mathcal{S}}(n)$ или $\mathcal{AH}(n)$.*

Заметим, что используя доказательство теоремы 2.4.2, можно независимо получить и описание простых конечномерных структуризуемых супералгебр классического типа над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Результаты второй главы получены в неразделимом соавторстве с И.П.Шестаковым и опубликованы в [64, 68].

Глава 3. Диалгебры и sp-алгебры

Линейная алгебра Лейбница — это обычная алгебра с тождеством $(xy)z = (xz)y + x(yz)$. Класс алгебр Лейбница, обобщающий класс алгебр Ли, является довольно интересным, несмотря на отсутствие простых объектов (в классическом понимании) отличных от алгебр Ли. Ж.-Л.Лодэй нашел универсальную обёртывающую для алгебры Лейбница — роль таких обёртывающих играют ассоциативные диалгебры: 0-*диалгеброй* над полем F называется векторное пространство над F с двумя бинарными операциями $\dashv$ и $\vdash$ такими, что

$$(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \quad z \dashv (x \vdash y) = z \dashv (x \dashv y);$$

0-диалгебра с двумя ассоциативными бинарными операциями $\dashv$ и $\vdash$, связанными также аксиомой $(x \vdash y) \dashv z - x \vdash (y \dashv z) = 0$, называется ассоциативной диалгеброй.

Данная глава посвящена вопросам специальности.

В первом параграфе исследуется естественный вопрос о связи алгебр Рота-Бакстера и диалгебр с ассоциативной бар-единицей. Более того, такую связь удаётся установить для более широкого класса 0-диалгебр. Во втором параграфе, всвязи с результатами предыдущего параграфа, исследуется вопрос о том, всегда ли произвольную ассоциативную диалгебру можно вложить в ассоциативную диалгебру с бар-единицей e ($\forall x \models x \dashv e = x = e \vdash x$). До недавнего времени это был открытый вопрос. Мы даём положительный ответ на данный вопрос (а также и для альтернативных диалгебр). Отдельно рассматривается случай свободных ассоциативных диалгебр и близких к ним диалгебр, при этом доказательство (конструкция присоединения) несколько отличается от общего случая. В третьем параграфе мы рассматриваем понятие многообразия диалгебр в смысле П.С.Колесникова [3] и определяем эквивалентное понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга. Понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга позволяет определять не только классы диалгебр заданные тождествами. Например, можно определить класс структуризуемых диалгебр (тождества в них задаются на кососимметрических и симметрических элементах). В четвёртом параграфе мы обобщаем понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга до понятия многообразия Ω-алгебр с расщеплённым произведением в смысле Эйленберга (sp-алгебр), совпадающее с определением П.С.Колесникова в случае диалгебр. Это понятие позволяет ввести такие обобщения диалгебр, как, например, sp-алгебры Филиппова, sp-алгебры Бола и ассоциативные sp-пары.

В последнем параграфе мы обращаемся к не(анти)коммутативному аналогу алгебр Филиппова, n-арным алгебрам Лейбница [54, 31], и приводим различные классы алгебр, дающие тернарные алгебры Лейбница при помощи введения новой операции, связанной с исходной операцией алгебры. Во-вторых, мы рассматриваем некоторые алгебраические системы, приводящие к различным тройным системам, близким к ассоциативным. В качестве таких алгебраических систем мы берём некоторый класс алгебр, содержащий алгебры Лейбница-Пуассона, диалгебры, конформные алгебры и некоторые тройные системы. Мы описываем все однородные структуры тернарных алгебр Лейбница, возникающие на диалгебре. Для этого, в частности, мы используем структуру Лейбница-Пуассона на диалгебре. В качестве следствия мы находим структуру тройной лиевой системы на произвольной диалгебре, конформной ассоциативной алгебре и классически ассоциативной тройной системе. Также мы описываем на диалгебре все однородные структуры (ε, δ)-тройных систем Фрейденталя-Кантора.

Результаты третьей главы получены автором лично и опубликованы в [59, 62, 63].

Глава 4. Алгебры Филиппова

По аналогии с алгебрами Ли, возникает естественный вопрос о существовании n-арных систем, играющих роль обёртывающих алгебр для алгебр Филиппова. В данной главе, логически продолжающей предыдущую, исследуется вопрос существования таких n-арных систем. Мы рассматриваем тернарные алгебры, у которых редуцированные алгебры являются ассоциативными, ассоциативные алгебры и ещё два класса тернарных алгебр как возможные обёртывающие алгебры. В частности, строятся различные обёртывающие системы для полупростых тернарных (ключевой случай) алгебр Филиппова из работ [51, 53, 54, 55]. В заключение главы выделяется ещё один класс обёртывающих, который представляет отдельный интерес — это класс $\mathcal{A}$ тернарных алгебр, возникающий из кватернионов; при этом тернарная простая четырёхмерная алгебра Филиппова A_4 (аналог sl_2) возникает из $\mathcal{A}$ аналогично тому как sl_2 возникает из кватернионов. Мы изучаем тождества высоты ≤ 2 алгебры $\mathcal{A}$, благодаря чему строятся обёртывающие для тернарных алгебр Филиппова из ассоциативных тройных систем второго типа.

Результаты четвёртой главы получены автором лично и опубликованы в [53].

Глава 5. n-арные алгебры Лейбница

Легко видеть, что не существует простых алгебр Лейбница, которые не являются алгебрами Ли. Действительно, если L является простой алгеброй Лейбница, то $L \models (x(yz) = (xy)z - (xz)y)$ и идеал, порождённый антикоммутаторами, является левым аннулятором в L, что и доказывает требуемое. В случае n-арных алгебр Лейбница ситуация является более сложной. В этом случае мы используем теорию представлений алгебр Ли для получения аналогичного результата в характеристике 0 (решение проблемы 4):

Теорема 5.4.8. *Любая конечномерная n-арная коммутативная алгебра Лейбница над полем характеристики 0 является разрешимой.*

Напомним, что n-арная коммутативная алгебра Лейбница называется *разрешимой*, если $A^{(k)} = 0$ для некоторого $k \geq 1$, где $A^{(1)} = [A, \dots, A]$ и $A^{(i)} = [A^{(i-1)}, \dots, A^{(i-1)}]$ при $i > 1$.

Данная глава может быть рассмотрена как первый шаг на пути решения проблемы 3, поскольку n-арная коммутативная алгебра Лейбница является в точности n-арной супералгеброй Филиппова с тривиальной чётной частью.

В этой главе мы также получаем некоторые результаты об ID-алгебрах (алгебры, у которых все операторы умножения являются дифференцированиями), обобщающих алгебры Филиппова и коммутативные n-арные алгебры Лейбница. А именно, мы показываем, что алгебры Ли $Der(A)$ и $Inder(A)$ действуют неприводимо на простой ID-алгебре A; если A конечномерна над полем характеристики 0, то $Der(A) = Inder(A)$ и $Der(A)$ полупроста. Пусть Φ — поле характеристики 0; мы доказываем, что конечномерная ID-алгебра A над Φ полупроста тогда и только тогда, когда A является прямой суммой простых идеалов.

Результаты пятой главы получены автором лично и опубликованы в [54].

Глава 6. Супералгебры Филиппова

Результаты предыдущей главы сводят проблему описания простых супералгебр Филиппова к случаю нетривиальных чётной и нечётной частей. В шестой главе мы делаем следующий необходимый шаг для решения проблемы 3 — показываем, что задача классификации простых супералгебр Филиппова над полем F эквивалентна описанию следующих *хороших* троек (L, V, ad): L — полупростая супералгебра Ли над F, V — точный неприводимый L-модуль, ad — сюръективный L-модульный морфизм из $\wedge^{n-1}V$ на присоединенный модуль L, а отображение $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto ad(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})\, v_n$ из $\otimes^n V$ в V является $\mathbb{Z}_2$-кососимметричным. Таким образом, проблема описания простых n-арных супералгебр Филиппова над F сводится к проблеме нахождения хороших троек. Мы изучаем важный случай, когда супералгебра Ли умножений простой n-арной супералгебры Филиппова является супералгеброй Ли типа $B(m,n)$ и показываем, что в случае $L \cong B(m,n)$ хороших троек не существует.

В этой главе мы также приводим некоторые результаты о разрешимых и нильпотентных супералгебрах Филиппова. А именно, введя определения k-разрешимости и k-нильпотентности, доказываем, что существует k-разрешимый радикал $\mathcal{R}$ (и нильпотентный радикал $\mathcal{N}$) супералгебры Филиппова $\mathcal{F}$; более того, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$ инвариантны относительно дифференцирований $\mathcal{F}$, если $dim\, \mathcal{F} < \infty$; также мы доказываем теорему о полупростоте супералгебры Ли умножений простой конечномерной супералгебры Филиппова над полем характеристики 0.

Результаты шестой главы опубликованы в [55, 58, 60] и получены автором лично, за исключением результатов о $B(0,n)$ (случай нечётного порождающего), которые получены совместно с П.Сарайва.

Глава 7. n-арные алгебры Мальцева

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем Φ, на котором задана невырожденная симметрическая билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Предположим, что на V определена n-арная полилинейная операция $[\cdot, \ldots, \cdot]$, удовлетворяющая соотношениям:

1) $\langle [a_1, \ldots, a_n], a_i \rangle = 0$ для любых $a_i \in V,\ i = 1, \ldots, n$;

2) $\langle [a_1, \ldots, a_n], [a_1, \ldots, a_n] \rangle = det(\langle a_i, a_j \rangle)$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in V$.

В этом случае V называется n-арной алгеброй векторного произведения. Классификационная теорема n-арных алгебр векторного произведения утверждает, что при $n = 2$ единственно возможными алгебрами векторного произведения являются простая трёхмерная алгебра Ли $sl(2)$ и простая семимерная алгебра Мальцева C_7; а при $n \geq 3$ — это простые $(n+1)$-мерные алгебры векторного произведения A_{n+1} и исключительные восьмимерные тернарные алгебры M_8, возникающие на композиционных алгебрах [18].

В настоящей главе по аналогии с алгебрами Филиппова, которые являются естественным обобщением алгебр Ли на случай n-арной операции умножения, мы вводим понятие n-арной алгебры Мальцева и показываем, что исключительные алгебры векторного произведения являются тернарными центральными простыми алгебрами Мальцева, которые не являются тернарными алгебрами Филиппова, если характеристика основного поля отлична от 2 и 3. Далее мы находим внутренние дифференцирования алгебр M_8, показываем, что все дифференцирования алгебр M_8 внутренние, и строим корневое разложение алгебр M_8.

Класс n-арных алгебр Мальцева обладает также следующими интересными свойствами:

1) он является расширением класса n-арных алгебр Филиппова, т.е. любая n-арная алгебра Филиппова является n-арной алгеброй Мальцева (ср. с алгебрами Мальцева, когда любая алгебра Ли является алгеброй Мальцева);

2) при фиксировании любой компоненты в умножении, т.е. определяя новую производную операцию на векторном пространстве n-арной алгебры Мальцева A правилом $[x_1, \ldots, x_{n-1}] = [a, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, мы получаем $(n-1)$-арную алгебру Мальцева.

Таким образом, основной результат главы является следующим:

Теорема 7.3.5. *Пусть A — n-арная алгебра векторного произведения. Тогда A является центральной простой n-арной алгеброй Мальцева.*

Результаты седьмой главы опубликованы в [53], [56] и [57]. Результаты получены автором лично, за исключением результатов о дифференцированиях алгебр M_8, которые получены в неразделимом соавторстве с П.Сарайва.

Пользуясь случаем, я хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному консультанту профессору И.П.Шестакову за всестороннюю помощь в работе. Хотелось бы отметить его огромное влияние на меня как в математическом плане, так и в человеческом — его многосторонние знания и доброжелательность не перестают восхищать. Также хотелось бы искренне поблагодарить д.ф.-м.н. В.Н.Желябина и чл.-корр. РАН В.Д.Мазурова за их постоянное внимание и помощь во всём. Я признателен д.ф.-м.н. Л.А.Бокутю и д.ф.-м.н. П.С.Колесникову за полезное обсуждение результатов данной работы. Я очень благодарен и хотел бы почтить светлую память моего учителя профессора В.Т.Филиппова, который поставил мне первые интересные задачи и был моим научным руководителем. Я также признателен Институту математики СО РАН и всем сотрудникам кафедры алгебры и математической логики НГУ за творческую и благожелательную атмосферу. Часть этой работы была также выполнена во время стажировки в университете г. Сан-Пауло, которому огромная благодарность за гостеприимство. Отдельные слова благодарности моей жене, Анастасии Пожидаевой, и моим родным, семьям Пожидаевых и Тихоновых, за их многолетнюю поддержку.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (коды проектов 09-01-00157, 05–01–00230, 99-01-00499), Сибирского Отделения РАН (гранты N.1 и N.29 для молодых учёных и Интеграционные проекты N.1.9 и N.97), Совета по грантам Президента РФ (грант для ведущих научных школ НШ-344.2008.1), Фонда Содействия Отечественной Науке (программа "Выдающиеся учёные. Кандидаты и доктора наук РАН" за 2005 г.), Фонда FAPESP, Бразилия (проекты 2008/50142-8, 00/06905-5).

Литература

[1] *Зельманов Е.И., Шестаков И.П.*, Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры, Изв. АН СССР 54, 4 (1990), 676–693.

[2] *Кантор И.Л.*, Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона, в сб. “Алгебра и Анализ”, изд-во ТГУ, Томск (1989), 55–80.

[3] *Колесников П.С.*, Многобразия диалгебр и конформные алгебры, Сиб. мат. журн. 49, 2 (2008), 322–329.

[4] *Кузьмин Е.Н.*, Структура и представления конечномреных алгебр Мальцева, В кн. : “Исследования по теории колец и алгебр”, Труды Ин-та математики СО АН СССР, Новосибирск, Наука, 16 (1989), 75–100.

[5] *Михалев А.А.*, Подалгебры свободных p-супералгебр Ли, Матем. заметки 43, 2 (1988), 178–191.

[6] *Пчелинцев С.В.*, Специальность метабелевых алгебр Мальцева, Матем. заметки 74, 2 (2003), 257–266.

[7] *Скосырский В.Г.*, Строго первичные некоммутативные йордановы алгебры, в сб. “Исследования по теории колец и алгебр”, Труды Института математики, Т. 16, (1989), 131–163.

[8] *Смирнов О.Н.*, Простые и полупростые структуризуемые алгебры, Алгебра и логика 29, 5 (1990), 377–394.

[9] *Филиппов В.Т.*, n-Лиевы алгебры, Сиб. мат. журн. 26, 6 (1985), 126–140.

[10] *Филиппов В.Т.*, Обертывающие 3-лиевых алгебр, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, Препринт №5 (1988), 1–21.

[11] *Филиппов В.Т., Харченко В.К., Шестаков И.П.*, Нерешенные проблемы теории колец и модулей, Днестровская тетрадь, Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск, (1993), 1–73.

[12] *Шестаков И.П.*, Первичные супералгебры Мальцева, Мат. сборник 182, 9 (1991), 1357–1366.

[13] *Шестаков И.П.*, Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики, Алгебра и логика 36, 6 (1997), 701–731.

[14] *Шестаков И.П.*, Простые супералгебры типа (-1,1), Алгебра и логика 37, 6 (1998), 721–739.

[15] *Aguiar M.*, Pre-Poisson algebras, Lett. Math. Phys., 54, (2000), 263–277.

[16] *Albert A.A.*, Power-associative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 552–593.

[17] *Allison B.N.*, A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras, Math. Ann. 237, 2 (1978), 133–156.

[18] *Brown R.B., Gray A.*, Vector cross products, Comment. Math. Helv. 42 (1967), 222–236.

[19] *Casas J.M.*, Trialgebras and Leibniz 3-algebras, Bol. Soc. Mat. Mexicana 12, 2 (2006), 165–178.

[20] *Daletskii Yu.L., Takhtajan L.A.*, Leibniz and Lie Algebra Structures for Nambu Algebra, Lett. in Math. Phys. 39 (1997), 127–141.

[21] *Ebrahimi-Fard K.*, Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation, Lett. in Math. Phys. 61, 2 (2002), 139–147.

[22] *Faulkner J.R.*, Identity classification in triple systems, J. of Algebra 94 (1985), 352–363.

[23] *Faulkner J.R.*, Structurable superalgebras of classical type, University of Virginia, preprint, (2008), 1–44.

[24] *Guo L., Ebrahimi-Fard K.*, Rota-Baxter algebras and dendriform algebras, Jour. Pure Appl. Algebra 212, (2008), 320–339.

[25] *Kac V.G.*, Lie superalgebras, Adv. Math. 26, (1977), 8–96.

[26] *Kac V.*, Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, Comm. in Algebra 5, (1977), 1375–1400.

[27] *Kokoris L.A.*, Nodal non-commutative Jordan algebras, Can. J. Math. 12, (1960), 488–492.

[28] *Kokoris L.A.*, Simple nodal noncommutative Jordan algebras, Proc. Am. Math. Soc. 9, (1958), 652–654.

[29] *Ling W.*, On the structure of n-Lie algebras, Thesis, Siegen University-GHS-Siegen, (1993), 1–61.

[30] *Loday J.-L.*, Dialgebras, in *Loday J.-L., Frabetti A., Chapoton F., Goichot F.*, Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Mathematics, 1763, Berlin: Springer, (2001), 1–133.

[31] *Casas J.M., Loday J.-L., Pirashvili T.*, Leibniz n-algebras, Forum Math. 14, 2 (2002), 189-207.

[32] *McCrimmon K.*, Structure and representations of noncommutative Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 121, (1966), 187–199.

[33] *McCrimmon K.* , Noncommutative Jordan rings, Trans. Amer. Math. Soc. 158, (1971), 1–33.

[34] *Martinez C., Zelmanov E.*, Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic, J. of Algebra 236, (2001), 575–629.

[35] *Nambu Y.,* Generalized Hamiltonian mechanics, Phys. Rev. D 7, (1973), 2405–2412.

[36] *Oehmke R.H.*, On flexible algebras, Ann. of Math. (2) 68, (1958), 221–230.

[37] *Racine M., Zelmanov E.*, Simple Jordan superalgebras, in "Nonassociative algebras and its applications", S.Gonzales (ed), Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, (1994), 344–349.

[38] *Schafer R.D.*, Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0, Proc. Amer. Math. Soc. 6, (1955), 472–475.

[39] *Shestakov I.P.,* Speciality and Deformations of Algebras, in “Algebra: Proceedings of the International Algebraic Conference on Occasion of the 90th Birthday of A.G.Kurosh, Moscow, Russia, May 25–30, 1998”. Ed. Yu.Bahturin — Berlin; New York: de Gruyter, (2000), 345–356.

[40] *Shestakov I.P.,* The speciality problem for Malcev algebras and deformations of Malcev Poisson algebras, in “Non-Associative Algebra and Its Applications”, Proceedings of the IV International Conference on Non-Associative Algebra and Its Applications, July 1998, São Paulo; Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, NY, 211 (2000), 365–371.

[41] *Smith K.C.*, Noncommutative Jordan algebras of capacity two, Trans. Amer. Math. Soc. 158, 1 (1971), 151–159.

[42] *Sverchkov S.R.*, Structure and representations of Jordan algebras arising from intermolecular recombination, Contemporary Mathematics, AMS 483 (2009), 261–285.

[43] *Takhtajan L.A.*, On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics, Comm. Math. Phys. 160 (1994), 295–315.

[44] *Wall C.T.C.*, Graded Brauer groups, J.Reine Angew. Math. 213 (1964), 187–199.

Работы автора по теме диссертации

[45] *Пожидаев А.П.,* Простые фактор-алгебры и подалгебры алгебр якобианов, Сиб. мат. журн. 39, 3 (1998), 593–599.

[46] *Пожидаев А.П.,* Мономиальные n-лиевы алгебры, Алгебра и логика 37, 5 (1998), 599–625.

[47] *Пожидаев А.П.,* О простых n-лиевых алгебрах, Алгебра и логика 38, 3 (1999), 334–353.

[48] *Пожидаев А.П.,* Два класса центральных простых n-лиевых алгебр, Сиб. мат. журн. 40, 6 (1999), 1313–1322.

[49] *Пожидаев А.П.,* Простые бесконечномерные n-лиевы алгебры, Диссертация на соискание уч. ст. к.ф.-м.н., Новосибирск, (1998), 1–86.

[50] *Pojidaev A.P.*, "Classification" of simple finite-dimensional commutative n-ary Leibniz algebras of characteristic 0, "Atas do IX ENAL", USP, San Paulo, Brazil, (2001), 1–6.

[51] *Пожидаев А.П.*, n-арные алгебры Мальцева, Алгебра и логика 40, 3 (2001), 309–329.

[52] *Pozhidaev A.P., Saraiva P.*, On some algebras related with the simple 8-dimensional ternary Malcev algebra M_8, Departamento de Matematica da Universidade de Coimbra, preprint №19 (2003), 1–34.

[53] *Pojidaev A.P.*, Enveloping algebras of Filippov algebras, Comm. in Algebra 31, 2 (2003), 883–900.

[54] *Pojidaev A.P.*, Solvability of the finite-dimensional commutative n-ary Leibniz algebras of characteristic 0, Comm. in Algebra 31, 1 (2003), 197–215.

[55] *Pojidaev A.P.*, On simple Filippov superalgebras of type $B(0, n)$, Journal of Algebra and Its Applications 2, 2 (2003), 1–15.

[56] *Пожидаев А.П.*, Корневое разложение тернарной алгебры Мальцева M_8, Сиб. мат. журн. 46, 4 (2005), 901–906.

[57] *Pojidaev A.P., Saraiva P.*, On Derivations of the Ternary Malcev Algebra M_8, Comm. in Algebra 34, 10 (2006), 3593–3608.

[58] *Пожидаев А.П.*, О простых супералгебрах Филиппова типа $B(m, n)$, Алгебра и логика 47, 2 (2008), 240–261; Pozhidaev A.P., Simple Filippov superalgebras of type $B(m, n)$, Algebra and Logic 47, 2 (2008), 139–152.

[59] *Пожидаев А.П.*, Диалгебры и связанные с ними тройные системы, Сиб. мат. журн. 49, 3 (2008), 870–885.

[60] *Pozhidaev A.P., Saraiva P.*, On simple Filippov superalgebras of type $B(0, n)$ II, Portugaliae Mathematica 66, 1 (2009), 115–130.

[61] *Pozhidaev A.P., Beites P.*, On simple Filippov superalgebras of type $A(n, n)$, Asian-European Journal of Mathematics 1, 4 (2008), 469–487.

[62] *Pozhidaev A.P.*, 0-Dialgebras with bar-unity, Rota-Baxter and 3-Leibniz algebras, Contemporary Mathematics AMS, Proceedings of the Conference on Groups, Rings and Group Rings, Edited by: A. Giambruno, C. Polcino Milies, and S. Sehgal, Vol. 499, (2009), 245–256.

[63] *Пожидаев А.П.*, 0-Диалгебры с бар-единицей и неассоциативные алгебры Рота-Бакстера, Сиб. мат. журн. 50, 6 (2009), 1354–1367.

[64] *Pozhidaev A.P., Shestakov I.P.*, Structurable superalgebras of Cartan type, preprint, IME-USP, RT-MAT 2009-2 (2009), 1–19.

[65] *Pozhidaev A.P., Shestakov I.P.*, Noncommutative Jordan superalgebras of degree $n \geq 2$, preprint, IME-USP, RT-MAT 2009-4 (2009), 1–20.

[66] *Пожидаев А.П., Шестаков И.П.*, Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n \geq 2$, ДАН 431, 2 (2010), 165–169.

[67] *Пожидаев А.П., Шестаков И.П.*, Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n \geq 2$, Алгебра и логика 49, 1 (2010), 26–59; Pozhidaev A.P., Shestakov I.P., Noncommutative Jordan superalgebras of degree $n \geq 2$, Algebra and Logic 49, 1 (2010).

[68] *Пожидаев А.П., Шестаков И.П.*, Структуризуемые супералгебры картановского типа, ДАН 432, 2 (2010).

Пожидаев Александр Петрович

Алгебраические системы лиева типа

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать ___ .05.10.	Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,5.	Тираж 150 экз. Заказ №___.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирска, пр. Лаврентьева, 6